Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos.

Paulo de Tarso R. Mendonça

ORSA MAGGIORE

Resistência dos Materiais e fundamentos da Mecânica dos Sólidos

Dados para contato com os autores:
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.,
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
paulo.tarso@ufsc.br
CP 476 - Florianópolis, SC - 88040-900

Resistência dos Materiais e

Fundamentos de Mecânica dos Sólidos

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Copyright © 2021 Editora Orsa Maggiore.

Projeto gráfico, ilustrações: Paulo de Tarso R. Mendonça
Editoração eletrônica: Paulo de Tarso R. Mendonça
Capa: Maria Elisa Ramos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M539r Mendonça, Paulo de Tarso R.,
Resistência dos Materiais e
Fundamentos da Mecânica dos Sólidos / Paulo de Tarso R. Mendonça,
Florianópolis, SC : Orsa Maggiore, 2021.
651 p.: il., tabs., gráfs.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-993681-1-0

1. Engenharia mecânica. 2. Engenharia civil. 3.Análise estrutural (Engenharia).
4. Resistência dos Materiais. 5. Projeto estrutural.
I. Título.

CDD-620.105

Índices para catálogo sistemático:
1. Resistência dos Materiais e
Fundamentos da Mecânica dos Sólidos: Engenharia civil 620.1

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores. É proibida a reprodução por xerox.

1ª edição - 2021

Direitos adquiridos pela:
Editora Orsa Maggiore.
www.EditoraOrsaMaggiore.com.br

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Sobre o autor

O prof. Paulo de Tarso possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade de Brasília (1980), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1983) e doutorado em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Minnesota (1995). No período de 2012/2013 realizou atividades de pesquisa no *Laboratoire de Mechanique et Technologie* da *École Normale Superieure de Cachan*, França, na área de estimativa *a-posteriori* de erros em modelos numéricos. Desde 1984 trabalha na Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, onde atualmente é Professor Titular. Concentra suas atividades na área de Mecânica dos Sólidos Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento do método de elementos finitos, com ênfase em elementos finitos generalizados, modelagem do comportamento de componentes mecânicos de materiais compostos e estimativa de erros de modelagem e de modelo.

Outras publicações da editora

1. *Materiais compostos e Estruturas sanduíche - Projeto e análise*, (impresso e digital), Mendonça, 2019

2. *O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*, (impresso e digital), Mendonça e Fancello, 2019

3. *800 problemas resolvidos de Mecânica dos Sólidos, propostos no livro Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos* (digital), Mendonça, 2021.

Sumário

	Palavra aos Professores	ix
	Resumo de fórmulas	xiii
1	A mecânica dos sólidos na engenharia	1
2	Esforços internos	9
3	Tensões	67
4	Deformações e tensões	93
5	Transformação de tensões e deformações	169
6	Modos e critérios de falha e aplicações	213
7	Torção em eixos de seção circular	243
8	Flexão plana em vigas retas	277
9	Cisalhamento em vigas sob ‡exão	311
10	Carregamentos combinados	343
11	* Aplicações de elasticidade e plasticidade plana	375
12	De‡exão de vigas	425
13	Estabilidade de colunas	465
14	Métodos de energia	369
15	Elementos fnitos para barras e treliças	543
16	Elementos finitos para vigas	573
17	Apêndices	617
	Bibliografia	633

Conteúdo

Palavra aos professores **xiii**

Resumo de fórmulas **xvii**

1 A mecânica dos sólidos na engenharia **1**
1.1 Processo geral de análise mecânica de corpos sólidos 1
1.2 Tipos de componentes estruturais 5

2 Esforços internos **9**
2.1 Equilíbrio de um corpo e reações de apoio 9
2.1.1 Tipos de apoios em vigas 11
2.2 Esforços internos em barras e vigas 16
2.3 Ideias preliminares sobre tensões 18
2.3.1 Um tratamento mais rigoroso 20
2.4 Caso geral de esforços em vigas 23
2.5 Equações diferenciais de equilíbrio de viga em flexão e tração 36
2.5.1 Dedução simplificada 37
2.5.2 Dedução detalhada para flexão 39
2.5.3 Usos das equações diferenciais de equilíbrio e equilíbrio para forças concentradas 42
2.6 Sistemas de coordenadas locais 50
2.7 Exemplos adicionais 55
2.8 Exercícios 61

3 Tensões **67**
3.1 Alguns aspectos sobre tensões 69
3.2 Tensor tensão 70
3.3 Equações diferenciais de equilíbrio 73
3.4 Alguns problemas reais resolvidos por tensões médias 76
3.4.1 Tensões normal e cisalhante médias 77
3.4.2 Modos de falhas e tensões admissíveis 80
3.4.3 Usos da tensão cisalhante média - Pinos e chapas coladas 85

4 Deformações e tensões **93**
4.1 Ideias básicas de deslocamento e deformação 93
4.2 Campos de deslocamento e de deformações 94
4.2.1 Hipóteses cinemáticas 98
4.3 Efeito de Poisson 99
4.4 Casos clássicos de campos cinemáticos 103
4.5 Ensaio de tração - diagrama tensão-deformação 106
4.5.1 Procedimento geral do ensaio 107
4.5.2 Comportamentos elástico e plástico do material 109
4.5.3 Tensão de ruptura, de fratura e elongamento máximo 111
4.5.4 Materiais frágeis e dúcteis 113
4.6 Princípio de Sobreposição dos Efeitos 114

4.7 Relação tensão-deformação triaxial - Lei de Hooke . . . 115
4.7.1 Deformações térmicas . . . 120
4.7.2 Experimentação das propriedades elásticas . . . 125
4.7.3 Estado Plano de Tensões . . . 126
4.8 Equações gerais de mecânica dos sólidos . . . 129
4.9 O problema de barras sob carga axial . . . 130
4.9.1 Barra uniforme sob carga concentrada . . . 135
4.9.2 Problemas hiperestáticos . . . 145
4.10 Princípio de Saint-Venant e concentração de tensões . . . 157
4.10.1 Concentradores de tensão . . . 158
4.11 Exercícios . . . 162

5 Transformação de tensões e deformações 169
5.1 Aspectos qualitativos de transformação de tensões . . . 169
5.2 Transformação plana do EPT . . . 172
5.3 Tensões principais e cisalhamento máximo no plano . . . 177
5.3.1 Determinação dos ângulos na função arco tangente . . . 178
5.3.2 Tensões cisalhantes máximas . . . 179
5.4 Círculo de Mohr para rotação plana de EPT . . . 182
5.5 Processo de construção do círculo de Mohr plano . . . 186
5.6 Tensões principais num estado triaxial de tensões . . . 189
5.6.1 Quando o cisalhamento ocorre num único plano . . . 192
5.6.2 Rotação das tensões principais . . . 194
5.6.3 Círculos de Mohr de estado triaxial de tensões . . . 195
5.6.4 Tensão cisalhante máxima absoluta. . . . 195
5.7 Transformação de deformações em estado plano . . . 197
5.7.1 Aspectos gerais de transformação de deformações . . . 199
5.7.2 Equação de transformação plana de EPD . . . 200
5.7.3 Comentários adicionais . . . 205
5.8 Extensômetros e rosetas . . . 206
5.9 Exercícios . . . 207

6 Modos e critérios de falha e aplicações 213
6.1 Modos de falha . . . 213
6.2 O problema fundamental dos critérios de falha . . . 218
6.3 Teoria da máxima tensão normal - TMTN . . . 220
6.4 Teoria da máxima tensão cisalhante - TMTC . . . 221
6.5 Teoria da máxima energia de distorção - von Mises . . . 223
6.6 Vasos de pressão cilíndricos de paredes finas . . . 228
6.6.1 Vasos de pressão esféricos . . . 233
6.6.2 Observações e limitações nas fórmulas . . . 234
6.6.3 Variação do diâmetro devido à pressurização . . . 236
6.7 Exercícios . . . 239

7 Torção em eixos de seção circular 243
7.1 Hipóteses cinemáticas . . . 244
7.2 Transmissão de potência . . . 245
7.3 Diagramas de esforços de torção . . . 246
7.4 Fórmula de torção . . . 248
7.4.1 Seções maciças e tubulares – Momento polar e tensão máxima . . . 252
7.4.2 Dimensionamento . . . 256
7.5 Concentração de tensões em torção . . . 258
7.6 Ângulo de torção . . . 260
7.6.1 Problemas hiperestáticos de torção . . . 264

7.7 Exemplos adicionais . . . 266
7.8 Exercícios . . . 270

8 Flexão plana em vigas retas 277
8.1 Teoria de flexão de vigas . . . 277
8.2 Fórmula de Flexão . . . 281
8.2.1 Equilíbrio de forças em x e a linha neutra . . . 281
8.2.2 Momentos em z e fórmula de flexão . . . 281
8.2.3 Coeficiente de segurança e critério de falha . . . 282
8.2.4 Momentos em y e direções principais de inércia . . . 283
8.2.5 Momento estático de inércia e determinação do centroide . . . 283
8.3 2° momento de inércia - casos básicos - seção retangular . . . 285
8.3.1 Momentos de inércia de seção circular e tubular . . . 287
8.4 Teorema dos Eixos Paralelos para momento de inércia I_{ZZ} . . . 288
8.5 Alguns exemplos . . . 289
8.6 * Vigas compostas por dois ou mais materiais . . . 294
8.6.1 Linha neutra . . . 295
8.6.2 Tensão normal . . . 297
8.7 Exercícios . . . 304

9 Cisalhamento em vigas sob flexão 311
9.1 Efeitos do esforço cortante . . . 311
9.2 Fluxo de cisalhamento e tensão cisalhante . . . 314
9.2.1 Tensão cisalhante . . . 316
9.3 Casos particulares . . . 317
9.3.1 Seção retangular . . . 317
9.3.2 Distribuição real de tensões cisalhantes na seção retangular . . . 318
9.3.3 Seção circular . . . 319
9.3.4 Limitações da teoria em perfil I . . . 322
9.3.5 Fórmula aproximada para $\tau_{\max}$ em perfis I e T. . . . 323
9.4 Fluxo de cisalhamento em perfis de paredes finas . . . 323
9.5 Vigas formadas pela união de barras finas . . . 326
9.6 Tensões combinadas - efeitos do momento fletor e cortante . . . 328
9.7 Tensões combinadas - torção e cortante em vigas . . . 333
9.8 Centro de torção e perfis abertos não simétricos . . . 334
9.9 Exercícios . . . 337

10 Carregamentos combinados 343
10.1 Carregamento combinado - torção e tração . . . 344
10.2 Carregamento oblíquo - flexão não plana elástica . . . 346
10.2.1 Fórmula de flexão oblíqua . . . 347
10.2.2 Linha neutra . . . 349
10.3 Flexão oblíqua com carregamento axial . . . 352
10.4 Propriedades geométricas de uma seção . . . 357
10.4.1 Momentos estáticos e centroide de uma seção assimétrica . . . 357
10.4.2 Momentos de inércia da seção assimétrica . . . 358
10.4.3 Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia . . . 359
10.4.4 Rotação de eixos - Eixos Principais de Inércia . . . 360
10.5 Flexão em viga de seção assimétrica . . . 362
10.6 Carregamento combinado - tração, flexão e torção . . . 365
10.7 Exercícios . . . 368

11 * Aplicações de elasticidade e plasticidade plana 375
11.1 Equações gerais em coordenadas cartesianas e polares . . . 375

11.2 Problemas axisimétricos: disco e cilindro pressurizado . . . 378
11.2.1 Barra e disco sem furo . . . 380
11.2.2 Tubo pressurizado de parede espessa e disco . . . 380
11.2.3 Limite para Casca Fina . . . 385
11.3 Plastificação num cilindro de parede espessa . . . 386
11.3.1 Pressão para início de plastificação . . . 386
11.3.2 Pressão para plastificação total da parede . . . 387
11.3.3 Plastificação parcial da parede . . . 388
11.3.4 Exemplo 11.2 - Pressões máximas em cilindro de parede espessa . . . 389
11.4 Furo circular em placa sob tração . . . 391
11.5 Fator de concentração de tensões . . . 396
11.6 Torção em barras de seção não circular . . . 396
11.6.1 Analogia da membrana . . . 402
11.6.2 Barra de seção aberta delgada . . . 403
11.6.3 Barra de seção retangular . . . 407
11.6.4 Tubos de parede delgada . . . 408
11.7 Vigas curvas . . . 410
11.8 Exercícios . . . 420

12 Deflexão de vigas **425**
12.1 Equação diferencial de linha elástica . . . 428
12.1.1 Dedução curta da equação diferencial da curva elástica . . . 431
12.2 Integração de curva elástica e condições de contorno . . . 432
12.2.1 Exemplo 12.1 – Viga biapoiada sob carga distribuída . . . 435
12.2.2 Exemplo 12.2 – Uso da equação diferencial de 4^a ordem . . . 437
12.2.3 Exemplo 12.3 – Viga biapoiada sob carga concentrada . . . 438
12.3 Método de integração para vigas hiperestáticas . . . 441
12.3.1 Exemplo 12.4 – Integração em viga hiperestática . . . 441
12.3.2 Exemplo 12.5 – Carga concentrada em viga hiperestática . . . 443
12.3.3 Exemplo 12.6 – Condição de simetria . . . 447
12.4 O Método de sobreposição para flexão de vigas . . . 448
12.4.1 Exemplo 12.7 – Um vão, método de sobreposição . . . 451
12.5 O método de multicorpos . . . 453
12.5.1 Exemplo 12.8 - Aplicação do método de multicorpos . . . 454
12.6 Problemas diversos . . . 455
12.6.1 Exemplo 12.9 - Montagem de conjunto viga-mola com deformação inicial . . . 455
12.6.2 Exemplo 12.10 - Conjunto viga-mola sob deformação inicial . . . 456
12.6.3 Exemplo 12.11 - Viga e mola flexural . . . 458
12.7 Exercícios . . . 459

13 Estabilidade de colunas **465**
13.0.1 Exemplo 13.2 - “Snap-through” em barras no plano . . . 469
13.1 Equação diferencial para viga-coluna . . . 472
13.1.1 Solução da equação homogênea . . . 474
13.1.2 Exemplo 13.3 - Carga de flambagem em barra bi-rotulada . . . 475
13.1.3 Exemplo 13.4 - Carga de flambagem em barra bi-engastada . . . 477
13.1.4 Outra abordagem do problema de flambagem de barras bi-rotuladas . . . 479
13.1.5 Caso 13.5 - Carga de flambagem de barra engastada-livre . . . 479
13.1.6 Exemplo 13.6 - Carga de flambagem de barra engastada-rotulada . . . 482
13.1.7 Resumo dos casos . . . 483
13.2 Excentricidade - fórmula da secante . . . 485
13.2.1 Escoamento . . . 488
13.3 Cálculo normalizado - colunas sob carga centrada . . . 491
13.4 Enrijecimento por tração . . . 496

13.4.1 Solução da equação homogênea . . . 497
13.4.2 Exemplo 13.12 - Enrijecimento em viga bi-rotulada . . . 497
13.5 Exercícios . . . 499

14 Métodos de energia **509**
14.1 Trabalho de deformação . . . 510
14.1.1 Trabalho de deformação para estado uniaxial de tensão . . . 510
14.1.2 Trabalho de deformação para o caso de cisalhamento puro . . . 512
14.1.3 Trabalho de deformação para estado multiaxial de tensões . . . 513
14.2 Energia de deformação elástica . . . 513
14.2.1 Energia de deformação elástica de uma barra sob esforço normal . . . 513
14.2.2 Energia de deformação para o problema de flexão . . . 514
14.2.3 Energia de deformação para torção de eixos de seção circular . . . 515
14.2.4 Energia de deformação devido ao esforço cortante . . . 515
14.3 Deslocamento pelo método da energia . . . 516
14.3.1 Exemplo 14.1 - Deslocamento em uma barra . . . 516
14.3.2 Exemplo 14.2 - Calcular deslocamentos axiais numa barra . . . 517
14.3.3 Exemplo 14.3 - Deslocamento máximo em viga em balanço . . . 518
14.4 Teoremas de Castigliano . . . 520
14.4.1 Exemplo 4 - Deflexão em uma barra com duas forças . . . 522
14.4.2 Exemplo 5 - Deflexão onde não ha força aplicada . . . 522
14.4.3 Exemplo 14.6 - Treliça simples de duas barras . . . 524
14.4.4 Exemplo 14.7 - Problema hiperestático pelo 2^o Teorema de Castigliano . . . 526
14.4.5 Exemplo 14.8 - Estrutura plana - flexão e torção . . . 528
14.4.6 Exemplo 14.9 - Estrutura plana - flexão e torção . . . 529
14.4.7 Exemplo 14.10 - Pórtico plano - flexão plana . . . 530
14.4.8 Exemplo 14.11 - Viga curva delgada - Arco sob flexão plana . . . 532
14.4.9 Exemplo 14.12 - Viga curva delgada hiperestática . . . 533
14.4.10 Exemplo 14.13 - Viga com mola flexural . . . 534
14.4.11 Exemplo 14.14 - Viga com apoio em mola . . . 535
14.5 Exercícios . . . 537

15 Elementos finitos para barras e treliças **543**
15.1 Interpolação dos deslocamentos . . . 545
15.1.1 Interpretação das funções de interpolação lineares . . . 548
15.1.2 Determinação da matriz de rigidez do elemento finito de barra . . . 548
15.2 Matriz de rigidez de um elemento rotacionado no plano xy . . . 552
15.3 Matriz de rigidez de um sistema de barras . . . 555
15.3.1 Fase de pré-processamento de dados . . . 555
15.3.2 Fase de processamento . . . 558
15.3.3 **Etapa 2** - Sobreposição da matriz de rigidez global . . . 561
15.3.4 **Etapa 3**- Definição do vetor de carregamento nodal . . . 562
15.3.5 **Etapa 4** - Aplicações das condições de contorno . . . 563
15.3.6 Pós-processamento . . . 565
15.4 Exercícios . . . 569

16 Elementos finitos para vigas **573**
16.1 Funções de forma . . . 573
16.2 Equilíbrio do elemento de viga . . . 576
16.2.1 Dedução 1 - Rigidez do elemento via Teorema de Castigliano . . . 577
16.2.2 Dedução 2 - Rigidez do elemento via método da rigidez . . . 578
16.3 Análise de vigas no plano . . . 582
16.3.1 Exemplo 16.1 - Pórtico plano . . . 586
16.4 Esforços e tensões nos elementos em problemas planos . . . 589

16.4.1 Exemplo 16.2 - Esforços e tensões 590
16.4.2 Exemplo 16.3 - Viga escalonada 593
16.4.3 Exemplo 16.4 - Viga com seção uniforme 600
16.4.4 Exemplo 16.5 - Aplicação de deslocamento prescrito 601
16.5 Carga distribuída no elemento 603
16.5.1 Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados 604
16.5.2 Exemplo 16.6 - Viga sob carga distribuída 605
16.5.3 Exemplo 16.7 - Pórtico sob carga distribuída 609
16.6 Exercícios 612
16.6.1 Exercícios conceituais 612
16.6.2 Exercícios numéricos 612

17 Apêndices **617**
17.1 Fórmulas para vigas 617
17.2 Solução de equações diferenciais ordinárias de 2^a ordem 620
17.2.1 Solução particular 622
17.3 Fatores de concentração de tensões 623
17.4 Solução de exercícios selecionados 625

Bibliografia **633**

Palavra aos Professores

Todos os livros textos de Resistência dos Materiais conhecidos, tanto os traduzidos quanto os produzidos no Brasil, seguem uma lista mais ou menos padrão de tópicos que caracteriza a área. Cada um dos tópicos é desenvolvido através de diversos "métodos" de cálculo. Todo esse material é, de certa forma, derivado do texto fundamental de Timoshenko, que tem seus primeiros manuscritos originados nos anos 1920, escritos ainda na Rússia.

Embora muitos dos tópicos sejam praticamente mandatórios, os métodos de cálculos que os materializam necessitam periodicamente ser modernizados ou substituídos por outros mais eficientes. Por exemplo, uma das características marcantes de livros produzidos nos anos 1940-1960 era a ênfase em procedimentos gráficos, em que o engenheiro produzia diagramas de esforços e curvas elásticas trabalhando com desenhos em escala, onde realizava, graficamente, as operações de diferenciação e integração. Com o advento das calculadoras eletrônicas nos anos 1970, a ênfase nesses processos gráficos foi bastante reduzida, como pode ser verificado nos livros hoje em circulação. Entretanto, nos livros atuais ainda se nota claramente uma filosofia geral de operação baseada num mundo pré-computador. Existe uma profusão enorme de métodos para realizar uma mesma operação. Por exemplo, para obter o deslocamento ou rotação numa seção de um eixo, são desenvolvidos os métodos de integração direta, de sobreposição, de área de momento, se a viga for isostática. Se a viga for hiperestática, cada um desses métodos se desdobra em variações adequadas. O elenco ainda segue com equilíbrio de energia, com o segundo teorema de Castigliano, com o princípio do trabalho virtual e com funções de singularidade. Conquanto a apresentação de diversos desses métodos seja útil em diversas situações, de fato, o aluno não dispõe de amadurecimento suficiente para adquirir destreza de uso em mais que dois ou três deles.

Com vistas nisso, torna-se clara a necessidade de, sumariamente, remover alguns desses métodos dos materiais didáticos utilizados em disciplinas obrigatórias nos currículos. Outros, embora ainda devam ser mantidos no texto escrito, devem ter seu uso judiciosamente selecionado, pelo professor e pela instituição, da forma mais adequada às características do curso.

No aspecto da modernização do material, a introdução do uso do computador é crucial. Esse uso é feito de diversas formas. Mesmo nos métodos tradicionais, como o método de integração para a curva elástica de vigas, o computador pode ser usado. Nota-se que a aplicabilidade desse método sempre foi tradicionalmente limitada a vigas de poucos vãos, uma vez que cada vão implica em duas ou quatro constantes de integração incógnitas a serem resolvidas por um sistema de equações algébricas. A forma como isso é feito nos livros disponíveis é através de um trabalho manual de substituição de uma equação na outra até a determinação de todas as constantes. Obviamente, hoje isso pode ser feito sem limitação, simplesmente definindo um sistema algébrico de equação através de um matriz coeficiente, que pode ser imediatamente resolvido em computador e até mesmo em calculadoras de bolso. Esse é o procedimento adotado nos exemplos do presente texto.

A segunda forma de aplicação computacional é feita com a introdução direta ao **Método de Elementos Finitos**. Esse método, por ter capacidade de análise de estruturas com forma, carregamento e apoios arbitrários, permite a remoção de certos métodos tradicionais. Sem dúvida que esse método tem uma fundamentação demasiado complexa para o tempo disponível numa disciplina introdutória, e também para o grau de amadurecimento dos alunos envolvidos. Entretanto, isso é contornado no presente livro com o uso da estratégia tradicionalmente denominada "método de análise matricial de estruturas". Com isso introduz-se o método de elementos finitos usando ideias mecânicas intuitivas já dominadas pelo aluno nesse estágio, isso é, as ideias sobre o comportamento

de uma barra ou viga. Essa estratégia tem sido aplicada com sucesso nas disciplinas oferecidas aos cursos de Engenharias Mecânica e Produção Mecânica pelo Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, desde 1996. O material incluído, apesar de resumido, é autossuficiente para as necessidades normais do engenheiro, no sentido de permitir que ele realize todas as tarefas de cálculo de estruturas de barras e vigas que tradicionalmente eram realizadas pelos diversos métodos tradicionais, além de permiti-lo trabalhar com treliças e pórticos bastante mais complexos que aqueles anteriormente possíveis de serem tratados por cálculo manual. Mesmo as tarefas necessárias durante as disciplinas que têm esta como pré-requisito, como as de Estabilidade em engenharia civil, de Fadiga e de Elementos de Máquinas em Engenharia Mecânica, podem ser normalmente realizadas com as ferramentas de elementos finitos vistas nesse curso.

O aprofundamento do método de elementos finitos, em sua aplicação a elementos estruturais como placas, estados planos de tensão e deformação, e problemas sólidos, deve ser deixado para um segundo curso no currículo. Nesse caso, torna-se necessário o uso de um material adequado, como o livro *O Método de Elementos Finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*, em coautoria com o Prof. Eduardo A. Fancello, do EMC/UFSC. Ali, em seus capítulos iniciais, o método é apresentado de forma consistente, a partir de sua fundamentação no princípio dos trabalhos virtuais, de forma adaptada ao ensino de graduação.

Sem dúvida que quase todos os materiais didáticos incluem as definições e **equações gerais da Mecânica dos Sólidos** em problemas estático-lineares triaxiais: as componentes do tensor tensão, do tensor deformação, as relações deformação-deslocamento, as equações diferenciais de equilíbrio local, a lei de Hooke generalizada, as transformações de tensões e alguns critérios de falha. Entretanto, em sala de aula, o que se observa é que, embora se deduza e apresente os conceitos e relações gerais, tridimensionais, todos os tópicos realmente desenvolvidos e exemplificados, de fato, se restringem a estados uniaxiais de tensão: barra, viga sob momento plano e oblíquo e barra sob torção. Então, observa-se que o aluno nunca tem nenhum contato real com situações tridimensionais. De fato, quando ele conclui a disciplina, termina com a sensação de que Mecânica dos Sólidos se resume a um conjunto de 6 a 8 equações algébricas muito simples que resolvem problemas de barra e viga (fórmula de flexão, de torção, etc.), deduzidas de forma independente uma da outra. Isso o desestimula no prosseguimento de estudos avançados na área e, de fato, o limita no aprendizado da análise estrutural e da elasticidade, e de métodos modernos de análise como o de Elementos Finitos. Assim, uma preocupação do presente curso é que, além de ocupar a parte principal do texto com os componentes básicos necessários, barras e vigas, busca-se apresentar material auxiliar de problemas mais complexos visando ampliar a visão do estudante e inspirar estudos mais avançados na área. Assim, o problema de análise de tensões em tubos cilíndricos pressurizados de paredes delgadas é detalhado, e utilizado como caso de problema de estado biaxial de tensões, com aplicação de transformação de tensão e critérios de falha. Também, as equações gerais da mecânica dos sólidos são aplicadas ao caso do **tubo pressurizado de parede espessa**, onde se aplica as equações gerais triaxiais. O mesmo desenvolvimento é adaptado para a solução do problema clássico de elasticidade da **placa infinita sob tração, com furo circular**. Aqui se introduz, de forma natural e simples, os conceitos de campo de tensão com gradiente não elementar, o que leva naturalmente ao conceito de **concentração de tensões**. Esse último conceito é apresentado, mas sua exploração é deixada, como usual, para disciplinas seguintes, como a de Fadiga e de Elementos de Máquinas.

Tradicionalmente o material é introduzido em graduação seguindo o procedimento "partir do mais simples e ir ao complicado", isto é, parte-se do elemento estrutural mais simples, a barra, depois a viga no plano, depois flexão oblíqua, carregamento combinado, etc. Deve-se enfatizar que o presente curso se constitui no primeiro contato do aluno de engenharia com os problemas de corpos deformáveis. De fato, até esse ponto, seu único contato com a mecânica consistia na estática e dinâmica dos corpos rígidos, que são as aplicações diretas da mecânica Newtoniana ao equilíbrio estático e dinâmico de partículas e corpos sólidos. Agora o aluno tem seu primeiro contato com os conceitos de deformação, tensões atuando no material, falha de material. Logo, embora o equacionamento desenvolvido seja bastante simples, a carga de conceituação introduzida é enorme e sofisticada. Tão sofisticada que o desenvolvimento da ciência na qual essa se insere, a Mecânica do Contínuo, consumiu o esforço das mentes mais brilhantes da humanidade durante cerca de trezentos

anos. Por exemplo, problemas que hoje parecem elementares, como o estado de tensões numa viga em balanço, foi objeto de estudos de Galileu, que forneceu uma solução incorreta. Esse fato explica a grande dificuldade que parte considerável dos estudantes experimenta em seu estudo da matéria, agravado pelo fato de que o equacionamento é tão simples que leva ao aluno a subestimar o esforço necessário em seu aprendizado.

Com isso, considera-se correta a estratégia "partir do mais simples e ir ao complicado" para a escolha e ordem de tópicos básicos para o curso. Considera-se totalmente desaconselhável, num curso introdutório, o desenvolvimento do assunto seguindo o caminho inverso, ("deduzir e simplificar uma formulação geral para chegar ao caso particular") isto é, partindo da formulação geral, 3D do assunto, para em seguida chegar aos casos de interesse, barras e vigas, através de simplificações. Esse procedimento, entretanto, é aplicável numa segunda visita ao assunto, em disciplina avançada.

Uma outra característica do texto consiste na ordem de alguns tópicos. Tradicionalmente, a transformação de tensões e critérios de falha é apresentada após a apresentação de problemas de carregamento combinado. A forma adotada aqui é a de que sejam mostradas desde o início, de forma a permitir sua utilização quando da apresentação de cada elemento estrutural. Considera-se que quanto mais cedo o estudante for exposto aos problemas de modos e teorias de falha de material, mais facilmente ele poderá "suportar" toda a carga de abstração dos conceitos de tensão, deformação e suas transformações, uma vez que a maioria dos critérios de falha utilizados são baseados em tensões.

O material é dividido em duas partes, com o seguinte conteúdo.

PARTE I

A menos de algumas seções, esta parte corresponde a um curso de graduação em Engenharia Mecânica. Civil, e afins, de 60 horas-aula.

- ESFORÇOS INTERNOS. Equações diferenciais de equilíbrio de viga. Problemas isostáticos.
- TENSÕES. Tensor tensão, componentes, equações diferenciais de equilíbrio. Caso de cilindro pressurizado. Barras sob tração.
- DEFORMAÇÕES E TENSÕES. Diagramas tensão-deformação, Lei de Hooke 3D, deformações térmicas. Aplicações em experimentos. Princípio de sobreposição. Problemas hiperestáticos de barras.
- TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES. Transformação plana de tensões. Círculo de Mohr. Tensões principais em estados triaxiais de tensão usando autovalores. Rosetas.
- CRITÉRIOS DE FALHA. Teorias de início de escoamento. Aplicações com problemas de cilindro pressurizado.
- TORÇÃO. Tensões e rotação de barras de seção circular. Problemas hiperestáticos de torção.
- FLEXÃO DE VIGAS. Tensões em flexão plana. Análise de seções: momentos de inércia, determinação de centroide, eixos principais de inércia.
- CISALHAMENTO EM VIGAS. Fluxo de cisalhamento. Tensões combinadas de flexão, cortante, torção.

PARTE II

Essa parte é vista em uma segunda disciplina de 60 horas-aula, geralmente oferecida apenas a cursos de engenharia mecânica, civil e afins.

- CARREGAMENTOS COMBINADOS. Carregamento de torção, tração e flexão. Carregamento oblíquo. Produto de inércia, translação e rotação de eixos de inércia.

- APLICAÇÕES DE ELASTICIDADE E PLASTICIDADE PLANA. Soluções analíticas clássicas, como tubo pressurizado de parede espessa, sob resposta elástica e sob plastificação, placa tracionada com furo, torção de barras de seção arbitrária, flexão de vigas curvas espessas.
- DEFLEXÃO DE VIGA SOB FLEXÃO. Problemas isostáticos e hiperestáticos pelos métodos de integração direta e de sobreposição. Problemas multicorpos de viga-mola.
- ESTABILIDADE DE BARRAS. Conceito de instabilidade estrutural. Casos de "snap-trough". Vigas longas e vigas curtas. Efeitos de excentricidade e de plastificação. Cálculo normalizado.
- MÉTODOS DE ENERGIA. Conceito de densidade de energia de deformação. Teoremas de Castigliano. Cálculos em treliças e pórticos planos.
- MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS. Construção do método para elementos de barras e vigas, para modelagem de treliças e pórticos. Dedução via análise matricial usando os conceitos de Resistência dos Materiais obtidos nos capítulos precedentes. Os objetivos são: (a) habilitar o estudante a realizar análise de estruturas complexas com o auxílio de programa comercial; (b) preparar o aluno para um estudo posterior, mais detalhado, do método de elementos finitos aplicado a estruturas e outras; (c) familiarizar o estudante com conceitos como valores nodais, aproximação, matriz de rigidez, elemento, singularidade de matriz, condições de contorno e carregamentos, formas típicas de entrada e saída de dados de programas de Elementos Finitos e estratégias de interpretação de resultados.

Material de apoio ao Professor

1. Todos os exercícios propostos possuem **gabaritos detalhados**, reunidos no livro *800 problemas resolvidos de Mecânica dos Sólidos, propostos no livro Resistência dos Materiais e Fundamentos de Mecânica dos Sólidos*. Esse volume é apenas em forma digital, e é de acesso apenas a professores.
2. **Video-aulas** são disponíveis em diversos tópicos, para auxílio aos professores e alunos.
3. Todas as figuras do livro são disponibilizadas para facilitar o preparo de aulas pelo professor.

Resumo de fórmulas

Equilíbrio diferencial de vigas: (página 43)

$$\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \qquad \frac{dM_z}{dx} = -V_y(x) \qquad \frac{dM_y}{dx} = V_z(x)$$
$$\frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \qquad \frac{dV_z}{dx} = -p_z(x)$$

Definição de vetor tensão: (página 69)

$$\mathbf{t_{(n)}}(\mathbf{x}) := \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

Equações diferenciais do movimento para um elemento diferencial de volume: (página 75)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{cx} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{cy} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{cz} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

O equilíbrio ocorre para o caso quasi-estático em que os termos de inércia são tomados como nulos. Em estado plano de tensões ou deformações, em **coordenadas polares** as equações de equilíbrio são: (página 376)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\
\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S &= 0
\end{aligned}$$

Coeficiente de segurança n num ponto de coordenada $\mathbf{x}$ do corpo, para um dado modo de falha:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{aplic}(\mathbf{x})} = \frac{\text{máxima tensão de resistência do material}}{\text{tensão aplicada no ponto}}.$$

Relações deformação-deslocamento (relações cinemáticas) triaxiais, lineares, (para pequenas deformações, deslocamentos e rotações): (página 97)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Em estado plano de tensões ou deformações, em **coordenadas polares** as relações cinemáticas são: (página 377)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

Definição do **coeficiente de Poisson**, para um material homogêneo isotrópico: (página 99)

$$\nu := -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}.$$

Onde ε_{axial} e ε_{trans} são deformações extensionais obtidas de um estado uniaxial de tensões dado por apenas a componente $\sigma_{axial} \neq 0$.

Lei de Hooke generalizada, ou **lei de Hooke 3D** para materiais homogêneos-isotrópicos-lineares: (página 122)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lei de Hooke para **Estado plano de tensões** - $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$: (página 126)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Em estado plano de tensões, em **coordenadas polares** lei de Hooke é: (página 377)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - v\sigma_r), \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

Fator de concentração de tensões K_t, para estados elástico-lineares de tensões: (página 159)

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$$

onde σ_0 é a tensão nominal e $\sigma_{\max}$ a tensão elástica máxima no entalhe.

Transformação plana em Estado Plano de Tensões: (página 175)

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \operatorname{sen}^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta),$$

Tensões principais em Estado Plano de Tensões: (página 185)

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

e $\sigma_3 = 0$. Direções das tensões principais em Estado Plano de Tensões: (página 178)

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

As tensões principais em estado triaxial de tensões são as três raizes σ_j de: (página 190)

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_j & \tau_{xy} & \tau_{xj} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_j & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_j \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ e } 3.$$

Tensão cisalhante máxima absoluta: (página 196)

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^{abs} &= \operatorname{Max}\{\tau_{\max}^{12};\ \tau_{\max}^{13};\ \tau_{\max}^{23}\}, \\ &= \frac{1}{2}\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|\ ;\ |\sigma_1 - \sigma_3|\ ;\ |\sigma_2 - \sigma_3|\} \end{aligned}$$

Transformação plana de estado plano de deformações: (página 202)

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'}\ /2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cos^2\ \theta & \text{sen}^2\ \theta & 2\text{sen}\ \theta \cos\theta \\ \text{sen}^2\ \theta & \cos^2\ \theta & -2\text{sen}\ \theta \cos\theta \\ -\text{sen}\ \theta \cos\theta & \text{sen}\ \theta \cos\theta & (\cos^2\theta\ - \text{sen}^2\ \theta) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\ /2 \end{array} \right\}$$

Critério da máxima tensão normal: (página 220)

$$n = \frac{\sigma_R}{\sigma_{EQ}},\ \text{onde}\ \sigma_{EQ} = \text{Max}\left\{|\sigma_1|\,;|\sigma_2|\,;|\sigma_3|\right\}$$

Critério da máxima tensão cisalhante: (página 223)

$$n = \frac{\tau_E/2}{\tau_{\max}^{abs}}$$

Critério da máxima energia de distorção: (página 225)

$$n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{EQ}},\ \text{onde}\ \sigma_{EQ} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right]}$$

Para o Estado Plano de Tensões, substituindo pelas componentes no plano xy,

$$\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}$$

Vasos de pressão cilíndricos de parede fina: (página 231)

$$\text{Tensão tangencial}\ \sigma_t = \frac{PR}{h}, \qquad \text{Tensão axial}\ \sigma_a = \frac{PR}{2h} \qquad \text{Tensão radial}\ \sigma_r = 0$$

Tubo de **parede espessa sob pressão interna** P: (página 381)

$$\sigma_r = \frac{a^2P}{\triangle}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = \frac{a^2P}{\triangle}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

onde $\triangle = b^2 - a^2$, e a e b são raio interno e externo do tubo.

Pressão que leva à **plastificação completa da parede** de tubo de parede espessa: (página 387)

$$P_P = -\sigma_E\ ln\frac{a}{b}$$

Potência transmitida num eixo rotativo é a taxa de variação do trabalho W, i.e., (página 246)

$$P \doteq \frac{dW}{dt} \quad \rightarrow \quad P = T\frac{d\alpha}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{P = T\omega}$$

onde T é o torque e ω a velocidade angular.

Fórmula de torção para barras de seção circular: (página 252)

$$\tau_{x\theta}(x,r) = \frac{M_t(x)}{J(x)}r, \quad \text{onde} \quad J = \frac{\pi}{32}\left(d_e^4 - d_i^4\right)$$

J é o momento polar de inércia da seção tubular. Ângulo de torção: (página 261)

$$\underbrace{\varphi(x) - \varphi(x_o)}_{\Delta\varphi} = \int_{\bar{x}=x_o}^{x} \frac{M_x(\bar{x})}{GJ(\bar{x})}\ d\bar{x}$$

Para barra de comprimento L com seção e esforço uniformes,

$$\Delta\varphi = \frac{M_x L}{GJ}$$

Torção de barras não circulares - perfil delgado aberto: (página 405)

$$-\frac{\tau_{yz\,\max}}{h/2} = -2G\theta \quad \text{onde} \qquad \theta = \frac{3T}{bh^3G}$$

Torção de tubos não circulares de parede delgada: (páginas 409 e 409)

$$\tau = \frac{T}{2h\bar{A}}, \quad \theta = \frac{TS}{4G\bar{A}^2h}$$

Fórmula de flexão para viga de Euler-Bernoulli: (página 282)

$$\sigma_x(x.y) = -\frac{M_z(x)}{I_{zz}(x)}y$$

Posição $\bar{Y}$ do centróide da seção em relação a um eixo temporário Y: (página 284)

$$\bar{Y} = \frac{1}{A}Q_Z = \frac{1}{A}\int_A Y\ dA$$

Teorema dos eixos paralelos: (página 289)

$$I_{ZZ} = I_{zz} + A\overline{Y}^2$$

Rotação plana de momentos de inércia: (página 360)

$$\begin{array}{l} I_{z_c^{`}} = I_{y_c}\text{sen}^2\theta + I_{z_c}\ \cos^2\theta + 2I_{y_cz_c}\ \text{sen}\ \theta\cos\theta, \\ I_{y_c^{`}} = I_{z_c^{`}} = I_{y_c}\cos^2\theta + I_{z_c}\ \text{sen}^2\ \theta - 2I_{y_cz_c}\ \text{sen}\ \theta\cos\theta, \\ I_{y_c^{`}z_c^{`}} = (I_{z_c} - I_{y_c})\ \text{sen}\ \theta\cos\theta + I_{y_cz_c}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\ \theta). \end{array}$$

Momentos de inércia principais centroidais: (página 362)

$$\left.\begin{array}{l} I_y \\ I_z \end{array}\right\} = \frac{(I_{y_c} + I_{z_c})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_cz_c}^2}$$

Curva elástica em flexão. Equação diferencial: (página 431)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z, \qquad EI\frac{d^3v}{dx^3} = -V_y, \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = p_y$$

Tensão cisalhamento em viga sob flexão: (página 317)

$$\tau = \frac{V_yQ_F}{tI_z}$$

Q_F é **o momento estático da área A_F em relação ao eixo principal** z. Tensão máxima em seção retangular e circular: (páginas 318 e 320)

$$\tau_{\max}(x) = \frac{3V_y}{2A} \quad \text{e} \quad \tau_{\max} = \frac{4V_y}{3A}$$

Fluxo de cisalhamento: (página 315)

$$q(x) = \frac{V_yQ_F}{I_z}$$

Carregamento combinado: tração + torção: (página 346)

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{N_x^2}{(d_e^2 - d_i^2)^2} + \frac{64M_x^2d_e^2}{(d_e^4 - d_i^4)^2}}$$

Carregamento combinado: flexão + torção: (página 367)

$$\tau_{\max} = \frac{d_e}{2J}\underbrace{\sqrt{M_f^2 + M_t^2}}_{M_R}$$

Carregamento oblíquo: (página 352)

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{M_y(x)}{I_y}z - \frac{M_z(x)}{I_z}y + \frac{N(x)}{A}$$

Linha neutra: (página 353)

$$\overline{z} = \underbrace{\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}}_{\text{tg }\alpha}\overline{y} - \underbrace{\frac{I_y}{A}\frac{N}{M_y}}_{z_o} \qquad \text{caso } M_y \neq 0 \text{ e } M_z \neq 0.$$

Flambagem de barras. Equação diferencial de viga-coluna: (página 474)

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p(x)}{EI} \text{ onde } \lambda^2 \text{ é definido por } \lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

ou o sistema:

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} + \lambda^2 M_z = p(x) \qquad \text{e} \qquad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z(x)$$

Carga crítica de Euler para flambagem de barra bi-rotulada, e tensão crítica: (pg. 478 e 484)

$$P_{crit} = \frac{4\pi^2}{L^2}EI \quad \text{e } \sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

Carga excêntrica e, deflexão máxima em barra bi-rotulada: (página 486)

$$v_{\max} = e\left[\frac{1}{\cos(\lambda L/2)} - 1\right], \text{ onde } \lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

$\sigma_{\max}$ pela fórmula da secante: (página 488)

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right]$$

Densidade de energia de deformação: (página 513)

$$U_o = \frac{1}{2}\left\{\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right\}$$

Energia de deformação numa barra sob tração, flexão e torção: (páginas 514, 515 e 515)

$$U = \int_0^L \frac{N_x^2}{2EA}\,dx, \;\; U = \int_0^L \frac{1}{2E}\frac{M_z^2}{I_{zz}}\,dx, \;\; U = \frac{1}{2G}\int_{x=0}^L \frac{M_x^2(x)}{J}\,dx$$

Teoremas de Castigliano: (página 521)

$$1^\circ \text{ teorema } \;\; F_k = \frac{\partial U}{\partial u_k} \;\text{ e }\; M_k = \frac{\partial U}{\partial \theta_k}$$

$$2^\circ \text{ teorema } \;\; u_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \;\text{ e }\; \theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k}$$

Método de Elementos Finitos - barras e treliças. Funções de interpolação lineares: (pg. 547)

$$u(\overline{x}) = \overline{u}_1\psi_1(\overline{x}) + \overline{u}_2\psi_2(\overline{x}), \text{ onde } \psi_1(\overline{x}) = 1 - \frac{\overline{x}}{L} \text{ e } \psi_2(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{L}$$

Deformação e tensão no elemento: (página 548)

$$\varepsilon_{xx} = \overline{u}_1 \frac{d\psi_1}{d\overline{x}} + \overline{u}_2 \frac{d\psi_2}{d\overline{x}} \text{ e } \sigma_{xx}(\overline{x}) = E\varepsilon_{xx}(\overline{x})$$

Equilíbrio do elemento no sistema local de coordenadas: (página 551)

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}$$

Matriz de rigidez do elemento sob rotação plana: (página 555)

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cccc} \cos^2\theta & \cos\theta \text{ sen } \theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \text{ sen } \theta \\ \cos\theta \text{ sen } \theta & \text{sen }^2\theta & -\cos\theta \text{ sen } \theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta \text{ sen } \theta & \cos^2\theta & \cos\theta \text{ sen } \theta \\ -\cos\theta \text{ sen } \theta & -\text{sen }^2\theta & \cos\theta \text{ sen } \theta & \text{sen }^2\theta \end{array} \right]$$

Método de Elementos Finitos - vigas e pórticos. Funções de interpolação cúbicas: (pg. 575)

$$\overline{v}\,(\bar{x}) = \phi_1\,(\bar{x})\,\overline{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\overline{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\overline{\theta}_2$$

onde

$$\phi_1(\bar{x}) = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, \qquad \phi_3(\bar{x}) = 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3,$$
$$\phi_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L}\left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L}\right), \qquad \phi_4(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2}.$$

Momento fletor no elemento: (página 576)

$$\frac{M_z(\bar{x})}{EI_{zz}} = \frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2} = \overline{v}_1\left(\frac{12\bar{x}}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) + \overline{\theta}_1\left(-\frac{4}{L} + \frac{6\bar{x}}{L^2}\right) + \overline{v}_2\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12\bar{x}}{L^3}\right) + \overline{\theta}_2\left(\frac{6\bar{x}}{L^2} - \frac{2}{L}\right)$$

Equilíbrio do elemento no sistema local de coordenadas: (página 578)

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{P}_{1y} \\ \overline{M}_{1z} \\ \overline{P}_{2y} \\ \overline{M}_{2z} \end{array} \right\} = \frac{EI_{zz}}{L^3} \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6\ L & -12 & 6\ L \\ 6\ L & 4L^2 & -6\ L & 2L^2 \\ -12 & -6\ L & 12 & -6\ L \\ 6\ L & 2L^2 & -6\ L & 4L^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{array} \right\}, \quad \text{i.e., } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\ \bar{\mathbf{u}}$$

Matriz de rigidez do elemento sob rotação plana: (página 559)

$$\mathbf{K}^e = \left[\begin{array}{cccccc} c^2a + s^2b & sc\,(a-b) & -s\dfrac{6EI}{L^2} & -\left(c^2a + s^2b\right) & sc\,(b-a) & -s\dfrac{6EI}{L^2} \\ sc\,(a-b) & s^2a + c^2b & c\dfrac{6EI}{L^2} & sc\,(b-a) & -\left(s^2a + c^2b\right) & c\dfrac{6EI}{L^2} \\ -s\dfrac{6EI}{L^2} & c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & s\dfrac{6EI}{L^2} & -c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \\ -\left(c^2a + s^2b\right) & sc\,(b-a) & s\dfrac{6EI}{L^2} & c^2a + s^2b & sc\,(a-b) & s\dfrac{6EI}{L^2} \\ sc\,(b-a) & -\left(s^2a + c^2b\right) & -c\dfrac{6EI}{L^2} & sc\,(a-b) & s^2a + c^2b & -c\dfrac{6EI}{L^2} \\ -s\dfrac{6EI}{L^2} & c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & s\dfrac{6EI}{L^2} & -c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

onde $c = \cos\psi$ e $s = \text{sen }\psi$, $a = EA/L$ e $b = 12EI/L^3$, tal que $\mathbf{P} = \mathbf{K}^e\mathbf{u}$.

Capítulo 1

A mecânica dos sólidos na engenharia

1.1 Processo geral de análise mecânica de corpos sólidos

Observe a representação de um corpo de geometria genérica, como mostrado na Figura 1.1. Aqui, como em todo o curso, estamos considerando que o material do corpo encontra-se em estado sólido, i.e., não estamos considerando uma porção de líquido ou gás. Mais que isso, consideramos que este sólido seja de um tipo razoavelmente "rígido", i.e., quando submetido a um conjunto de forças, ele se deforma de maneira limitada, não excessiva, de maneira tal que sua forma e dimensões deformadas são semelhantes àquelas da configuração original. Isso restringe a aplicabilidade das teorias vistas aqui a materiais usuais em engenharia, tais como:

- ▷ Aço, alumínio e metais em geral,
- ▷ Plásticos e madeiras,
- ▷ Concreto, materiais cerâmicos em geral,
- ▷ Fibras de vidro, de kevlar, de carbono etc.

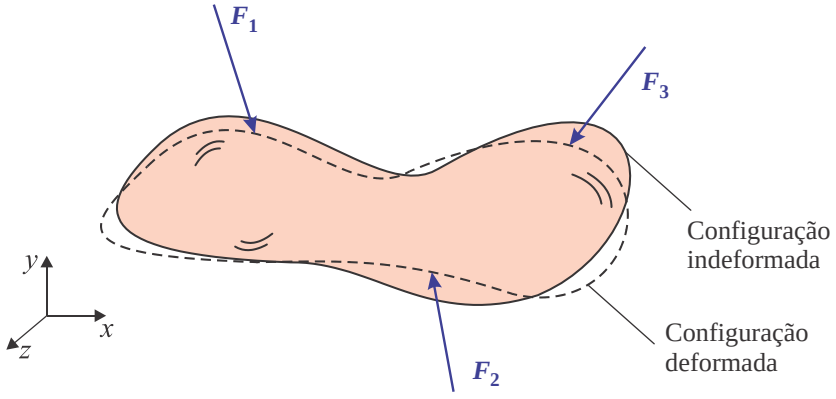


Figura 1.1: Corpo sólido deformável de geometria genérica, sob a ação de um conjunto de forças.

Obviamente, o grau de deformação dependerá do nível do carregamento aplicado e da geometria e dimensões do corpo. Por exemplo, chumbo, cobre, e mesmo aço, podem se deformar como se fossem líquidos, desde que se aplique um carregamento suficientemente grande, ou por longo tempo, ou sejam submetidos a carregamento sob alta temperatura. Situações desse tipo são exploradas em processos de fabricação de peças e componentes de máquinas, conhecidos genericamente como "**processos de conformação**", dentre os quais os mais comuns são a extrusão, o forjamento, a laminação, entre outros. Estudos desses processos de deformação constituem área avançada em cursos de Engenharia Mecânica e não serão considerados no presente texto.

Afirmativa 1: Pequenas deformações. Exceto onde claramente indicado, o presente curso considera apenas as situações em que a rigidez do material, a rigidez do corpo, os apoios e as cargas aplicadas

são tais que as configurações original e deformada são bastante próximos. Essa é a situação conhecida como **"problema de pequenas deformações".**

Embora essa possa parecer uma condição bastante restritiva ao uso da teoria aqui apresentada, devemos observar que "quase" a totalidade das estruturas em engenharia caem dentro dessa situação, i.e.,

- edificação,
- pontes e viadutos,
- peças de motores,
- veículos terrestres e aeronaves e
- máquinas em geral,

devem ser projetadas de forma a ter deformação limitada a valores bastante estreitos. Isso significa que a aplicabilidade da teoria vista é gigantesca, e engloba a quase totalidade das aplicações de engenharia estrutural regulares no mundo. O que foge disso são as aplicações especiais, que envolvem grandes deformações, como

- certos componentes de plástico (atualmente em processo acelerado de expansão),
- cabos e dutos submersos,
- plataformas *offshores*,
- equipamentos de satélite e estações espaciais (como braços e suportes de antenas e coletores solares),
- balões atmosféricos dentre outros.

A análise do comportamento mecânico de um corpo, no âmbito da teoria sendo apresentada neste curso, é tradicionalmente referido como **Teoria de Resistência dos Materiais**. Essa teoria é parte de uma teoria geral denominada **Teoria de Mecânica dos Sólidos** que, junto à **Mecânica dos Fluidos**, compõem a **Teoria da Mecânica do Contínuo**. A resistência dos materiais envolve a determinação de todo um conjunto de entidades físicas que tem representação matemática, quais sejam:

1. forças externas aplicadas,
2. reações,
3. esforços,
4. tensões,
5. deformação e
6. deslocamentos.

As definições desseas entidades são ainda desconhecidas pelo aluno nesse ponto, e serão justamente objeto de estudo ao longo de todo o livro. No momento, é suficiente que o leitor admita a existência desses entidades, principalmente a existência de algo chamado **tensão**. De forma sintética e bastante grosseira, pode-se dizer que tensão **é um parâmetro que quantifica o grau de solicitação mecânica, o nível de força a que cada partícula de material está submetida, como consequência do carregamento externo aplicado na superfície do corpo.** Sem dúvida que cada material suporta forças (e tensões), somente até um certo nível, i.e., intuitivamente sabemos

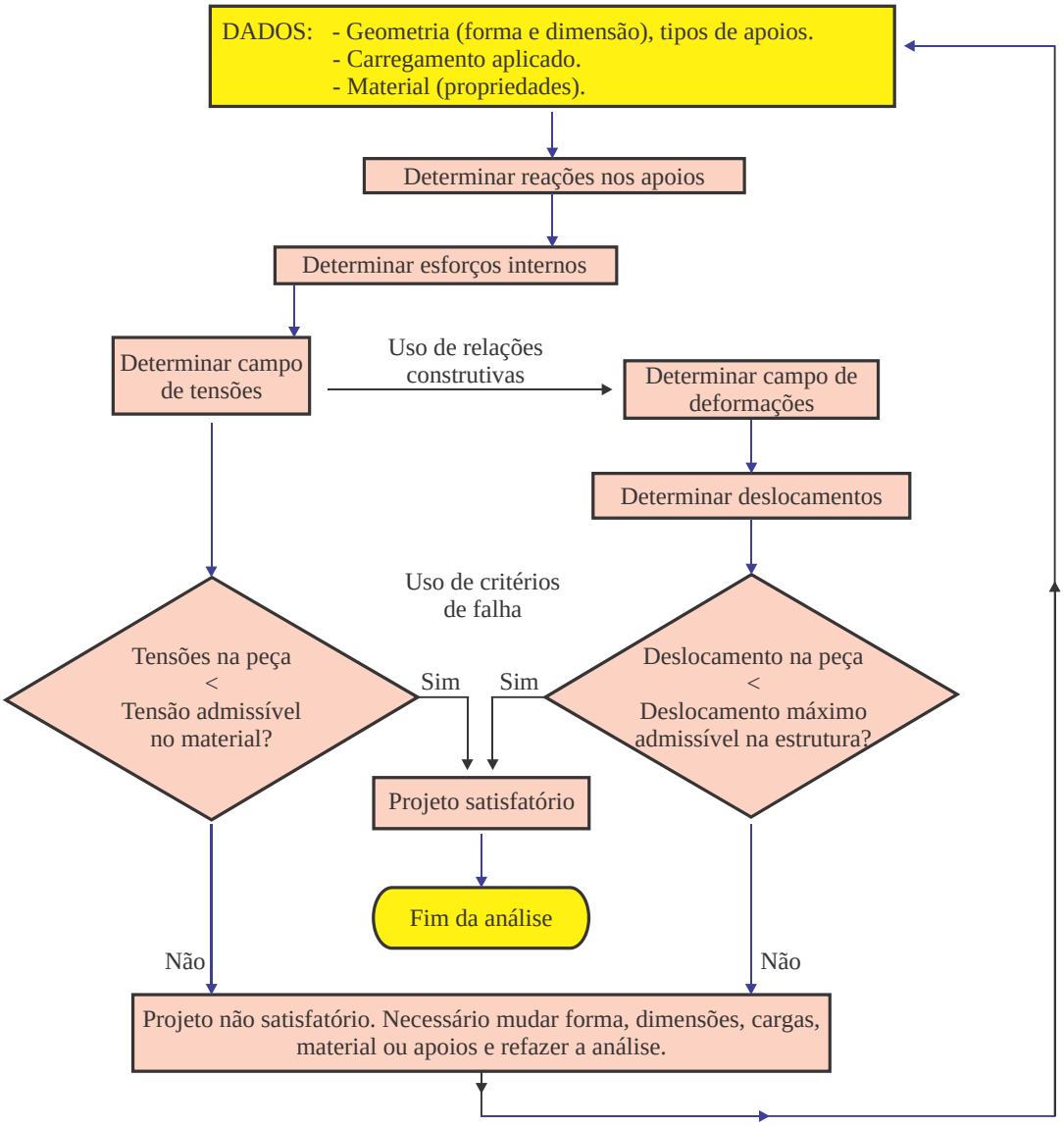


Figura 1.2: Fluxograma geral simplificado do processo de análise de comportamento mecânico de um componente em situações isostáticas.

que cada material tem um certo valor de "**tensão máxima admissível**", que ele pode suportar sem sofrer alguma falha.

O fluxograma mostrado na Figura 1.2 ilustra um esquema aproximativo de análise mecânica de um componente mecânico. O objetivo do curso é o de detalhar este procedimento até um certo ponto. Conforme os fenômenos físicos atuantes no componente se tornam mais complexos, o procedimento geral pode assumir variações, mas a estrutura básica de análise permanece semelhante.

De fato, duas grandes linhas de operação são realizadas em mecânica estrutural, geralmente denominadas **ANÁLISE** e **PROJETO**, como diagramados na Figura 1.3. Cada operação se refere a uma situação própria. Tomemos primeiramente a **análise de segurança.** Considere que se tenha já um projeto montado, com todas as formas e dimensões dadas, material escolhido e propriedades conhecidas (não precisamos saber como foram obtidas, sabemos apenas que eles são dados). Um caso bastante comum que cai nessa situação é quando a peça ou estrutura já existe, já foi construída (por exemplo, uma **torre de transmissão** de energia elétrica, uma **ponte**, um **viaduto**, um **bloco de motor**, um **chassi** de caminhão). Esse componente ou sistema, supostamente, foi construído para funcionar bem sob uma certa situação, um certo conjunto de cargas, com certos valores. A questão que frequentemente se apresenta é a seguinte: **essa estrutura é segura sob este novo conjunto de carregamentos? Qual seria o nível de segurança? Qual seria o comportamento?**

Quais as tensões, e os deslocamentos? Essa é a questão fundamental no processo de análise de um componente ou sistema mecânico.

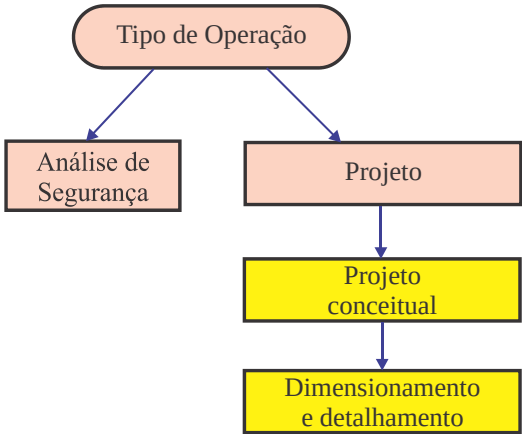


Figura 1.3: Tipos de operação em mecânica dos sólidos.

A segunda operação básica, o **projeto**, atende à situação reversa. A pergunta é: **qual a forma, as dimensões e o material necessários tal que um certo carregamento seja suportado com segurança?** De fato, a operação de projeto pode assumir formas bastante diversas dependendo da situação. Em algumas situações a forma do componente é basicamente conhecida. Por exemplo, um poste de cimento para transmissão de energia elétrica tem uma forma básica mandatória e óbvia: tem que ser um objeto longo e com seção transversal pequena. Seu uso já obriga o uso dessa forma. Não poderia ter a forma de uma esfera, ou de um disco por exemplo. Então, o processo de projeto envolve "apenas" as seguintes decisões:

1. definir a **forma** de sua seção transversal, que poderia ser por exemplo circular, em I ou em □, e

2. se será uma seção vazada ou maciça, e ainda

3. se a seção será uniforme ou não, i.e., se a forma será cilíndrica ou cônica.

Após isso, resta a operação de efetivamente **calcular** as dimensões necessárias da seção transversal para que ele suporte as cargas com segurança. Esse é o chamado **processo de dimensionamento**. Esse é o grande desafio, uma vez que aqui o engenheiro terá, por vezes, que lançar mão de todo o cabedal de técnicas e conhecimentos de matemática, de engenharia estrutural e de mecânica dos sólidos para simular o comportamento do componente.

Uma segunda situação em projeto ocorre quando o engenheiro se depara apenas com uma certa **necessidade a ser atendida e um conjunto de restrições,** e deve primeiramente "bolar" uma configuração geral para a estrutura antes de proceder ao dimensionamento de suas partes. Por exemplo considere, o projeto estrutural de um caminhão.

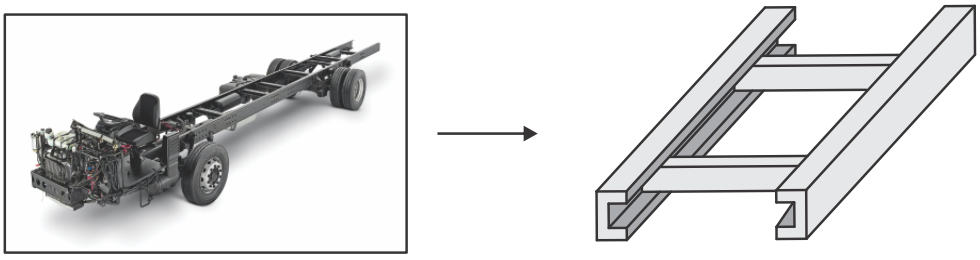


Figura 1.4: Foto da estrutura típica de um caminhão, e à direita, um esboço do chassi.

Sabe-se que são necessárias basicamente rodas, eixos e uma carroceria para carregar a carga. Para que ambos se movam é necessário um motor e acessórios mais ou menos importantes, embora quase todos essenciais. Onde acoplar todos esses itens? A resposta histórica é: num **chassi**, i.e., uma estrutura base, onde tudo é montado. Também historicamente, o chassi é composto de duas vigas com seção em formato ⊏, em paralelo, como ilustrado na Figura 1.4. Se o engenheiro se deparar com a necessidade de realizar um projeto e a equipe (que pode ser ele apenas) concluir que o chassi será um par de vigas ⊏, o processo de projeto consistirá basicamente no processo de dimensionamento, i.e., determinar os valores dos lados do perfil e a espessura, além do comprimento e distância entre as vigas, a seção e o espaçamento entre as vigas transversais, além de outros detalhes, usando as ferramentas de mecânica dos sólidos, mecânica da fratura e fadiga e dinâmica de estruturas. Por outro lado, por diversas razões, pode se tornar aceitável a ideia de buscar uma outra concepção básica para o chassi. Por que baseando em vigas? Por que não numa placa, ou numa caixa? Ou consistente com a carroceria como nos automóveis? De qualquer forma, aqui se trata do chamado processo de **projeto conceitual** em que se busca primeiramente uma definição da forma geométrica que melhor atenda

1. às demandas previstas de uso,
2. características de mercado,
3. processo de fabricação e
4. custos.

A etapa seguinte é então a realização do dimensionamento da estrutura.

Observe que a teoria descrita nesse texto tem aplicabilidade idêntica em análise e projeto de qualquer estrutura, o que significa que se sobrepõe às divisões tradicionais de engenharia, i.e., aplica-se tanto a estruturas e componentes mecânicos quanto estruturas de construção civil. Por exemplo, o fundamento que permite o dimensionamento de uma viga de aço ou de concreto armado num edifício é o mesmo que permite o dimensionamento de um eixo de uma caixa de câmbio. Os materiais e as condições de uso são distintos, o que implica nas especificidades de cada engenharia, porém o fundamento, conforme visto neste curso, é o mesmo.

Voltando agora à discussão sobre os tipos de projeto, conceitual e de dimensionamento, observamos, por exemplo, que na engenharia civil a etapa conceitual pode assumir um papel quase rotineiro, quando se considera que o projeto arquitetônico define todos os aspectos de estética (ou falta de), de estilo, de funcionalidade (ou falta de) da estrutura. Já em componentes mecânicos, a realização ou não da etapa de projeto conceitual, tanto quanto daquela de dimensionamento, depende grandemente do nível de atividade e de competividade da economia em que a empresa se insere. Economias protegidas ou estagnadas, ou tecnológica e cientificamente atrasadas, tendem a simplesmente não projetar, mas a copiar ou a efetuar pequenas alterações em projetos já existentes, (i.e., a etapa de projeto conceitual não é realizada, e até mesmo a de dimensionamento frequentemente também não o é). Conforme a economia e a tecnologia se desenvolvem surge a necessidade de projetos, de obter soluções novas, mais eficientes, de inventar modelos, peças e sistemas que atendam melhor às demandas da sociedade local ou definem uma maior competitividade no mercado.

1.2 Tipos de componentes estruturais

O tipo mais comum de componente estrutural é a **viga**. A Figura 1.5 ilusta dois tipos especiais de vigas. As **vigas compostas**, constituidas por barras, como na figura à esquerda, e as "**vigas-caixão**", como na figura da direita, em que a viga é constituída por placas, no caso metálicas, soldadas ou arrebitadas entre si. Em ambos os casos, so pode conseguir construir vigas de grandes dimensões, tanto em comprimento quanto em seção transversal, muito além do que se poderia obter pela produção direta de perfis estruturais por extrusão. Entretanto, em muitas situações, a viga é um componente de geometria simples, reta, de seção uniforme, sujeita a carregamentos transversais que causam flexão, além de, eventualmente, suportar também carregamento torcional e axial.

Figura 1.5: Tipos de vigas de grande porte: as vigas compostas (à esquerda), e as "vigas-caixão" (à direita). (Detalhe da Ponte Hercíclio Luz em Florianópolis. Fotos pelo autor.)

Embora todas as peças e componentes estruturais que se possa construir sejam, obviamente, corpos tridimensionais e frequentemente de formato complexo, os processos de cálculo buscam decompor a estrutura em partes geometricamente mais simples e, caso possível, busca-se adotar uma forma idealizada que permita uma estimativa aproximada do comportamento da peça real a partir de cálculos simples associados a um modelo também simples da peça real.

Assim surge o conceito de **componente estrutural básico**, alguns deles ilustrados nas Figuras 1.6 e 1.7. Na primeira figura temos **idealização geométricas** de estruturas típicas em engenharia. Assim, corpos longos e retos, onde uma das dimensões (comprimento) é muito maior que as demais dimensões (seção transversal) é modelado por uma formulação que o considera um segmento de linha reta. Em geral a denominação do modelo dependerá também do tipo de carregamento aplicado.

- **Barra** - Na chamada barra, o carregamento é coaxial, tanto quanto as deformações,
- **Viga** - se caracteriza por sofrer flexão, i.e., apresenta deslocamentos transversais à sua linha axial. Isto é ilustrado nas Figuras 1.7a e 1.7b.
- **Barra sob torção** - O mesmo componente em forma de viga, pode ainda ser "torcido", como na Figura 1.7c, de forma a desenvolver campos de deformação próprios.
- **Arco** - na Figuras 1.6 se nota o **arco**, que pode ser imaginado geometricamente como uma "viga curva". Geralmente o arco encontra-se sob ação de carregamento transversal, o que resulta em deslocamentos transversais (comportamento de **flexão**) ou coplanares (comportamento de **membrana**), como ilustrado nas Figuras 1.7h e (i).

Note que diversos desses comportamentos serão objeto de estudo detalhado ao longo dos diversos capítulos do presente livro, enquanto outros, como placas e cascas de geometria arbitrária, são assunto de cursos avançados.

- **Placa** - A placa é um componente plano, com espessura h muito menor que os lados (tipicamente $L/h > 50$), onde o contorno da superfície pode ter qualquer formato (não apenas retangular como na figura). O carregamento pode gerar deformação apenas coplanares (chamadas de **membrana**), ou causar **flexão**. Tipicamente denomina-se placa o componente plano delgado que sofre flexão. A Figura 1.8 ilustra uma aplicação típica de placa, em que o piso de uma ponte rodoviaria é constituído por grelhas retangulares simplesmente apoiadas nas bordas por vigas longitudinais e transversais.

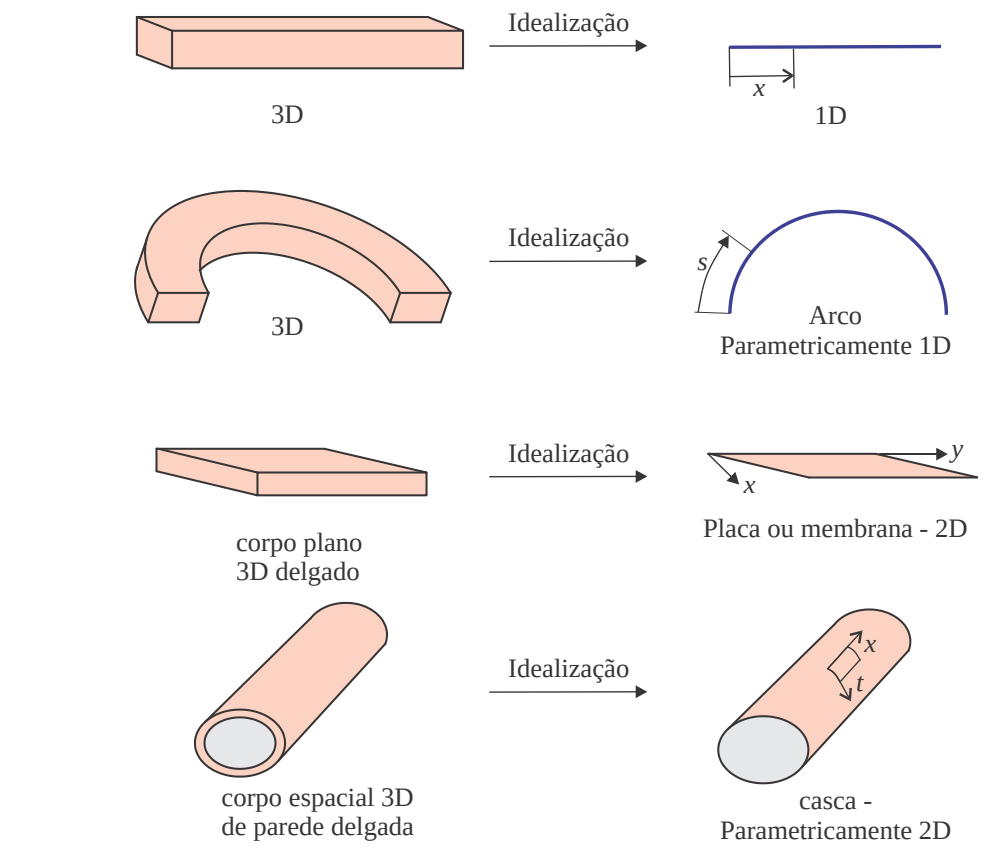


Figura 1.6: Tipos de idealização geométrica de estruturas típicas.

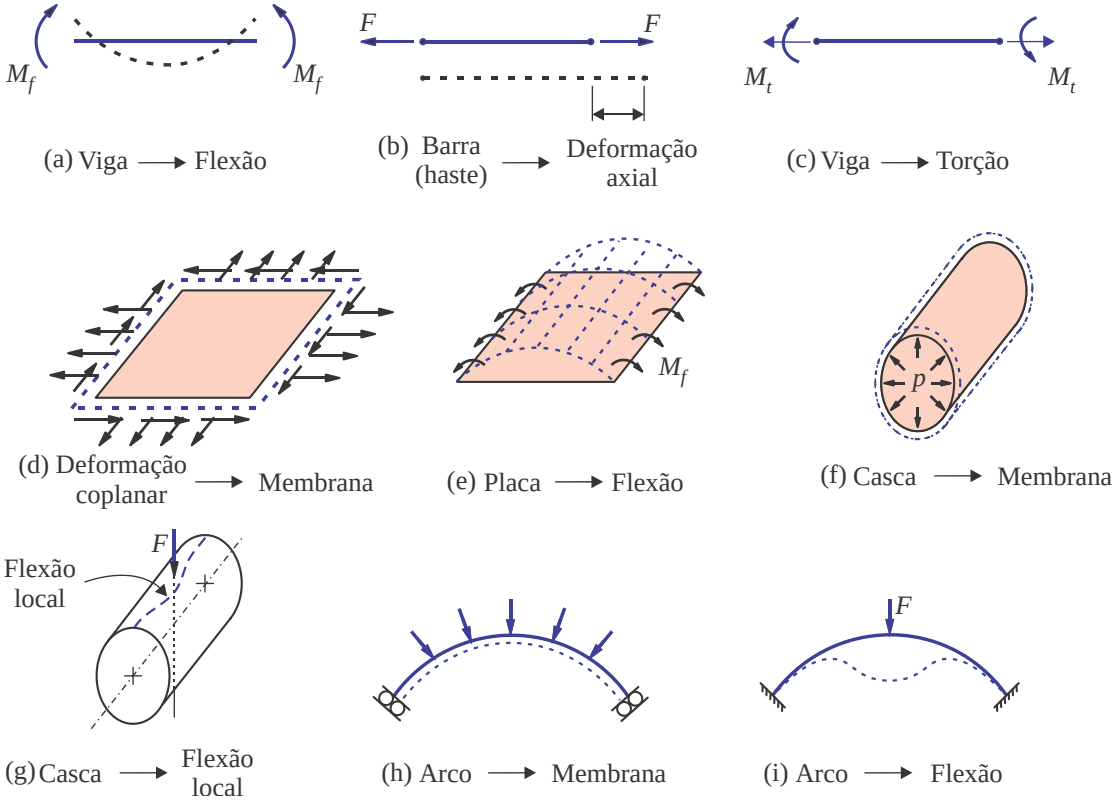


Figura 1.7: Componentes estruturais básicos. M_f e M_t são momentos fletor e forçar, F é força e p pressão interna.

- **Casca** - Finalmente, as cascas, podem ser vistas, geometricamente, como "placas curvas", ou reversamente, pode-se pensar numa casca como uma superfície geométrica que se desenvolve num espaço tridimensional, de forma que em cada ponto dessa superfície existe um certo valor de espessura. As formas possíveis que uma casca pode assumir são obviamente infinitas, porém as formas construtivas mais utilizadas em engenharia são **cilindros**, **esferas**, **cones**, **elipsoides**, **toroides**, e **paraboloides**, por exemplo. Frequentemente são usadas partes das formas acima, i.e., setores de cilindro, hemi-esferas, calotas esféricas, tronco-cones, hemi-elipsoides etc. Também são usadas montagens de duas ou mais formas. Por exemplo, um **tanque de armazenamento** de líquido é feito por um segmento cilíndrico e uma base (o fundo) constituído por uma placa plana. Um **vaso de pressão** (reservatório de gases pressurizados), pode ser construído por um segmento cilíndrico com tampas constituídas por calotas esféricas (não muito usado) ou por calotas elípticas.

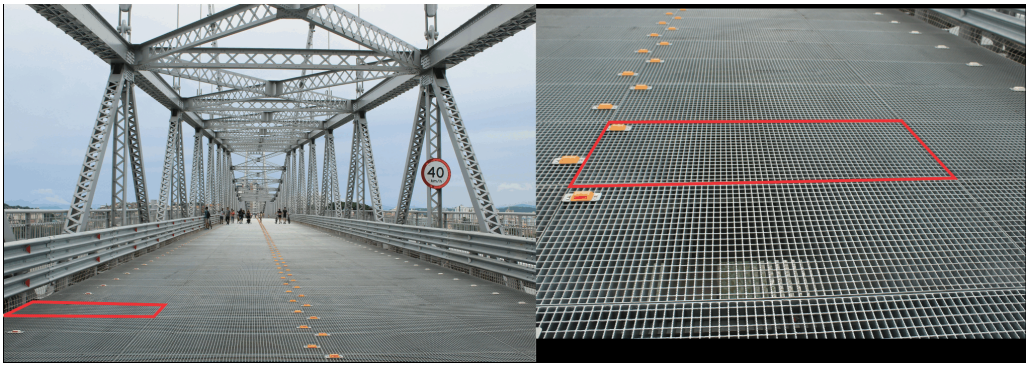


Figura 1.8: Placa constituida por uma grelha ortotrópica aberta usada no pavimento da Ponte Hercíclio Luz em Florianópolis. A região retangular demarcada indica uma placa individual, que é mostrada no detalhe à direita.

Outra observação geral importante é quanto aos **materias** possíveis de serem utilizados nos componentes. Apesar dos exemplos mostrados serem de aço, desde as últimas décadas uma variedade bastante ampla de materiais tem sido utilizados, além dos metais (aluminio, titânio, cobre...), os polímeros (PVC, polipropileno, nylon,...), a tradicional madeira, e a grande classe dos materiais compostos modernos, principalmente os constituídos por polímeros (epóxi, poliester,...) reforçados por fibras de alto desempenho (vidro, carbono, kevlar, boro,...).

Capítulo 2

Esforços internos

Neste capítulo apresentamos uma revisão rápida dos procedimentos de determinação de reações de apoios em estruturas isostáticas, e determinação de esforços em vigas e barras, isto e, esforços cortante, normal, de momento fletor e de momento torçor. Nos demais capítulos, supõe-se que o leitor tenha tido um curso de **estática dos corpos rígidos** onde este assunto tenha sido visto em detalhes. Entretanto, caso seja detectada uma deficiência nesse conteúdo, torna-se recomendável sua revisão no presente capítulo antes de entrar no conteúdo de mecânica dos sólidos. Sem dúvida que a inclusão desse capítulo fica a critério do leitor ou do professor da disciplina.

2.1 Equilíbrio de um corpo e reações de apoio

Ao longo de todo esse curso consideraremos apenas corpos sólidos em **equilíbrio estático**, corpos que estão **imóveis** e em **equilíbrio**. A condição de equilíbrio é no sentido da **segunda lei de newton** que, quando aplicada a um corpo genérico como o da Figura 2.1 indica que ele estará em equilíbrio se as forças externas aplicadas sobre ele forem tais que as forças e momentos resultantes sejam nulas:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{F}_n = \mathbf{0}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{m=1}^{M} \mathbf{M}_m^P = \mathbf{0}, \qquad \text{onde} \qquad \mathbf{M}_m^P = \mathbf{r}_m \times \mathbf{F}_m. \tag{2.1}$$

Os momentos $\mathbf{M}_m^P$ podem ser calculados em relação a qualquer ponto $\mathbf{P}$. Basta que $\mathbf{r}_m$ seja o vetor que une $\mathbf{P}$ até o ponto de aplicação da força.

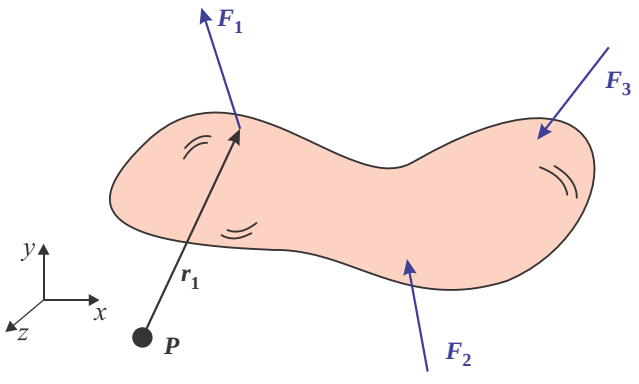


Figura 2.1: Corpo sólido de forma genérica, sob a ação de um conjunto de forças.

Em coordenadas cartesianas temos que cada vetor é escrito como

$$\mathbf{F}_n = F_{nx}\mathbf{i} + F_{ny}\mathbf{j} + F_{nz}\mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_n = M_{nx}\mathbf{i} + M_{ny}\mathbf{j} + M_{nz}\mathbf{k}.$$

Os índices x, y e z indicam os eixos cartesianos e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são os vetores

unitários ao longo dos eixos x, y e z. Como todos os vetores são definidos pela mesma base de vetores unitários, pode-se representar cada vetor apenas pelas suas componentes:

$$\mathbf{F}_n = \{F_{nx}; F_{ny}; F_{nz}\} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_n = \{M_{nx}; M_{ny}; M_{nz}\}\,. \tag{2.2}$$

As duas equações vetoriais de equilíbrio (2.1) correspondem a 6 equações algébricas em termos dos componentes cartesianas, i.e.,

$$\text{Equilíbrio de forças} \begin{cases} \sum_{n=0}^{N} F_{xn} = 0, \\ \sum_{n=0}^{N} F_{yn} = 0, \\ \sum_{n=0}^{N} F_{zn} = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{equilíbrio de momentos} \begin{cases} \sum_{m=0} M_{xm} = 0, \\ \sum_{m=0} M_{ym} = 0, \\ \sum_{m=0} M_{zm} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Reações nos apoios

Componentes estruturais encontram-se sempre vinculados a outros componentes ou a uma base fixa[1]. Nessa situação temos um problema como na Figura 2.2. Ali observa-se que apenas parte das forças que atuam no corpo são a priori conhecidas. Mas existem outras forças que são reações nos apoios às forças conhecidas, necessárias para garantir o equilíbrio do corpo. Se incluirmos todas as forças aplicadas, conhecidas e reativas, a condição de equilíbrio (2.3) toma a forma:

$$\begin{cases} \sum_n F_{xn} + \sum_j R_{xj} = 0, \\ \sum_n F_{yn} + \sum_j R_{yj} = 0, \\ \sum_n F_{zn} + \sum_j R_{zj} = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sum_s M_{xs} + \sum_k R^k_{mx} = 0, \\ \sum_s M_{ys} + \sum_k R^k_{my} = 0, \\ \sum_s M_{zs} + \sum_k R^k_{mz} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

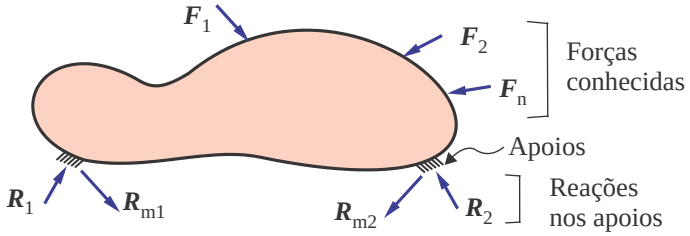


Figura 2.2: Forças conhecidas e reações de apoios num corpo vinculado.

Um problema de equilíbrio é dito **isostático** se o número de componentes de reações incógnitas não-nulas é igual ao número de equações de equilíbrio **não triviais** disponíveis no problema. (Uma equação é dita **trivial** se é do tipo $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$). Por exemplo, pode acontecer de não haver nenhuma força aplicada numa dada direção, por exemplo, direção x. Nesse caso a primeira das equações (2.4) é trivial. Assim restam apenas 5 equações não triviais, que permitem determinar 5 reações incógnitas.

Caso o corpo seja vinculado de tal forma que o **número de componentes de reações incógnitas** r seja maior que o número de equações de **equilíbrio não triviais**, o problema é dito **hiperestático** (também chamado **estaticamente determinado**). O número de graus de **hiperestaticidade** h é

[1] Existem muitas exceções notáveis, como os casos de corpos flutuando no espaço ou na água ou em queda livre.

$$h = r - e,$$

i.e.,

$$\boxed{\text{Número de graus de hiperestaticidade}} = \boxed{\text{número de reações incógnitas}} - \boxed{\text{número de equações de equilíbrio não triviais}} \tag{2.5}$$

Ao longo deste capítulo nos concentramos em problemas isostáticos. Problemas hiperestáticos exigem que as equações de equilíbrio sejam suplementadas por outras equações, associadas aos deslocamentos, que serão vistos nos demais capítulos.

2.1.1 Tipos de apoios em vigas

Uma vez que este é um texto introdutório, quase todo ele se concentrará em barras e vigas, enquanto a análise dos demais tipos de componentes, como placas e cascas, são deixadas para cursos avançados.

A Figura 2.3 mostra uma estrutura típica de viaduto de concreto armado, constituido por vigas longitudinais **simplesemnte apoiadas** sobre vigas transversais, que são engastadas nas colunas. Nota-se que o apoio simples entre as vigas longitudinais e a viga transversal é constituído por roletes, que permitem a rotulação local da viga longitudinal devido à sua flexão, e também permite o deslocamento axial da viga longitudinal proveniente de dilatações térmicas. A coluna é considerada **engastada** nas fundações, e deve resistir aos esforços colineares devido à carga vertical aplicada, e também deve resistir aos momentos fletores devidos às vibracões na estrutura. Outra forma de engaste é o tipo soldado em partes metálicas, como a junta da coluna à base mostrada na foto da Figura 2.4.

Figura 2.3: Foto de estrutura típica de viaduto de concreto armado, constituido por vigas longitudinais **simplesemnte apoiadas** sobre vigas transversais, que são engastadas em colunas.

A Figura 2.5 ilustra um eixo de redutor velocidade, mostrando um rolamento radial na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. O redutor de velocidades é um conjunto de diversos dessas árvores, em que cada par possui um acoplamento através de um par de engrenagens. Pelo acoplamento são transmitidas forças entre o par de dentes em contato, e essas forças atuam em ambos os eixos, gerando neles efeitos de torção e de flexão e deformação axial.

A Figura 2.6 mostra um eixo escalonado típico em redutores de velocidade (não correspondente à árvore da Figura 2.5, mas apenas ilustrativo). Em cada escalonamento, um elemento é montado, quer seja uma polia, uma engrenagem ou um rolamento.

Figura 2.4: Detalhe de junta soldada de uma coluna em forma de chapa estreita, em uma base horizontal.

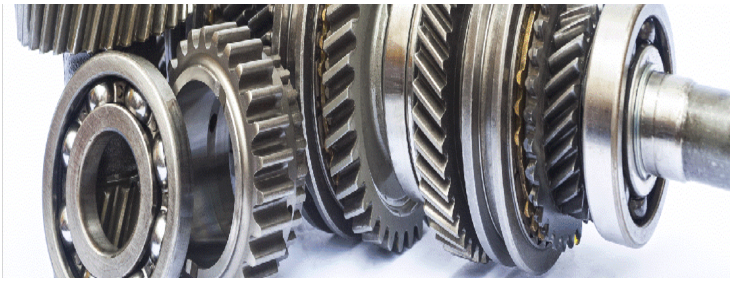


Figura 2.5: Foto de eixo de redutor de velocidade, mostrando rolamento (na extremidade direita), e diversas engrenagens helicoidais.

Representações simbólicas dos apoios

Nas atividades de cálculo em engenharia, é mais prático usar representações estilizadas dos componentes estruturais e dos seus apoios e carregamentos. Esses são os chamados modelos de engenharia, i.e., as representações aproximadas dos componentes reais. A Figura 2.7 ilustra as representações de algumas das formas construtivas mais comuns de **vinculação (apoios)** em barras e vigas, tanto em componentes de construção civil quanto em maquinas.

- **Apoio simples**, que é representado simbolicamente na Figura 2.7a. Esse tipo de apoio permite o deslocamento relativo da seção A da viga em relação à base, ao longo da direção axial x. Então, qualquer força resultante na viga na direção x não poderá ser sustentada por esse apoio. A consequência é que a reação axial oferecida pelo apoio é nula, i.e., $R_x = 0$. Uma segunda característica do apoio simples é que ele é rotulado no plano, de forma que permite a rotação da seção A da viga em torno do apoio. A consequência é que o apoio não oferece reação de momento na direção z, i.e., $R_{mz} = 0$. Assim, a única reação que o apoio é capaz de

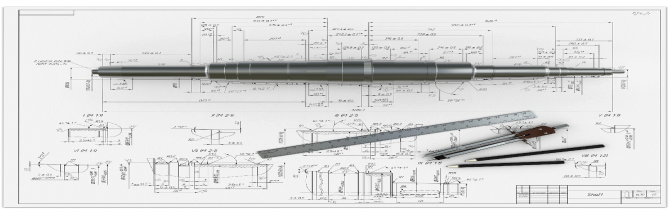


Figura 2.6: Foto de um eixo escalonado típico em redutores de velocidade.

oferecer às forças aplicadas na viga é R_y.

– Observe o símbolo que utilizaremos para o apoio simples: o triângulo, para representar a rótula, e o carro de rodizio para representar a possibilidade de deslizamento axial.

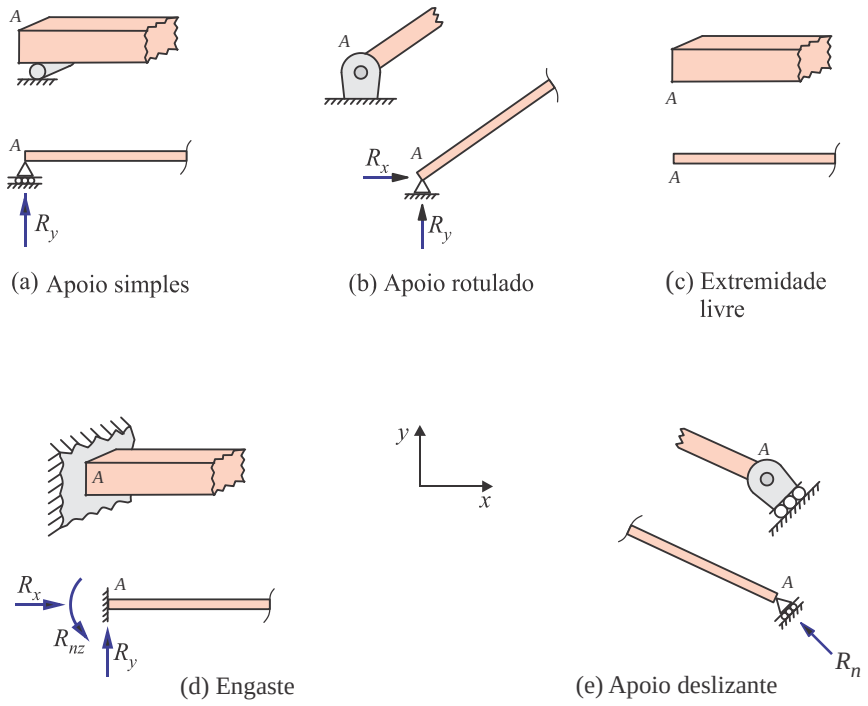


Figura 2.7: Tipos mais comuns de apoios numa viga, e sua representação esquemática.

- **Apoio rotulado**, ilustrado na Figura 2.7d. O ponto A da viga é permitido rotacionar em torno do eixo z, porém qualquer movimento de translação no plano xy é impedido. Logo, o apoio não oferece reação de momento na direção z, i.e., $R_{mz} = 0$. Uma vez que o apoio impede movimentos de translação, ele oferece reação de força, com componentes incógnitas R_x e R_y.

  – Observe o símbolo que utilizaremos para o apoio simples: o triângulo, para representar a rótula, que é fixado diretamente na base, para dar a ideia que ele não pode se mover em translação ao longo de x.

- O **engaste** é ilustrado na Figura 2.7b. Ele ocorre, por exemplo, em uma junção soldada a uma base fixa, em caso de peças de aço, ou uma barra de concreto armado fixado em uma fundação considerada, até certo ponto, como um elemento fixo, absolutamente indeformavel. A junção engaste impede completamente qualquer movimento relativo entre a seção A da viga e a base, tanto movimentos translacionais quanto rotacionais. Caso as forças aplicadas à estrutura possuam resultante não nulas de força e de momento, o engaste impede o movimento relativo aplicando forças e momentos que equilibrem toda o parte da força resultante da estrutura. Decompondo as reações em componentes cartesianas, o engaste pode oferecer até 6 reações não nulas: as três componentes de reação de força, R_x, R_y, R_z, e as três componentes de reação de momento, R_{mx}, R_{my} e R_{mz}.

  – Note-se que, embora o apoio possa oferecer essas 6 componentes de reação, não necessariamente todas elas serão não nulas em todos os problemas. Por exemplo, se nenhuma força for aplicada na estrutura na direção x, claramente o apoio não será solicitado nessa direção, e se terá $R_x = 0$.

- **Extremidade livre**, que é ilustrado na Figura 2.7c. É a situação em que uma das extremidades da viga, como a seção A mostrada, esteja completamente desvinculada de qualquer apoio. Nesse caso, o ponto A da viga é livre para sofrer qualquer tipo de deslocamento ou rotação. Como consequência, todas as reações de força e de momento são nulas. Em componentes cartesianas se tem que: $R_x = R_y = R_z = 0$ e $R_{mx} = R_{my} = R_{mz} = 0$.

- **Apoio rotulado** em um ou dois planos. O caso ilustrado na Figura 2.7e é mais comum num mecanismo, onde a extremidade A da viga é permitida apenas a rotação em torno de z e é permitido deslocamento ao longo da guia, que pode possuir uma inclinação no plano xy. Então o apoio não pode oferecer reação de momento em torno de z, i.e., $R_{mz} = 0$, e nem reação de força ao longo da guia, i.e., $R_t = 0$, onde t é a direção tangencial à guia inclinada. As reações que o apoio é capaz de oferecer são momentos R_{mx} e R_{my} e uma reação de força na direção normal (perpendicular) à guia, R_n.

Exemplo 2.1 – Cálculo de reações

Determine as reações nos apoios da estrutura mostrada na Figura 2.8. A estrutura é plana e a força F está contida no mesmo plano. O ângulo na seção C é reto.

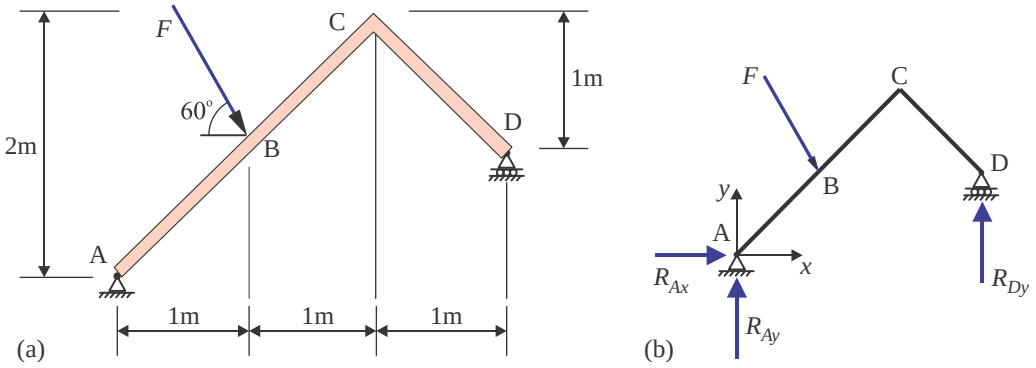


Figura 2.8: (a) Dados do Exemplo 1 e (b) diagrama de corpo livre com indicação das reações nos apoios.

Solução:

A solução do problema pode ser organizada em etapas bastante bem definidas como visto a seguir.

- **Etapa 1**: Definir um sistema de coordenadas. Neste problema colocamos a origem no apoio A, e posicionamos os eixos cartesianos $0xyz$ como na Figura 2.8b, de tal forma que a estrutura fica contida no plano xy.

- **Etapa 2**: Analisar os apoios, identificando as reações não nulas em cada um deles. No presente caso, como a estrutura e o carregamento estão contidos no plano xy, as únicas reações de força não nulas também estão contidas no plano xy. São então três as reações: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Dy}.

- **Etapa 3**: Verificar o grau de hiperestaticidade do problema. Usando a equação (2.5), considerando equações de equilíbrio não triviais $e = 3$ e o número de reações $r = 3$. Então,

$$\begin{aligned} h &= r - e, \\ &= 3 - 3 = 0, \end{aligned}$$

o que significa que temos um problema isostático. Logo, o problema pode ser resolvido usando apenas as equações globais de equilíbrio.

Etapa 4: Escrever as equações de equilíbrio não triviais, que são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\longrightarrow R_{Ax} + F\cos 60^o = 0, \\ \sum F_y &\longrightarrow R_{Ay} + R_{Dy} - F \text{ sen } 60^o = 0, \\ \sum M_z^A &\longrightarrow F\cos 60^o(1) + F \text{ sen } 60^o(1) - R_{Dy}(3) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A notação M_z^A indica momentos na direção z,calculados em relação a um eixo paralelo a z que passa pela seção A.

As demais equações de equilíbrio também poderiam ser escritas, mas seriam triviais:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \longrightarrow 0 = 0, \\ \sum M_x &= 0 \longrightarrow 0 = 0, \\ \sum M_y &= 0 \longrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Observação 1: Note que, nas equações (2.6), não é necessário que as forças e momentos nas direções positivas dos eixos cartesianos tenham que aparecer nas equações de equilíbrio com sinal positivo. Isso ocorre porque cada equação é igualada a zero, o que significa que cada equação pode ter todos os seus termos, a esquerda e a direita, multiplicados por (-1), sem que a solução do sistema seja alterada. (2.7)

Então, é requerido apenas que seja estabelecida, arbitrariamente, uma **convenção** do sentido que se deseja que as forças (ou momentos) de cada equação sejam representadas como positivas e, automaticamente, o sentido contrário será negativo. Por exemplo, na equação equilíbrio de forças na direção x em $(2.6)_1$, consideramos as **forças para a direita como positivas**, e as forças para a esquerda como negativas. Entretanto, poderíamos ter convencionado o contrario, representado a equação na forma:

$$\sum F_x \longrightarrow \quad -R_{Ax} - F\cos 60^o = 0, \tag{2.8}$$

que corresponde à convenção que as **forças para a esquerda sejam positivas**.

- **Etapa 5**: Resolver o sistema de equações. No caso, a solução é:

$$R_{Dy} = \frac{1+\sqrt{3}}{6}F, \qquad R_{Ax} = -\frac{F}{2} \qquad \text{e} \qquad R_{Ay} = \frac{F}{6}(2\sqrt{3}-1). \tag{2.9}$$

Observação 2: O esquema mostrado na Figura 2.8b é conhecido como **diagrama de corpo livre** do problema.

Nesse diagrama se deve fazer a representação de todos os aspectos necessários para a análise do problema. Então ele deve conter as seguintes representações:

1. Visualização da **geometria** do problema, com suas dimensões,
2. definição dos **eixos coordenados** cartesianos,
3. indicam-se os **apoios**,

4. as **forças externas conhecidas**, e

5. as **reações incógnitas** nos apoios.

> **O diagrama de corpo livre**, com todos os seus aspectos, **é essencial** para que o equacionamento realizado a seguir possa ter significado.

Para entender isso, deve-se observar que, de fato, as equações (2.6) e (2.9) seriam incompreensíveis se não fossem acompanhadas pelo diagrama de corpo livre. Por exemplo, o que significaria a expressão $R_{Ax} = -F/2$, se não se soubesse o que é R_{Ax} (uma reação), e não se soubesse para onde aponta x, e o que é A? Mais grave ainda, é que não se saberia o que significa o sinal "$-$". Pelo diagrama de corpo livre que definimos para o problema, arbitramos que reações em A no sentido positivo de x seriam positivas. Logo, a partir dos resultados, $R_{Ax} = -F/2$, sabemos que a reação se orienta, de fato, no sentido negativo de x. Ocorre que também poderíamos ter iniciado a solução do problema arbitrando que R_{Ax} seria positivo se estivesse orientado no sentido negativo de x, como na Figura 2.9. Nesse caso, a solução do problema em (2.9) teria produzido $R_{Ax} = +F/2$.

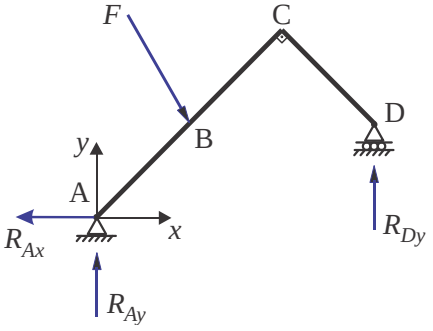


Figura 2.9: Reação R_{Ax} convencionada como positiva no sentido negativo de x.

2.2 Esforços internos em barras e vigas

Consideremos um corpo de formato genérico submetido a forças externas conhecidas e também à reações nos apoios. Para melhor visualização usaremos o caso ilustrado na Figura 2.10a, em que o corpo tem apenas dois apoios, A e B, e apenas uma força aplicada F. Também por simplicidade, consideremos que as reações sejam paralelas, iguais a $F/2$ como ilustrado. Consideremos adicionalmente que o corpo esteja em equilíbrio, de forma que F, R_A e R_B se equilibram.

Agora consideremos **o que ocorre com o material dentro do corpo**. Quando observamos o corpo na Figura 2.10a vemos que, de alguma forma, a força F aplicada no ponto C foi "sentida" no ponto A, i.e., uma pessoa realmente sustentando o corpo no ponto A teria que aplicar ali uma força igual à $F/2$ para manter o corpo em equilíbrio. Isto significa que a força F, de alguma forma, foi "transmitida", através do material, de C até A. Para entendermos como essa transmissão pode ter ocorrido, devemos lembrar que o sólido é constituído por uma estrutura molecular. As moléculas, tanto quanto os átomos, mantem uma certa distância uns dos outros, vibrando em torno de uma posição média, através de forças de atração e repulsão. Pode-se usar aqui um modelo simples como o da Figura 2.11, que ilustra uma estrutura em forma de rede regular simples. Quando se aplica uma força num ponto da superfície do corpo, de fato o que se faz é aplicar uma quantidade de pequenas forças a toda a infinidade de átomos que se estendem nas imediações a região, na superfície atuada. Sob a ação dessas forças, a primeira camada molecular, aquela que foi diretamente acionada, sofre um deslocamento e tenta aproximar-se dos átomos de uma segunda camada. Entretanto as duas camadas são separadas por forças interatômicas de repulsão, que podem ser grosseiramente

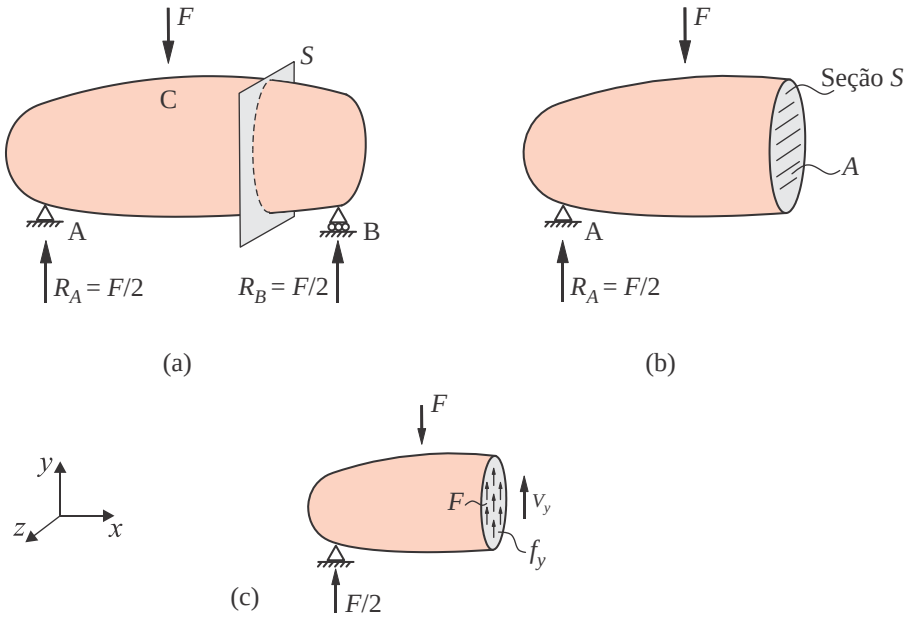


Figura 2.10: Forças num corpo e numa parte deste.

visualizadas como molas. Dessa forma, a força aplicada na primeira camada é, de fato, transmitida para a segunda. A segunda camada por sua vez tende a deslocar-se ao encontro da terceira, o que implica numa transmissão da força para a terceira camada, e assim sucessivamente. Então a força se transmite através do corpo como uma onda. De fato, o processo é realmente por transmissão de onda mecânica, e se faz à velocidade do som.

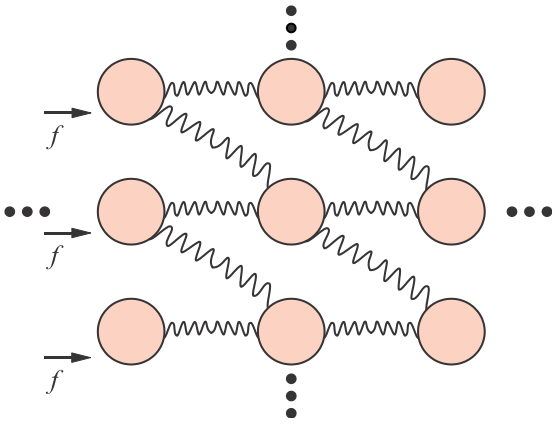


Figura 2.11: Estrutura atômica simples, submetida a forças f em sua primeira camada.

A onda começa no momento em que se inicia a aplicação de F no ponto C. Quando ela atravessa todo o corpo, cada porção deste passa a suportar uma parcela de força. Para ver isso, consideremos o caso da Figura 2.10a, onde fazemos um corte S numa posição qualquer. Para simplificar a interpretação, consideremos que esse corte seja paralelo ao plano yz. Se examinarmos apenas um dos lados do corpo, o lado esquerdo, por exemplo, como na Figura 2.10b, e indicarmos apenas as forças externas (F e R_A), como colocado ali, é fácil visualizarmos que aquela porção do corpo não está em equilíbrio. Mas isso seria incoerente. **Para um corpo sólido, sabemos que se ele está em equilíbrio, cada porção dele também estará em equilíbrio.**

Para entender esta afirmação basta lembrar que, quando se diz que o corpo está em equilíbrio entende-se que sua aceleração é nula. Ora, se o corpo é sólido, sem nenhuma parte móvel dentro dele, então cada parte dele também estará sob aceleração nula. Claramente a exceção disso são

os mecanismos, em que partes podem se mover uma em relação às outras. No presente texto consideramos apenas corpos homogêneos, sem movimento relativo de partes internas.

Se observarmos a parte do corpo mostrado na Figura 2.10b, notamos que ele não poderia estar em equilíbrio sob a ação apenas das forças externas indicadas (F e R_A). De fato, o que falta ali é que se reconheça a existência das forças f_y, como mostrado na Figura 2.10c, que atuam no material interno ao corpo. Estas forças são distribuídas em todas as partículas de material, e são aplicadas pelo lado do corpo oposto ao corte, i.e., o lado direito aplica essas forças sobre o lado esquerdo.

Note que f_y pode tomar um valor diferente em cada ponto da superfície S. Nesse momento não estamos ainda preparados para determinar a distribuição de f_y, i.e., a função $f_y = f_y(y, z)$ ao longo da superfície S. Entretanto, usando a condição de equilíbrio do lado esquerdo do corpo, podemos determinar o valor da força total resultante devido ao conjunto de microforças f_y que atuam nas partículas da seção S. Denominaremos essa resultante de V_y. Se o valor f_y^j fosse conhecido na molécula j, em cada uma N das moléculas em S, com, se teria a resultante com o valor

$$V_y = \sum_{j=1}^{N} f_y^j. \tag{2.10}$$

No exemplo simples da Figura 2.10c teríamos,

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow \quad F - R_A - V_y = 0, \qquad \text{i.e.,} \qquad V_y = F - R_A. \tag{2.11}$$

Então, V_y é a força resultante na seção S, necessária para equilibrar o carregamento e as reações do lado esquerdo do corpo em relação a S.

Definição: De forma mais geral, considerando uma seção transversal de viga,

definem-se **esforços** como as forças e momentos internos resultantes que atuam numa dada seção de uma viga.	(2.12)

2.3 Ideias preliminares sobre tensões

Consideremos qualitativamente a situação ilustrada na Figura 2.12a, em que um bloco de material flexível assenta-se com atrito sobre uma base rígida. Sobre o bloco flexível aplicamos um outro bloco, este idealmente com rigidez infinita, com peso P. Além de força P, o bloco está sujeito a uma força horizontal F como na Figura (b).

De um ponto de vista de análise estática global do conjunto, facilmente determinamos as reações nos apoios, R_x e R_y. Em seguida, buscamos identificar o que ocorre numa seção transversal genérica S. Os esforços normal N e cortante V na seção são também facilmente identificadas, como indicados na Figura 2.13a. Nesse ponto precisamos reconhecer que **as forças N e V são forças fictícias**, no sentido que, realmente, não existem duas forças concentradas aplicadas num ponto da seção transversal S. De fato, as forças na seção são distribuídas em toda a superfície, e N e V são então apenas as resultantes dessas forças distribuídas.

Podemos tentar ilustrar essa distribuição de forças e para isso usaremos nesse momento a **hipótese que as forças distribuem-se uniformemente na seção**. (Essa é uma hipótese muito restrita e ao longo do curso faremos uso dela apenas em uma certa classe de problemas. A situação geral na natureza é o oposto, i.e., via de regra, as tensões variam de ponto a ponto do corpo.) Podemos supor a seção S subdividida em quatro subseções como indicado nas Figuras 2.13b e (c). Em cada subárea a força resultante normal é $-P/4$ e a força resultante tangente é $F/4$. Em lugar de trabalhar com forças interna, o que é feito é, de certa forma, "normalizar" as forças, dividindo-as pela área onde atuam. Daí surge a ideia (ainda rudimentar) de **tensão**. Por exemplo, numa das subseção, podemos calcular

$$\begin{aligned}\text{tensão normal média} &= \tau = \frac{\text{força normal resultante na subseção}}{\text{área da subseção}},\\ &= \frac{-P/4}{A/4} = -\frac{P}{A},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{tensão cisalhante média} &= \tau = \frac{\text{força tangente resultante na subseção}}{\text{área da subseção}},\\ &= \frac{F/4}{A/4} = \frac{F}{A}.\end{aligned}$$

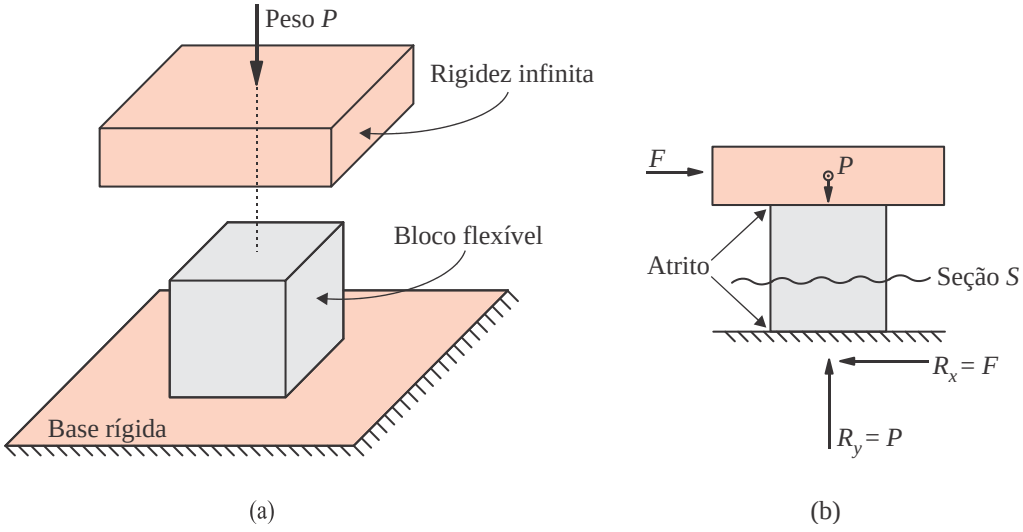


Figura 2.12: Caso ilustrativo 1, de um bloco de material flexível comprimido axialmente.

Essas tensões são representadas nas Figuras 2.13d e (e). Note que, em lugar de usar 2×2 subseções, poderíamos ter tomado uma quantidade infinitamente maior delas, $n \times n$, de tal forma que cada sub-região se aproximaria de um ponto. Tanto a parcela de força quanto a de área se tornaria cada vez mais diminutos, mas a relação entre elas, τ, se manteria a mesma e, por outro lado, τ passaria a ser um valor associado a um ponto do corpo. Também, se cada força fosse igual a $-P/n$, sempre a força total na seção seria $N = -P$, não importando quão grande fosse n.

Caso ilustrativo 2

Um segundo exemplo é aquele ilustrado na Figura 2.14a, que consiste em uma barra com duas seções distintas, engastada em uma extremidade e tracionada pela outra. Note que, independentemente da área da seção transversal, o esforço normal, em qualquer seção, é o mesmo, sempre igual a $N = P$.

Para melhor fazer a ilustração, subdividimos a seção transversal em três sub-regiões. Podemos usar alguma intuição para estimar qual parcela do esforço total, $N = P$, é suportada por cada subárea na seção $a - a$ próxima ao topo. Na Figura 2.14b fazemos uma indicação qualitativa. Pode-se facilmente imaginar que as duas porções de material situada, mais à esquerda e à direita da haste, praticamente não sofrem o efeito da força. A força P seria suportada principalmente pela subárea central. Assim, para os três blocos, as forças e tensões seriam aproximadamente

$$\begin{aligned}F \approx 0 &\quad\rightarrow\quad \tau \approx 0,\\ F \approx P &\quad\rightarrow\quad \tau \approx 3P/A,\\ F \approx 0 &\quad\rightarrow\quad \tau \approx 0.\end{aligned}$$

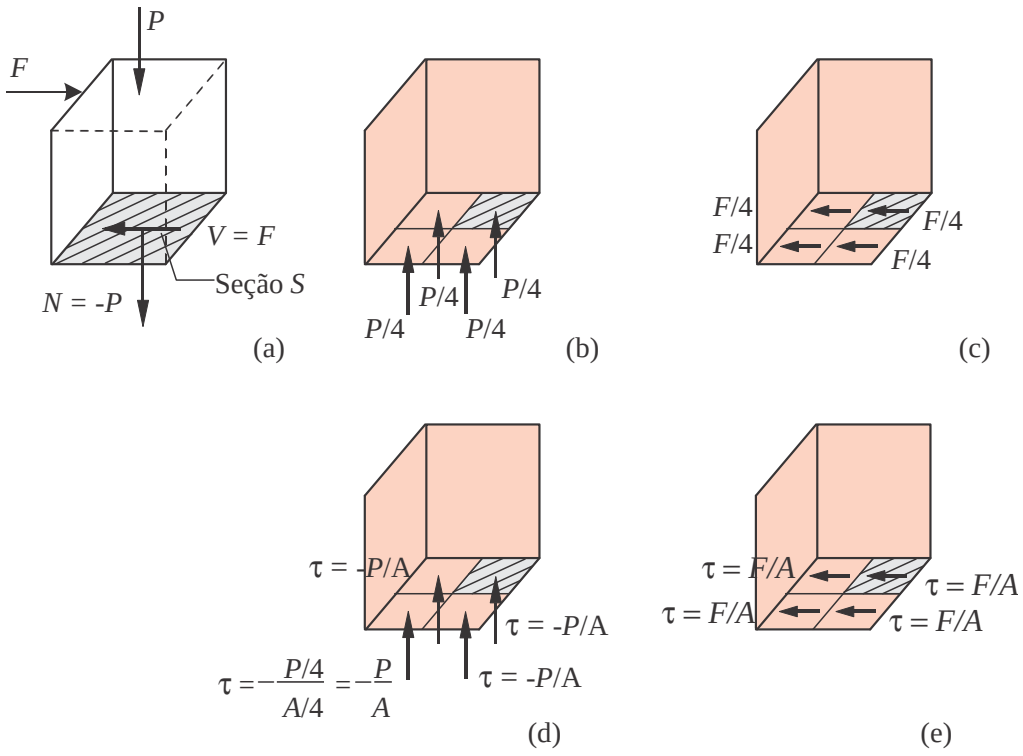


Figura 2.13: Ilustração sobre tensões normal e cisalhante médias.

A Figura 2.14c, no topo, ilustra a distribuição dessas tensões, tanto na forma de degraus, quanto numa forma contínua, suavizada, que qualitativamente melhor se aproxima da solução real do problema. Para entendermos o que ocorre nas seções mais distantes da extremidade, por exemplo a seção $b-b$, devemos considerar um fenômeno conhecido em mecânica dos sólidos. O que ocorre é que, **conforme nos afastamos do topo, as forças, e por extensão as tensões, gradualmente se tornam mais uniformemente distribuídas ao longo da seção.**[2] Assim, na seção $b-b$, parte da carga, $P/4$ por exemplo, estaria sendo sustentada pelos blocos laterais, e a porção central da seção ainda suportaria a maior parte, $P/2$. Note, na figura (c), que a distribuição de tensões torna-se mais achatada, mais uniforme.

Segundo essa ideia, na extremidade oposta à haste, a seção $c-c$, as tensões se distribuem de forma praticamente uniforme ao longo da seção.

2.3.1 Um tratamento mais rigoroso

Consideremos a Figura 2.15. Em (a) temos o diagrama de corpo livre da peça completa e um sistema de eixos cartesianos xyz. Consideramos um ponto genérico P de coordenadas definidas pelo vetor **x,** de componentes $\{x; y; z\}$. Em seguida definimos um plano S passando pelo ponto P, orientado numa direção perpendicular a um dos eixos cartesianos, por exemplo, o eixo x, como ilustrado. A Figura 2.15b mostra um diagrama de corpo livre de um dos lados do corpo em relação à superfície S. Nessa parte do corpo temos as forças externas (exemplificadas ali por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$), que são equilibradas pela **força e momento internos**, **F** e **M**, aplicados no centroide da seção.

Vimos como obter os esforços a partir das forças externas, simplesmente aplicando as equações de equilíbrio. Observe que os esforços **F** e **M** são meramente forças fictícias, i.e., são as resultantes das verdadeiras forças que atuam na seção de forma distribuída. Consideremos agora o problema de determinar a **distribuição das forças internas** ao longo da seção S.

Considere um elemento ΔA de área pertencente à superfície S, localizado no ponto P como

[2] Posteriormente voltaremos a esse assunto que, de fato, corresponde a um princípio da mecânica, denominado "Princípio de St.-Venant".

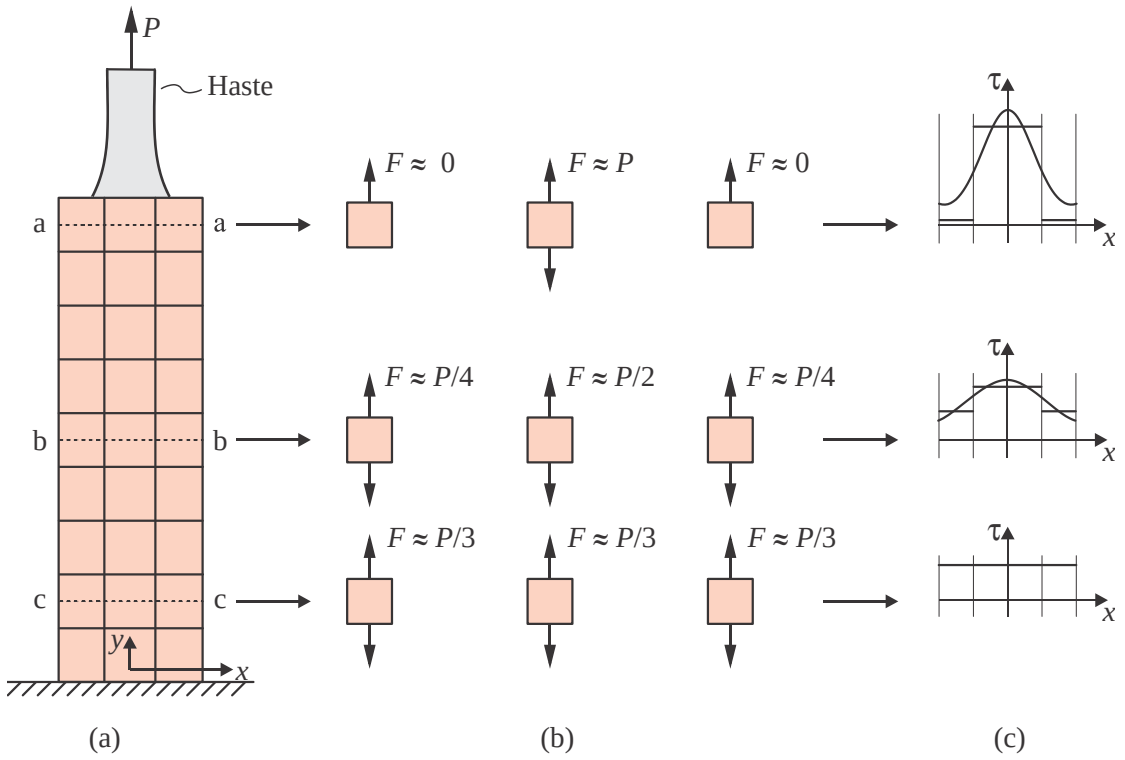


Figura 2.14: Caso ilustrativo 2, sobre campo de tensões normais variáveis.

indicado na Figura 2.15b. Esse elemento de área tem sua normal orientada na direção de um **vetor normal n**. Para simplificar a exposição, arbitraremos nesse caso que **n** seja paralelo ao vetor unitário **i**, i.e., $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Note que a superfície de corte S não necessita ser plana. De fato, em muitas situações é mais vantajoso que S seja uma superfície curva. Entretanto, aqui nos concentramos apenas na orientação da normal no ponto P. Claramente, cada ponto de S possui sua própria orientação normal, i.e., existe uma função $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

No elemento de área ΔA atua uma parcela da força total da seção, dado pelo vetor $\Delta\mathbf{f}^i$. Se somamos todos os $\Delta\mathbf{f}$'s atuantes na superfície S temos a esforço total atuante na seção, i.e.,

$$\mathbf{F} = \Sigma\Delta\mathbf{f}^i, \tag{2.13}$$

e da mesma forma, o esforço de momento na seção é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \Delta\mathbf{f}^i, \tag{2.14}$$

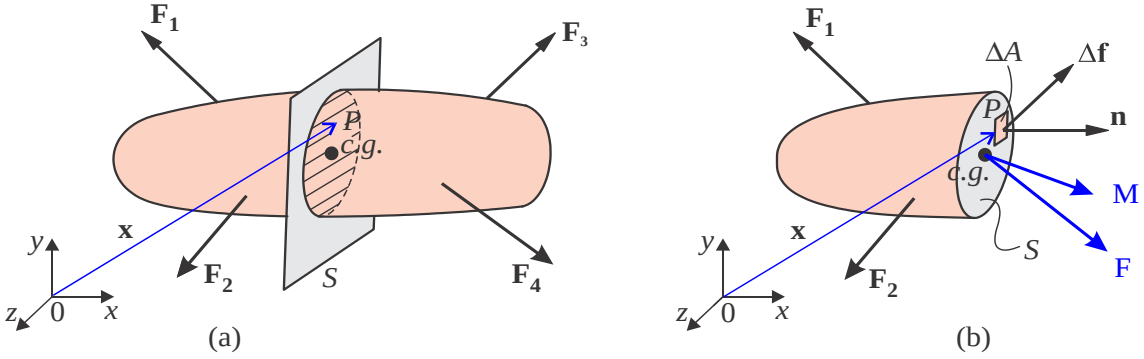


Figura 2.15: Forças externas e internas num corpo.

onde $\mathbf{x}_o$ é a coordenada do centroide da seção e $\mathbf{x}$ a coordenada do ponto na seção S onde atua $\Delta\mathbf{f}$. Lembre-se que, no caso das vigas, as componentes cartesianas de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ são designadas por $\{N_x; V_y; V_z\}$ e $\{M_x; M_y; M_z\}$ respectivamente. No caso do elemento de força $\Delta\mathbf{f}$, também podemos definir suas componentes nas direções cartesianas, i.e.,

$$\Delta\mathbf{f}^i = \Delta f_x^i\mathbf{i} + \Delta f_y^i\mathbf{j} + \Delta f_z^i\mathbf{k}, \tag{2.15}$$

ou simplesmente $\{\Delta f_x^i;\ \Delta f_y^i;\ \Delta f_z^i\}$.

Observe que temos aqui a superfície S subdividida em um número finito N de áreas ΔA_j, de forma que a área total é a união das partes ΔA_j, i.e., $A = \bigcup_{j=1}^{N} \Delta A_j$. Cada partição ΔA_j é um valor finito, não infinitesimal. Entretanto, buscamos uma quantificação da força que seja pontual. Assim, definimos as chamadas **componentes de tensão** como as intensidades de força por unidade de área, válidas em um ponto. Matematicamente, temos que as componentes de tensão num ponto de coordenada $\mathbf{x}$, numa área com normal na direção $\mathbf{i}$, são dadas por:

$$\tau_{xx}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0} \frac{\triangle f_x^i(\mathbf{x})}{\triangle A}, \qquad \tau_{xy}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0} \frac{\triangle f_y^i(\mathbf{x})}{\triangle A}, \qquad \tau_{xz}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0} \frac{\triangle f_z^i(\mathbf{x})}{\triangle A}. \tag{2.16}$$

As componentes são designadas pela letra grega τ, (tau minúsculo), e dois índices: o **primeiro índice** indica a orientação do elemento de área e o **segundo índice** indica a orientação da força.

A tensão tem então **unidades** de [Força]/[área]. No *Sistema Internacional de Unidades* é usado o **Pascal**, abreviado por Pa, definido por

$$1\ \text{Pa} = \frac{1\ \text{Newton}}{1\ \text{m}^2}. \tag{2.17}$$

Frequentemente é usado o múltiplo MPa, que é tal que

$$\begin{aligned} 1\ \text{MPa} \quad &: \quad = 10^6\ \text{Pa}, \\ &= \quad \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{mm}^2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tradicionalmente ainda são usados o kgf/cm^2 (quilograma-força/centímetro quadrado), e o kgf/mm^2, que se convertem ao SI aproximadamente por

$$\frac{1\ \text{kgf}}{1\ \text{cm}^2} \approx 0{,}1\ \text{MPa}. \tag{2.19}$$

Observação 1: Considerando as definições das componentes de tensão (2.16), observamos que a definição exige a existência de uma área, porém o valor obtido refere-se a um ponto apenas, aquele de coordenada $\mathbf{x}$, localizado na superfície S, uma vez que $\Delta A \to 0$.

Observação 2: Note que não temos área nula: trata-se de um valor diferencial dA.

Observação 3: As três componentes de tensão não são associadas apenas ao ponto $\mathbf{x}$ no corpo, mas também à orientação da área ΔA em P, que no caso é $\mathbf{n} = \mathbf{i}$.

Claramente, das três componentes (2.16), τ_{xx} atua perpendicularmente à superfície, i.e., causa **tração** ou **compressão** do material localizado no ponto $\mathbf{x}$, na direção x. Então τ_{xx} é denominada uma componente de **tensão normal**.

As duas componentes τ_{xy} e τ_{xz} são associadas a forças que atuam tangentes à superfície S no ponto $\mathbf{x}$. São as chamadas componentes de **tensão cisalhantes**.

Nesse ponto observe que, em lugar dos esforços na seção serem dados por somatório, como em (2.13), devem ser obtidos das tensões por uma integração. Por exemplo, o esforço normal N_x e os cortantes V_y e V_z são dados por

$$N_x = \int_S \tau_{xx}(\mathbf{x})\ dA, \qquad V_y = \int_S \tau_{xy}(\mathbf{x})\ dA \qquad \text{e} \qquad V_z = \int_S \tau_{xz}(\mathbf{x})\ dA. \tag{2.20}$$

Note que definimos as componentes de tensão e fizemos sua associação com os esforços. Entretanto, a determinação das tensões, propriamente ditas, é assunto que vai demandar quase todo o esforço no resto do presente texto, e é objeto de esforços de quase toda a ciência de Mecânica dos Sólidos. A definição de tensões que vimos acima é ainda apenas introdutória, e será retomada em outros capítulos para mais detalhamentos e propriedades. A seguir retornamos à revisão das propriedades dos esforços e dos processos de seu cálculo em problemas típicos.

2.4 Caso geral de esforços em vigas

Como vimos, para manter o equilíbrio numa parte da viga, é necessária a presença de uma força atuando na superfície interna de corte. Mais que uma força, é necessário também a existência de um momento. Por conveniência, considera-se que esses dois vetores atuam no ponto que corresponde ao **centroide da seção**.

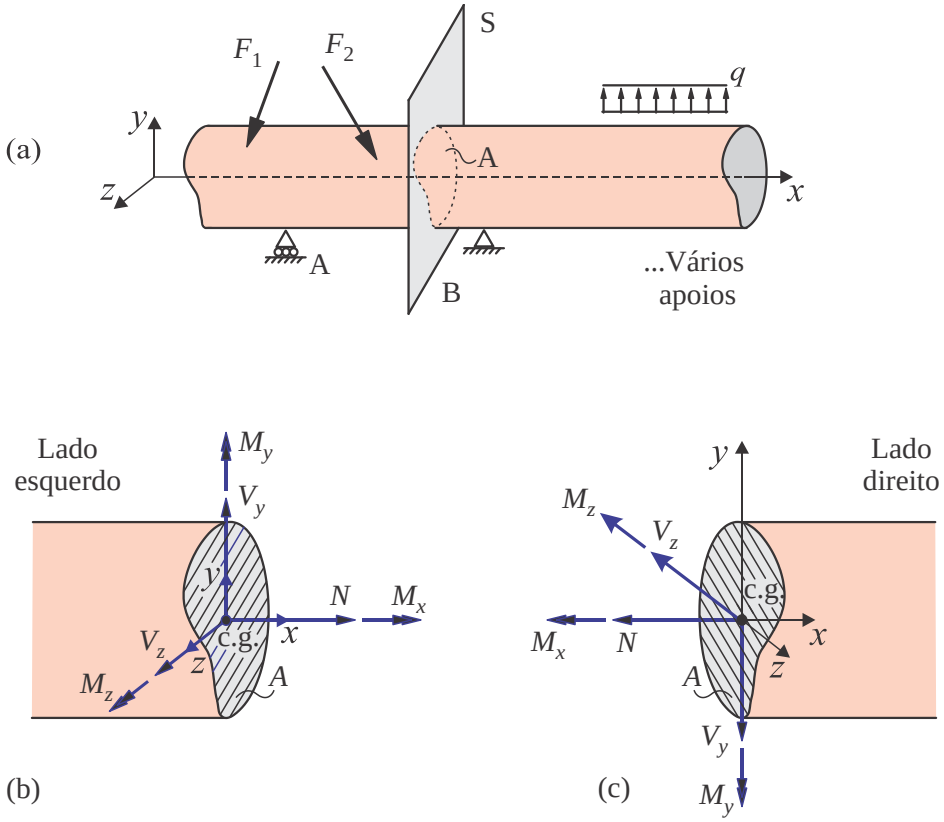


Figura 2.16: Convenção de esforços positivos na seção interna de uma viga.

Considere uma viga reta arbitrária, que estende-se ao longo do eixo x, submetida a um carregamento qualquer, com diversos apoios, como ilustrado na Figura 2.16a. Se realizamos um corte S perpendicular ao eixo x, temos a viga separada em dois lados: o esquerdo e o direito em relação à seção de corte S. Se observamos a parte da viga à esquerda do corte, temos uma representação como na Figura 2.16b. Ali, o vetor de forças internas é representado pelas suas três componentes, uma na direção normal à seção, denominada **esforço normal** N, e duas componentes tangenciais à seção, nas direções y e z, denominadas **esforços cortantes**, V_y e V_z.

Já o vetor de momentos internos também é decomposto em suas três componentes: uma componente na direção axial, o chamado **momento torçor** M_x, e duas componentes, nas direções y e z, os **momentos fletores** M_y e M_z . Consideremos agora, para o mesmo corte S, o lado direito da viga, como mostrado na Figura 2.16c. Devemos observar que as partículas materiais na superfície S da Figura (b) não são as mesmas partículas da superfície S da Figura (c). De fato, as forças e momentos internos mostrados em (b) foram aplicadas pelo lado direito da viga mostrada em (c).

Pela **terceira lei de Newton**, a de ação e reação, as forças e momentos à direita, em (c), devem ser iguais e opostas àquelas à esquerda, em (b). Assim, os esforços mostrados na Figura 2.16c também estão com suas orientações positivas.

Em resumo temos:

Forças internas:	N	-	esforço normal na direção axial x,
	V_y	-	esforço cortante na direção transversal y,
	V_z	-	esforço cortante na direção transversal z,
Momentos internos:	M_x	-	momento torçor (na direção axial x),
	M_y	-	momento fletor na direção transversal y,
	M_z	-	momento fletor na direção transversal z.

(2.21)

Convenção de esforços

As componentes de esforços ilustradas na Figura 2.16 foram definidas como **positivas** quando nas orientações mostradas, e negativas caso contrário. Na literatura de engenharia existem outras convenções, sendo essa uma das duas mais utilizadas. Ela tem a vantagem que, quando se toma o lado esquerdo do corte, todas as componentes de esforços de força e de momento são positivas se tiverem a orientação no sentido positivo do respectivo eixo cartesiano. Por exemplo, V_y é convencionado como positivo se estiver aplicado no lado esquerdo do corte e estiver orientado no sentido positivo de y. Se for no lado direito do corte, todas as componentes positivas estão simplesmente orientadas no sentido negativo dos respectivos eixos. Então é uma convenção bastante intuitiva e mnemônica.

Observação: muitos alunos tem a tendência de pensar que, como se trata de uma "convenção", a cada momento ele pode optar por usar uma ou outra. Na prática isso não é assim. Uma vez que uma delas tenha sido escolhida, como feito aqui, ela vai ser usada ao longo de todas as deduções e cálculos que sejam realizados ao longo de todo o trabalho ou livro. Isso significa que uma equação que tenha sido deduzida num outro capítulo, por exemplo a equação diferencial da curva elástica de flexão de viga, só pode ser usada com a mesma convenção de esforços definida aqui. Então, o estudante ou o engenheiro, em geral não pode escolher a convenção: deve usar aquela que foi definida na bibliografia, nos manuais e softwares que vai usar. Além disso, deve ficar atento para manter a coerência de convenção em diversas fontes.

Método das seções

O procedimento comentado acima, de fato, consiste num método de determinação de esforços em vigas denominado **método das seções.** As etapas do método podem ser sumarizadas da seguinte forma, para o caso de um problema isostático. (Caso a estrutura seja hiperestática veja os comentários ao final).

Etapa 1 – Determine as reações nos apoios da estrutura. Claramente, isto supõe que o problema seja **isostático.**

Etapa 2 – Para determinar os esforços numa dada seção, realize um corte passando por aquela seção, **sempre de forma a dividir a estrutura em duas partes.** Na Figura 2.17 temos duas situações. Na Figura (a) tem-se o caso clássico da viga simples e em (b) uma estrutura plana, no caso uma treliça.

Etapa 3 – Uma vez que a estrutura tenha sido dividida, escolhe-se uma das duas partes e constrói-se um **diagrama de corpo livre** daquela parte, i.e., indicando **todas** as forças sobre ela aplicadas: as **forças externas, as reações e esforços internos**. Na Figura 2.17a tem-se tanto o diagrama de corpo livre do lado esquerdo quanto do lado direito do corte, enquanto na Figura (b) temos o mesmo para os dois lados da treliça. Note que no caso da treliça, o corte atravessa diversas barras.

Etapa 4 – Tomamos o diagrama de corpo livre do lado escolhido da estrutura (esquerdo ou direito), e escrevemos todas as equações de equilíbrio não triviais (que podem ser de uma a seis

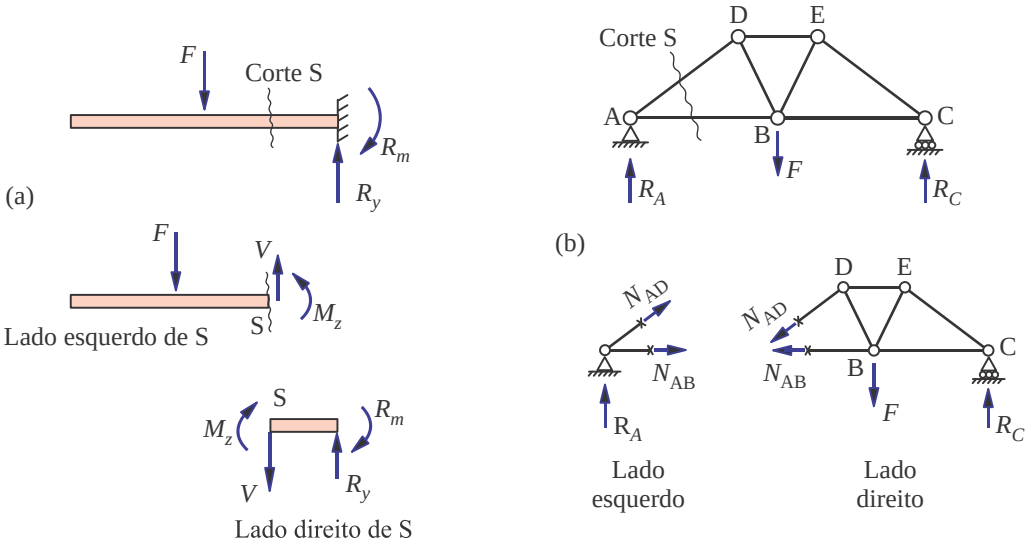


Figura 2.17: Corte de estrutura em duas através de uma dada seção, com indicação dos diagramas de corpo livre de cada uma das partes.

equações). Resolvendo o sistema de equações teremos os esforços nas vigas interceptadas pelo corte na estrutura, na posição do corte.

Os detalhes de aplicação do método serão melhor compreendidos através dos exemplos que seguem.

Exemplo 2.2 – Cálculo de esforços

Considere a viga mostrada na Figura 2.18a, com uma força $F = 50$ N aplicada na extremidade contida no plano xy. (a) Determine as reações nos apoios. (b) Determine os esforços na seção D, localizada a 25 mm da extremidade C.

Solução:

Etapa (a) – Para determinar as reações dos apoios basta seguir as etapas mostradas no Exemplo 1. Na Figura 2.18(b) temos a definição do sistema de coordenadas e a indicação das reações não nulas nos apoios. Como são três, e o problema é plano, o problema é isostático, e as reações são dadas pelas três equações de equilíbrio não triviais:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \longrightarrow F\cos 30^o + R_{Ax} = 0, \\ \sum F_y &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o + R_{Ay} + R_{Ay} = 0, \\ \sum M_z^A &= 0 \longrightarrow R_{By}(100) + \text{sen } 30^o\ (150) = 0. \end{aligned}$$

Note que fizemos o cálculo dos momentos em relação ao ponto A.

A solução do sistema de equação é: $R_{By} = -37,5$ N, $R_{Ax} = -25\sqrt{3}$ N $= -43,3$ N e $R_{Ay} = 12,5$ N.

Etapa (b) – **Os esforços** na seção D são obtidos pelo método das seções. Fazemos um corte na seção D e escolhemos um dos lados da viga. Na Figura (c) temos o lado direito. Em seguida fazemos um diagrama de corpo livre daquele lado. Temos ali as forças externas e os esforços não nulos. Como o problema é plano, apenas os esforços N, V_y e M_z aparecem no diagrama de corpo livre.

Os esforços são determinados pelas equações de equilíbrio entre as forças aplicadas no lado direito da viga:

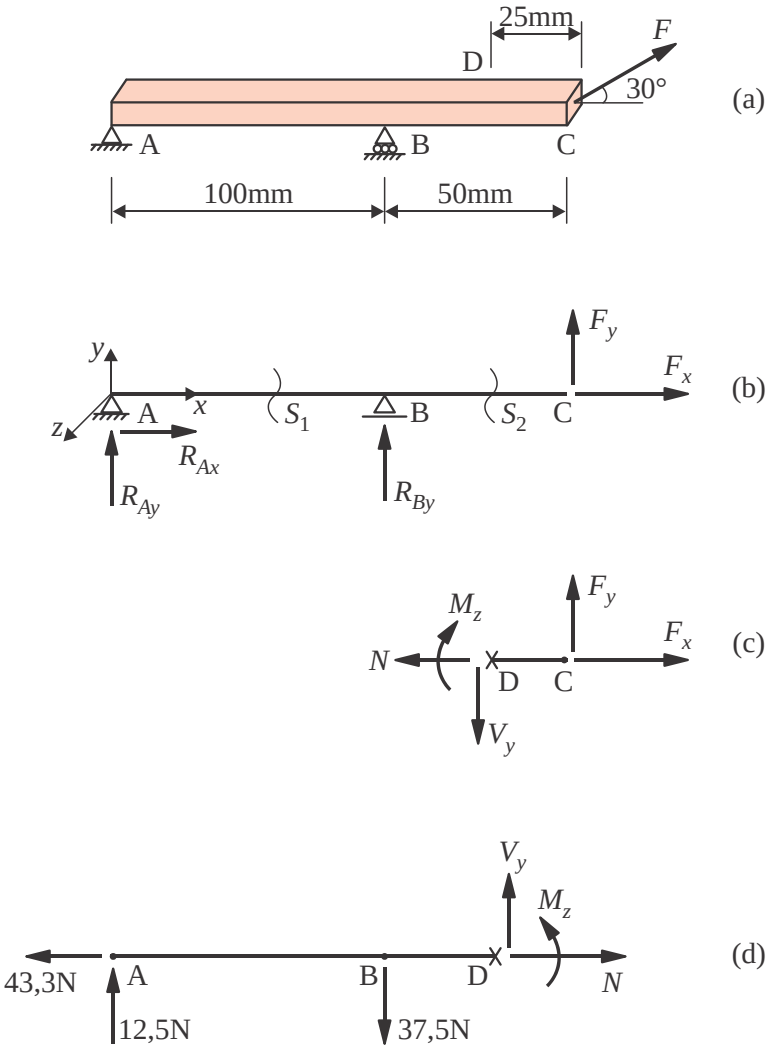


Figura 2.18: Ilustração do Exemplo 2.

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \longrightarrow F\cos 30^o - N = 0,\\
\sum F_y &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o - V_y = 0,\\
\sum M_z^D &= 0 \longrightarrow F \text{ sen } 30^o\ (25) - M_z = 0.
\end{aligned}$$

A solução do sistema é $N = 43,3$ N, $V_y = 25$ N, $M_z = 625$ Nmm.

Observe que se tivéssemos usado o **lado esquerdo da viga**, como na Figura 2.18d, os valores dos esforços seriam exatamente os mesmos. Nesse caso as equações de equilíbrio seriam:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 \longrightarrow N - 43,3 = 0,\\
\sum F_y &= 0 \longrightarrow V_y + 12,5 - 37,5 = 0,\\
\sum M_z^D &= 0 \longrightarrow M_z + 37,5(25) - 12,5(125) = 0.
\end{aligned}$$

Nomenclatura:	
Seção, ou seção de corte A, B, ...	Indica a superfície gerada pela passagem do plano de corte através da estrutura.
Trecho, ou vão AB.	Indica o segmento entre duas seções da viga.

Essa nomenclatura deve ficar bastante clara para o aluno, e será usada em todo o livro. Nota-se que ela é coerente com o significado normal do Português. Assim, não faz sentido o uso de "seção AB", por exemplo. Também, "ponto A" deve ser evitado, pois A não é um ponto da viga, mas um conjunto infinito de pontos que compõe a seção transversal gerada pelo corte.

Cargas Distribuídas e Concentradas

Tão frequentes quanto as cargas concentradas são aquelas que se distribuem ao longo de uma certa extensão da estrutura. De fato, fisicamente, as únicas cargas que existem são as distribuídas, sendo as concentradas apenas idealizações realizadas para facilitar o processo de cálculo. Assim, suponhamos que estamos interessados no comportamento global de uma viga de 1 m de comprimento, como na Figura 2.19, sujeita a uma carga distribuída P, em N/mm^2, aplicada sobre uma pequena extensão d.

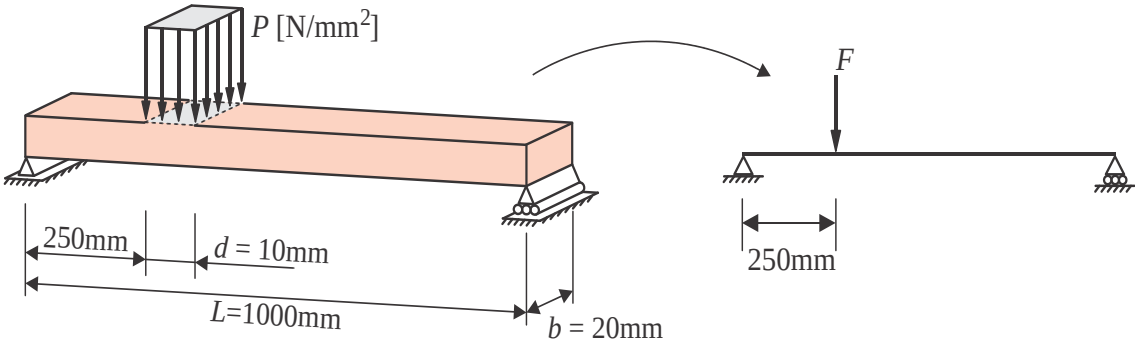


Figura 2.19: Conversão carga distribuída ⟶ carga concentrada. (Obs.: a figura foi feita fora de escala para facilitar a visualização.)

Nesse caso podemos obter o mesmo resultado analisando o problema como uma simples carga concentrada de valor $F = Pbd$, **desde que a extensão** d seja "pequena". Este "pequeno" é obviamente arbitrário, mas é sempre analisado em relação às demais dimensões da viga, principalmente o comprimento L e a largura b. Assim, via de regra, a conversão será aceitável se $d \ll L$ e $d \lesssim b$, por exemplo, $d \lesssim L/100$.

Quando a carga se estende por um segmento mais longo o cálculo de viga usa uma função $q(x)$ dada por

$$q(x) = P(x)b, \tag{2.22}$$

i.e., $q(x)$ é a força por unidade de comprimento linear de viga e $P(x)$ é a força por unidade de área.

Algumas situações físicas exigem uma modelagem por cargas distribuídas:

1. A primeira delas é quando peso próprio é um fator importante, como nas

   (a) **colunas** e **vigas** usadas em construção civil, ou em

   (b) **componentes mecânicos** em que os movimentos executados exigem o cálculo das **forças de inércia**, que são naturalmente distribuídas na massa. Esse é o comportamento dinâmico do sistema. Um exemplo típico são as **forças centrífugas**, que ocorrem quando a barra está montada num sistema rotativo de alta velocidade.

2. Na segunda situação, a carga é estática, proveniente do peso próprio ou de uma força aplicada por uma outra parte da estrutura que se apoia sobre a viga sendo analisada.

   (a) De fato, também as cargas concentradas estáticas são provenientes de outros corpos que estão montados ou apoiados na viga.

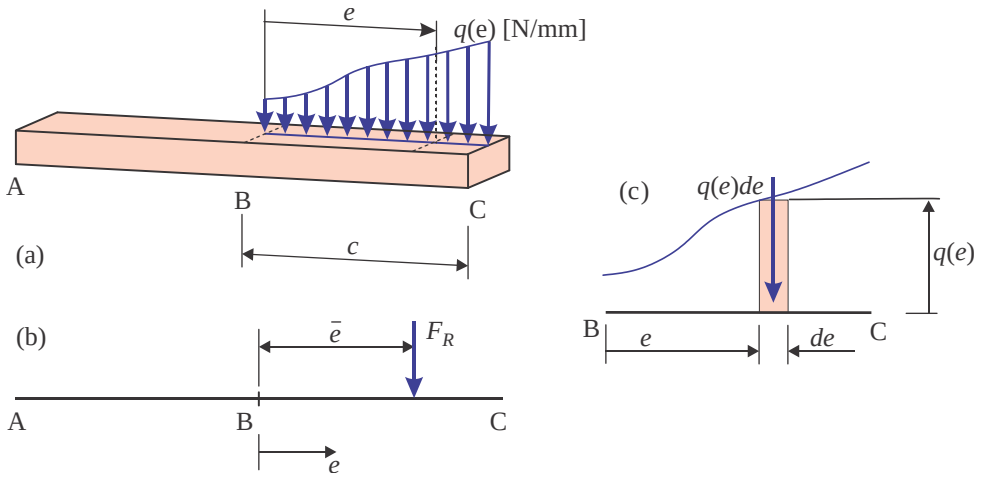


Figura 2.20: Carga distribuída arbitrária e força resultante.

Para efeito de cálculo do equilíbrio global de forças, a carga distribuída $q(x)$ pode ser substituída por uma **força equivalente** F_R, aplicada numa posição adequada. Considere-se uma carga distribuída definida por uma função arbitrária $q = q(x)$ aplicada entre as seções B e C de uma viga, como na Figura 2.20a. Busca-se a posição de aplicação da força resultante equivalente $\overline{e}$ em relação à seção B. Os valores de F_R e $\overline{e}$ são definidos tais que F_R representa a força resultante de $q(x)$, e $\overline{e}$ é tal que F_R produz o mesmo momento que $q(x)$ produz. Primeiramente reescreve-se a função $q(x)$ na forma $q(e)$, sendo que a coordenada e tem origem na seção B. Então, as duas equações de equilíbrio são:

$$\boxed{F_R = \int_{e=0}^{c} q(e)\ de, \qquad \text{e} \qquad F_R\overline{e} = \int_{e=0}^{c} e \underbrace{q(e)\ de}_{\text{Elemento de força}}} \ . \tag{2.23}$$

Note que na segunda equação os momentos são calculados em relação ao eixo transversal que passa pela seção B. Aqui, $q\ de$ é um elemento diferencial de força, (representado pela área hachurada na Figura 2.20c), e $eq(e)de$ e um elemento diferencial de momento em relação à seção B. Dessa forma, resolve-se inicialmente a primeira das equações, determinando-se F_R, e em seguida, a solução da segunda equação produz a posição $\overline{e}$.

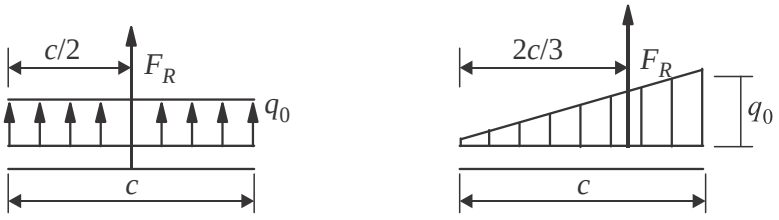


Figura 2.21: Cargas distribuídas uniforme e triangular.

Note que as **equações (2.23) acima são de uso geral**, para qualquer tipo de carga distribuída. Por exemplo, no caso de uma **carga distribuída uniforme** q_o, ilustrada na Figura 2.21,

as eqs.(2.23) produzem

$$\boxed{F_R = q_o c \qquad \text{e} \qquad \overline{e} = \frac{c}{2} \qquad \text{carga uniforme } q_o.} \tag{2.24}$$

No caso de uma **carga distribuída linear** na forma $q(e) = q_o e/c$,

$$\boxed{F_R = \frac{q_0 c}{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{e} = \frac{2c}{3} \qquad \text{carga triangular.}} \tag{2.25}$$

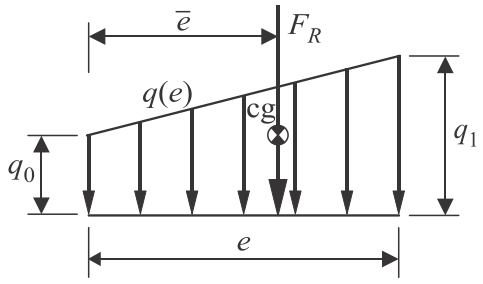


Figura 2.22: Carga distribuída trapezoidal.

Como visto em $(2.23)_1$, F_R é a área sob o diagrama $q(e) - e$, enquanto $\overline{e}$ é a posição do centroide da área sob a curva $q(e) - e$. Por exemplo, para uma **carga trapezoidal,** como na Figura 2.22, se tem:

$$\boxed{\begin{aligned} &q(e) = (q_1 - q_0)\frac{e}{c} + q_0, \\ &F_R = (q_0 + q_1)\frac{c}{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{e} = (2q_1 + q_0)\frac{c^2}{6F_R}. \end{aligned}} \tag{2.26}$$

No caso de uma **distribuição parabólica quadrática** de carga dada por $q(e) = Ke^2$, tem-se:

$$\boxed{\begin{aligned} &F_R = \int_{e=0}^{c} Ke^2 de = \frac{Kc^3}{3}, \\ &F_R\overline{e} = \int_{e=0}^{c} Ke^3 de = \frac{Kc^4}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{e} = \frac{3c}{4}. \end{aligned}} \tag{2.27}$$

Diagramas de Esforços

Como visto no Exemplo 2, o método das seções produz os esforços numa dada seção. Entretanto, frequentemente é útil que se tenha uma visualização gráfica dos esforços em **todas** as seções da viga, o que é permitido nos chamados **diagramas de esforços**. Os diagramas de esforços são gráficos $N = N(x)$, $V_y = V_y(x)$ e $M_z = M_z(x)$ etc.

O procedimento para gerar as funções consiste em:

1. Usar o **método das seções** para uma seção situada numa **coordenada arbitrária** x;

2. Por motivos que serão posteriormente identificados, alguns dos esforços podem ser definidos por uma **função descontínua**. A descontinuidade ocorrerá na seção onde existam cargas concentradas. (Lembre-se que a cada apoio correspondem forças de reações, que também são cargas concentradas. Logo, os esforços são descontínuos também nos apoios).

3. Uma vez que os esforços podem ser descontínuos, o procedimento do item (a) deve ser repetido para cada **segmento de viga** entre duas cargas concentradas.

4. Adicionalmente, a equação de um esforço muda com mudança do tipo de carregamento. Por exemplo, no caso da Figura 2.23a, teremos que definir uma função de esforços válida para o segmento AB, e uma equação distinta para o segmento BC.

Exemplo 2.3 – Diagrama de esforços

Considere a viga biapoiada ilustrada na Figura 2.23a, com a carga distribuída variando na forma de uma parábola de segundo grau, dada por $q(e) = ke^2$, onde e é uma coordenada com origem na seção B, e $k = 3 \cdot 10^{-4}\text{N/mm}^3$. Também, $a = c = 100$ mm. Determinar os diagramas de esforços.

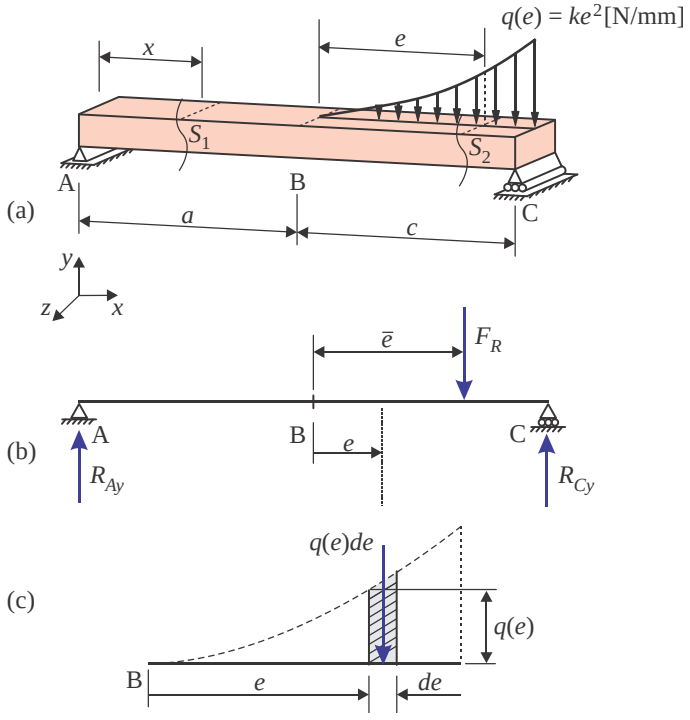


Figura 2.23: Definição do problema do Exemplo 3 $a = c = 100$ mm.

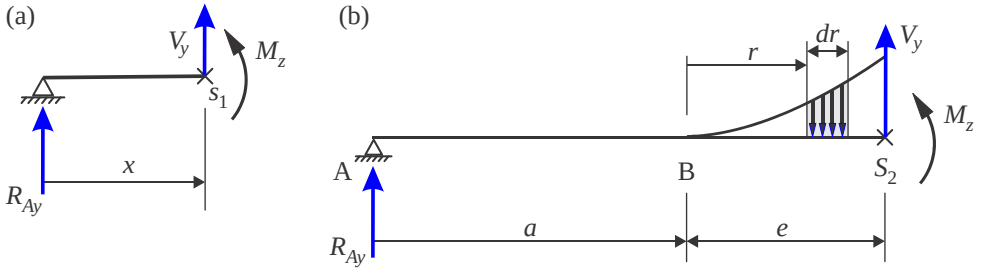


Figura 2.24: Diagramas de corpo livre para o Exemplo 3.

Solução:

Primeiramente definem-se os eixos coordenados $x - y$, e indicam-se as reações não nulas nos apoios, como ilustrado no diagrama de corpo livre da Figura 2.25b.

A **primeira etapa** é a determinação da força resultante da carga distribuída e sua posição. Uma vez que a carga tem variação parabólica, pode-se utilizar diretamente a eq.(2.27), com os dados do

problema: Então $F_R = kKc^3/3 = 3 \cdot 10^{-4} \times 100^3/3 = 100$ N e $\bar{e} = 3c/4 = 3 \times 100/4 = 75$ mm. As forças aplicadas na viga são representadas no diagrama de corpo livre da Figura 2.23b.
A **segunda etapa** é a determinação das reações nos apoios. Usando as forças indicadas na Figura 2.23b se tem as equações de equilíbrio não triviais:

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - F_R = 0, \\ \sum M_z^{\mathrm{A}} &\rightarrow F_R(a + \bar{e}) - R_{Cy}(a + c) = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Resolvendo o sistema de equações temos as reações: $R_{Cy} = 87,5$ N e $R_{Ay} = 12,5$ N.
A **terceira etapa** da solução é a aplicação do **método das seções** para a determinação dos esforços. **Aqui deve-se jamais esquecer que a utilidade de** $\bar{e}$ e F_R terminam com o cálculo das reações. Para os esforços deve-se voltar a considerar a carga distribuída como na Figura 2.23a.

Como existem dois trechos, AB e BC, buscam-se duas equações para cada esforço, obtidas trecho a trecho.

Trecho AB

Uma vez que se deseja obter os esforços em qualquer seção do intervalo AB, faz-se um corte numa **seção arbitrária** s_1, numa coordenada genérica $x \in (0; a)$, como ilustrado da Figura 2.24a. Ali tem-se um diagrama de corpo livre do lado da viga à esquerda da seção s_1, onde são indicadas todas as forças, externas (nesse caso apenas a reação R_y), e internas (cortante V_y e momento M_z). (Note que se poderia igualmente ter optado por usar o lado direito do corte s_1, obtendo os mesmos resultados para os esforços).

Os esforços são obtidos por equilíbrio:

$$\begin{array}{lll} \sum F_y \rightarrow R_{Ay} + V_y = 0 & \Longrightarrow V_y(x) = -12,5 \text{ N} & \text{para} \quad \forall x \in (0; 100) \text{ mm}, \\ \sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z - R_{Ay}x = 0 & \Longrightarrow M_z(x) = 12,5x \text{ Nmm} & \text{para} \quad \forall x \in (0; 100) \text{ mm}. \end{array} \tag{2.29}$$

Trecho BC

O mesmo procedimento é repetido para o trecho BC, i.e., é realizado um corte numa seção genérica s_2. Para facilitar os cálculos, define-se uma coordenada e com origem na seção B, como indicado na Figura 2.24b. **Note que no diagrama de corpo livre é indicada a parcela de carga distribuída que atua no segmento à esquerda da seção** s_2, de comprimento e, em vez de c. A resultante das forças do trecho de carga no segmento entre as seções B e s_2 é f_R, e deve ser aplicado na coordenada $\bar{e}$. A determinação desses valores é feita usando novamente a eq. (2.27), porém, em lugar de c, o comprimento da região sob carga é e. Então $f_R = ke^3/3$ e $\bar{e} = 3e/4$.

Os esforços são obtidos por

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow R_{Ay} - f_R + V_y = 0, \\ \sum M_z^{s_2} &\rightarrow M_x - R_{Ay}(a + e) - f_R(e - \bar{e}) = 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

A solução para $\forall e \in (0; c)$ é:

$$\begin{aligned} V_y(e) &= \frac{ke^3}{3} - R_{Ay} && \rightarrow V_y(e) = 10^{-4}e^3 - 12,5, \\ M_z(e) &= R_{Ay}(a + e) - \frac{ke^4}{12} && \rightarrow M_z(e) = 1.250 + 12,5e - 2,5.10^{-5}e^4. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Tendo em mãos as equações dos esforços em cada trecho, (2.29) e (2.31), a tarefa agora consiste em diagrama-las. **O diagrama de uma função permite uma inspeção visual, qualitativa, que facilita a interpretação das regiões mais solicitadas da estrutura.** O esboço do diagrama é feito trecho a trecho. Para o trecho AB, as equações (2.29) fornecem uma constante e uma reta para o cortante e momento fletor, como visto na Figura 2.25. O esboço das curvas associadas à

eq. (2.31) do trecho BC é algo mais complicado, porém sem novidades para o leitor. Como revisão podemos citar as etapas.

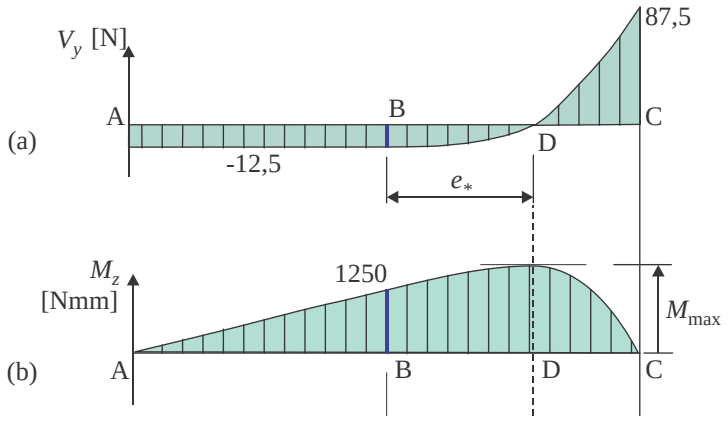


Figura 2.25: Diagrama de momento fletor e cortante do Exemplo 3, onde $e^* = 50$ mm e $M_{\text{MAX}} = 1.718,75$ Nmm.

1. Calcular o valor da função **nos extremos** do intervalo, i.e.,

$$V_B = V_y|_{e=0} = -12,5 \text{ N}, \qquad M_B = M_z|_{e=0} = 1.250 \text{ Nmm},$$
$$V_C = 87,5 \text{ N}, \qquad M_C = M_z|_{e=c} = 0.$$

2. Procurar seções em que a **função se anule**. No caso, $V_y(e_*) = 0$ para $e_* = 50$ mm e $M_z(e) = 0$ em $e = 100$ mm.

3. Buscar seções em que a função sofra **inflexão**, i.e., seja máxima ou mínima. Isto é feito pela primeira derivada de função:

$$\left.\frac{dV_y}{de}\right|_{e_o} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{dV_y}{de}\right|_{e_o} = 10^{-4} \times 3e_o^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e_o = 0,$$
$$\left.\frac{dM_z}{de}\right|_{e_{**}} = 0 \quad \longrightarrow \quad 12,5 - 4 \times 2,5 \times 10^{-5} e_{**}^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e_{**} = e_* = 50 \text{ mm}.$$

4. Determinar a **concavidade** da curva, o que é feito pela segunda derivada:

$$\frac{d^2V_y}{de^2} = 6 \times 10^{-4} e > 0 \quad \Longrightarrow \text{ concavidade para cima}$$
$$\frac{d^2M_z}{de^2} = -12 \times 2,5 \times 10^{-4} e^2 = 0 > 0 \quad \Longrightarrow \text{ concavidade para baixo.}$$

5. Determinar o **valor máximo** ou mínimo da função:

$$M_{\max} = M_z|_{e=e_{**}} = 1.718,75 \text{ Nmm}.$$

Com isto se tem os diagramas esboçados na Figura 2.25. Note que o fato de V_y anular-se no meio do intervalo é apenas coincidência, porém não é coincidência que a seção onde $V_y = 0$ seja a mesma em que M_z atinge seu ponto de máximo. De fato, isto é uma regra geral, como será demonstrado nas seções seguintes.

Treliças e pórticos

Tanto treliças quanto pórticos são estruturas formadas por barras ou vigas unidas, como ilustrado na Figura 2.17b por exemplo. O princípio, desenvolvido e aplicado intensamente a partir do século 19, é uma das formas mais eficientes de vencer grandes vãos. Considere, por exemplo, que se tenha um vão a ser vencido por uma estrutura, que deve suportar uma certa carga, que consista por exemplo, numa força concentrada transversal. A ideia mais básica para i.e. simplesmente lançar uma viga, como na Figura 2.26a. Dado um valor fixo L para o comprimento do vão, a capacidade da viga suportar a carga depende basicamente do material e de sua altura h da seção, (embora, como veremos no Capítulo 12, depende também da forma da seção). Ocorre que, para L e F relativamente grandes, a altura necessária da seção passa a ser proibitivamente grande, uma vez que com h cresce também o peso próprio da viga (além do custo), até que a viga não consiga suportar sequer a si própria, não importando de que material seja construída. Assim, a alternativa para esta questão é usar uma estrutura do tipo ilustrado na Figura 2.26b, composta por barras. Note que, não importando a particular configuração do projeto, de fato o que se busca é um valor alto para a altura H da estrutura como um todo.

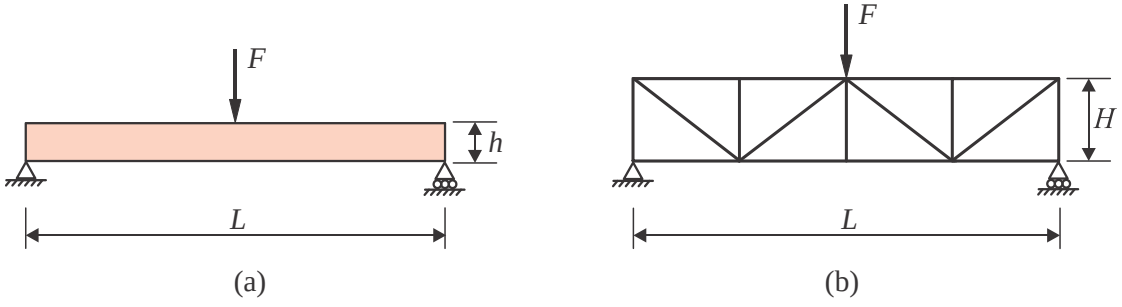


Figura 2.26: Comparação entre uma viga simples e uma treliça plana.

Historicamente, até a primeira década do século 20, todas as estruturas metálicas, como as pontes e viadutos, eram construídas unindo as barras entre si pelas extremidades através de rótulas, constituindo as chamadas **treliças**. Mesmo atualmente, diversas estruturas são construídas dessa forma, como a torre de transmissão de alta tensão mostrada na Figura 2.27. É uma estrutura constituída por perfis estruturais de seção L. No detalhe construtivo mostrado da figura nota-se que as barras são unidas na junta por um único parafuso, que podem funcionar como rótulas.

Formalmente, **define-se uma treliça** como uma estrutura com as seguintes características:

1. É constituída por barras retas, unidas pelas extremidades através de rótulas, i.e., a união permite a rotação de uma barra em relação a outra.

2. As forças são todas concentradas, e aplicadas exclusivamente nos nós da estrutura (as rótulas entre barras). Não há cargas aplicadas no meio de uma barra, ou cargas distribuídas.

Como consequência direta dessas restrições, todas as **barras de uma treliça desenvolvem apenas esforços normais**, i.e., não sofrem flexão, e o esforço cortante é nulo. Esta característica facilita enormemente o processo de cálculo, e se ajustava perfeitamente ao processo construtivo usado na época. Entretanto, com o uso das estruturas, observou-se que os altos valores de esforços nas barras desenvolviam esforços de atrito também demasiado elevados na região de contato entre pino e olhal em cada rótula. Com o pequeno movimento relativo ocasionado pelo tráfego e pelo vento, o material tendia a se danificar localmente, levando à falha localizada.

A solução encontrada consistiu em construir as estruturas engastando completamente uma barra à outra, impedindo qualquer movimento relativo. A consequência direta disso é que nessa situação cada barra não pode mais, rigorosamente, ser analisada como barra, mas como viga, i.e., ela passa a sofrer não apenas esforços normais, mas também flexão e esforços cortantes. Isto é o que caracteriza os chamados **pórticos planos e espaciais**, em distinção às treliças.

Figura 2.27: Exemplo de torre de alta tensão e detalhe de junta.

Ocorre, entretanto, que a determinação dos esforços no pórtico é bastante mais complexa que numa treliça. Isso sugeriu o hábito de cálculo, usado praticamente até a atualidade, de **analisar certos pórticos como se fossem treliças**, i.e., computar apenas os esforços normais e ignorar os cortantes e momentos. Esse procedimento gera uma aproximação razoável se

- cada barra for razoavelmente longa em relação às dimensões de sua seção transversal, e
- se todas as cargas forem concentradas, aplicadas nos nós.

Sem dúvida que, atualmente, com os procedimentos numéricos e computacionais disponíveis, a análise de pórticos é não muito mais complexa que a da treliça correspondente.

Nos exemplos que seguem mostraremos apenas o cálculo de esforços em treliças, mas o leitor deve se manter alerta para o fato de que a forma construtiva provavelmente seria de pórtico. A análise de pórticos será realizada através de métodos energéticos e numéricos de Elementos Finitos em capítulos próprios.

Diversos métodos para análise de treliças existem na literatura (como o tradicional método gráfico de Cremona), mas nos restringiremos aqui ao **método das seções**, que provê um procedimento manual simples embora seja eficiente apenas em estruturas de poucas barras. Para estruturas mais complexas existe o método de elementos finitos, assunto de capítulos próprios neste livro.

Exemplo 2.4 – Esforços em treliças plana

Considere a estrutura plana de 9 barras ilustrada na Figura 2.28a. Analise-a como uma treliça e determine os esforços em cada barra em termos da força F.

Solução:

Primeira etapa. Inicialmente geramos o diagrama de corpo livre como na Figura 2.28b, indicando um sistema cartesiano de coordenadas, e as reações não triviais nos apoios. Observando as reações, nota-se que o problema é isostático. Adicionalmente, define-se um número para identificar cada nó. Essa mesma numeração implicitamente indica uma numeração para cada barra, i.e., a barra 15 é aquela que liga os nós 1 e 5.

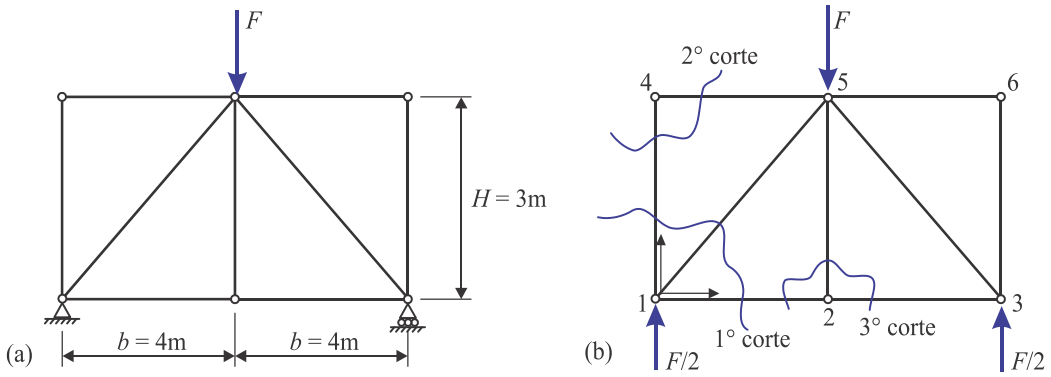


Figura 2.28: (a) Treliça plana do Exemplo 4, (b) diagrama de corpo livre usado.

A segunda etapa consiste na determinação das **reações nos apoios**. Como o problema é bastante simples, as reações nos nós 1 e 3, R_1 e R_3, estão já indicadas na Figura 2.28b.
A terceira etapa consiste na determinação dos **esforços** normais nas barras.

Devido à simetria da estrutura (simetria de geometria, de carregamento e de condição de contorno), os esforços nas barras 23, 35, 36, e 56 são idênticos, respectivamente, àqueles das barras 12, 15, 14 e 45. Assim, basta que determinemos os esforços nestas últimas, além da barra 25. Para isso realizamos, um a um, os três cortes indicados na Figura 2.28b. Lembre que o corte deve sempre atravessar a estrutura inteira, i.e., deve dividi-la em duas partes separadas. No processo de escolha dos cortes, a regra é sempre buscar cortes que interceptem o menor número de barras possível. Isso porque **a cada barra corresponde um esforço**, que é uma incógnita (a menos que tenha sido determinada anteriormente).

Em seguida fazemos o diagrama de corpo rígido para cada um dos cortes.

Corte 1

Tomamos o lado da estrutura indicado na Figura 2.29a. Indicamos as forças externas (incluindo as reações), as dimensões, e os esforços nas seções que sofreram corte. Note que os esforços são positivos se saem da seção. A determinação dos esforços N_{12}, N_{15} e N_{14} se faz a partir das equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x \quad &\longrightarrow \quad N_{12} + N_{15}\cos\theta = 0, \\ \sum F_y \quad &\longrightarrow \quad \frac{F}{2} + N_{14} + N_{15}\ \text{sen}\ \theta = 0, \qquad \text{onde } \theta = \arccos 0,8. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Note que se tem duas equações e três incógnitas. Então a solução depende de novas equações, obtidas por outros cortes.

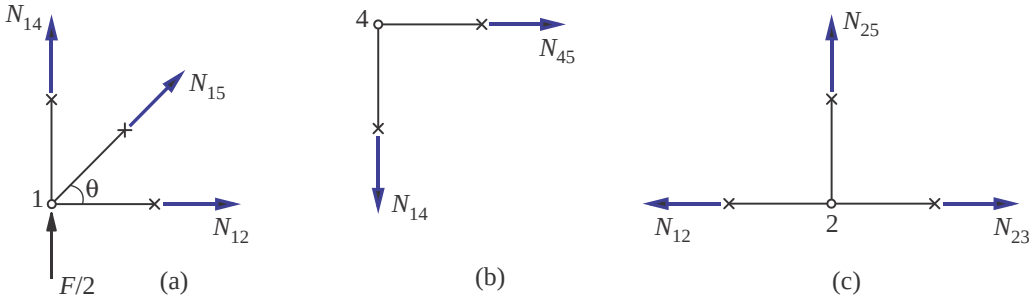


Figura 2.29: Diagramas de corpo livre para os cortes 1, 2 e 3 da treliça do exemplo 4.

Corte 2

O diagrama de corpo livre está na Figura 2.29b. Note que na barra 14, N_{14} sempre é tomado como positivo se sai da seção. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N_{14} = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow N_{45} = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Nesse caso, o corte interceptava apenas duas barras, e como se tem sempre duas equações na treliça plana, é possível determinar os esforços nas duas barras cortadas.

Note que agora, com o conhecimento de $N_{14} = 0$, o sistema de equações (2.32) do corte 1 torna-se determinado, e produz a solução:

$$N_{12} = \frac{2F}{3} \qquad \text{e} \qquad N_{15} = -\frac{5F}{6}, \tag{2.34}$$

i.e., a barra N_{15} encontra-se sob compressão.

Corte 3

O diagrama de corpo livre aparece na Figura 2.29c. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N_{12} - N_{23} = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow N_{25} = 0 \implies N_{25} = 0, \qquad N_{23} = N_{12}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aqui temos a confirmação de que $N_{23} = N_{12}$, e o valor $N_{25} = 0$. Com isso temos os esforços em todas as barras, que é indicado como na Figura 2.30. Ali pode-se ver que a linha inferior, barras 12 e 13, encontram-se tracionadas e as diagonais 15 e 35 estão comprimidas. As demais barras não são solicitadas, parecendo sugerir que poderiam ser removidas da estrutura sem prejuízo. Entretanto, deve-se notar que outros fatores devem ser considerados antes de se decidir por sua remoção. Por exemplo, outros tipos de carregamento devem ser considerados, e também a possibilidade de ocorrer **falha por flambagem** (tópico desenvolvido em capítulo próprio), além de considerações de redundância e confiabilidade estrutural.

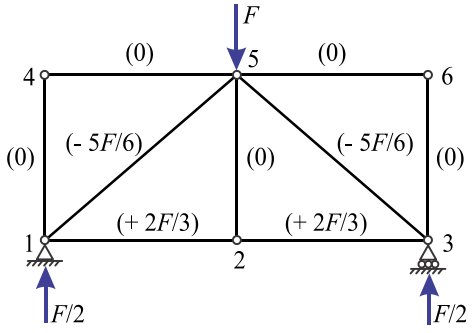


Figura 2.30: Indicação dos esforços na treliça.

2.5 Equações diferenciais de equilíbrio de viga em flexão e tração

Até a seção anterior consideramos o equilíbrio global da viga, associado às forças atuantes num segmento de dimensões finitas (isto é, macroscópicas). Entretanto, frequentemente é interessante identificar como os esforços num segmento de dimensões infinitesimais se equilibram. No que segue consideraremos os esforços associados à flexão e à tração numa viga.

2.5.1 Dedução simplificada

Nessa seção é apresentada uma dedução simplificada das equações de equilíbrio de viga em flexão. Uma dedução mais rigorosa, porém que leva ao mesmo resultado, é apresentada na próxima seção. Inicialmente, considera-se um segmento de viga como o da Figura 2.32a. Não importa aqui quais os apoios ou qual a forma de carregamento, uma vez que focaremos a atenção apenas nas forças atuantes num segmento de comprimento Δx, extraído de uma posição arbitrária x, como visto na Figura (b). Consideramos que o carregamento transversal é uma carga distribuída $p_y(x)$, em N/m, positiva quando atuando na direção positiva de y, e uma carga distribuída atuando na direção axial, $p_x(x)$, em N/m. Uma **carga axial distribuída** ocorre em diversas situações prática, como por exemplo:

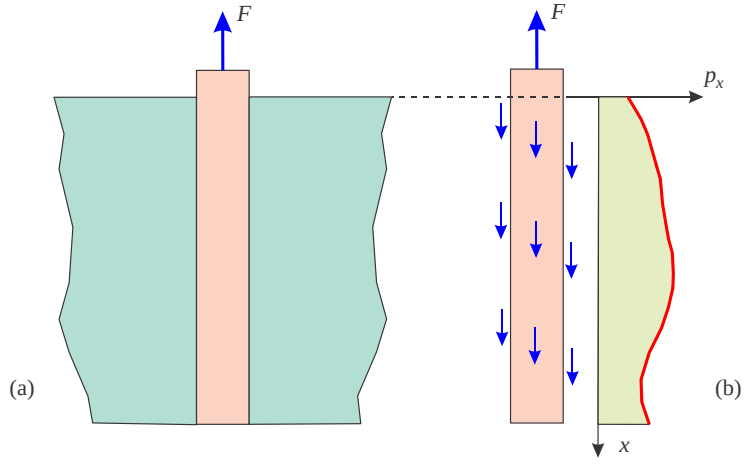


Figura 2.31: (a) Ilustração de uma barra soterrada sujeita à uma força numa extremidade. (b) diagrama de corpo livre da barra sob a ação de forças em sua superfície lateral, de resultante p_x variável ao longo da extensão.

1. A força de atrito na superfície de uma barra soterrada. Quando sujeita a uma força numa extremidade, o solo (ou outro meio), exerce uma força de atrito na superfície, que pode ser quantificada por uma força por unidade de comprimento axial da barra.

2. Uma barra girando em alta velocidade em torno de uma de suas extremidades produz força centrífuga axial, que pode também ser representada por uma força por unidade de comprimento.

No segmento cortado aplicam-se as forças internas. Na seção S, de coordenada x, os esforços são $N_x(x)$, $V_y(x)$ e $M_z(x)$. Na seção A, de coordenadas $x + \Delta x$, os esforços são diferentes daqueles de S: $N_x(x + \Delta x)$, $V_y(x + \Delta x)$ e $M_z(x + \Delta x)$. Entretanto, podem-se representar estes esforços em termos de seus valores em x, adicionados da diferença, isto é,

$$\begin{aligned} N_x(x+\Delta x) &= N_x(x) + \Delta N_x, \\ V_y(x+\Delta x) &= V_y(x) + \Delta V_y, \\ M_z(x+\Delta x) &= M_z(x) + \Delta M_z. \end{aligned} \tag{2.36}$$

As equações de equilíbrio não triviais para o segmento são:

$$\begin{cases} \sum F_x \rightarrow -N_x + (N_x + \Delta N_x) + p_x(x)\Delta x = 0, \\ \sum F_y \rightarrow -V_y + (V_y + \Delta V_y) + p_y(x)\Delta x = 0, \\ \sum M_z^{\mathrm{A}} \rightarrow -M_z + (M_z + \Delta M_z) + V_y \Delta x - p_y(x)\Delta x \dfrac{\Delta x}{2} = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

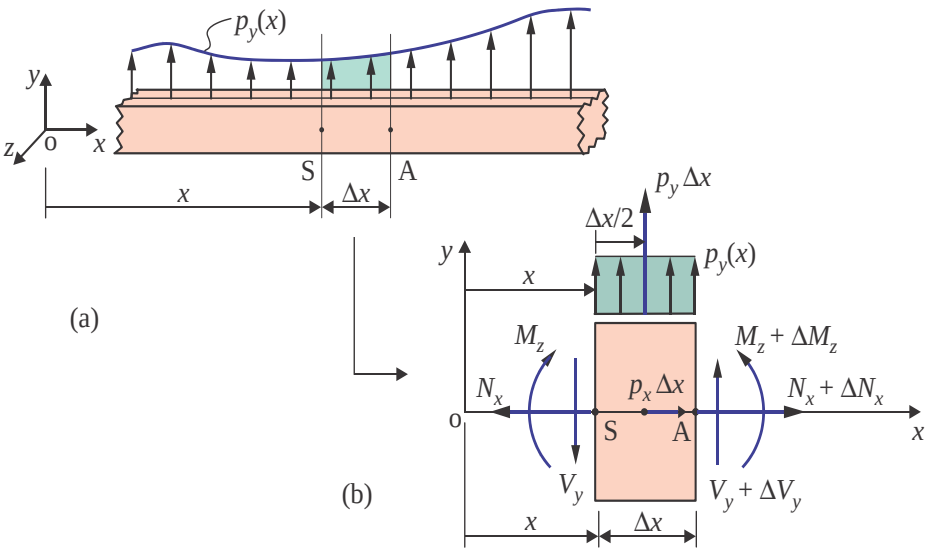


Figura 2.32: Esforços de flexão num segmento de comprimento Δx.

Observa-se que as cargas aplicadas p_x e p_y variam dentro do segmento Δx. Entretanto, considerando que Δx será em seguida considerado arbitrariamente pequeno, faz-se a simplificação de que as cargas sejam uniformes no intervalo, com o seu valor em x, i.e., as cargas são consideradas de valor $p_x(x)$ e $p_y(x)$, como ilustrado para $p_y(x)$ na Figura 2.32b. Assim, a força transversal no intervalo Δx é $p_y(x)\Delta x$, e a força axial é $p_x(x)\Delta x$, que aparecem no último termo do lado esquerdo das duas primeiras eqs.(2.37). Também, por Δx ser pequeno, é considerado que a força transversal atua no centro do intervalo, de forma que o momento provocado por ela em relação à seção A é $p_y(x)\Delta x\Delta x/2$, como aparece no último termo do lado esquerdo de $(2.37)_3$.

Simplificam-se N_x, V_y e M_z em cada uma das eqs. (2.37). Em seguida, divide-se cada equação por Δx, o que resulta em

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_x}{\Delta x} + p_x(x) = 0, \\ \dfrac{\Delta V_y}{\Delta x} + p_y(x) = 0, \\ \dfrac{\Delta M_z}{\Delta x} + V_y - p_y(x)\dfrac{\Delta x}{2} = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

A última etapa da dedução consiste em fazer o limite em cada equação para $\Delta x \to 0$. Assim, obtém-se as três equações de equilíbrio da viga sob flexão plana e tração:

$$\boxed{\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \qquad \frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_z}{dx} = -V_y} \tag{2.39}$$

De forma análoga, para uma **carga distribuída transversal na direção** z, $p_z(x)$, são gerados na viga o esforço cortante V_z e o momento fletor M_y. A dedução das equações diferenciais de equilíbrio é feita de forma análoga ao caso de carga transversal na direção y, e são as seguintes equações:

$$\boxed{\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_y}{dx} = V_z(x).} \tag{2.40}$$

Note que a relação entre M_y e V_z é diferente daquela entre M_z e V_y, através do sinal positivo em $dM_y/dx = V_z(x)$. Os sinais em todas as equações são consequência da convenção de sinais dos esforços escolhida, mostrada na Figura 2.16. O uso de outra convenção exige nova dedução para as equações de equilíbrio. As cinco equações diferenciais (2.39) e (2.40) são as quatro **equações diferenciais equilíbrio de viga**. As quatro equações associadas a flexão podem ser combinadas em apenas duas da seguinte forma. Derivando $(2.39)_3$ podemos substituir dV_y/dx em $(2.39)_2$. O

mesmo pode ser feito com (2.40), o que resulta num conjunto de três equações, se incluirmos a de esforços normais:

$$\boxed{\frac{dN_x}{dx} = -p_x(x), \qquad \frac{d^2M_z}{dx^2} = p_y(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -p_z(x).} \tag{2.41}$$

2.5.2 Dedução detalhada para flexão

Considere um segmento de viga como o da Figura 2.33a. Não importa aqui quais os apoios ou qual a forma de carregamento, uma vez que focaremos a atenção apenas nas forças atuantes num segmento de comprimento Δx, extraído de uma posição arbitrária x, como visto na Figura (b). Consideramos aqui apenas o carregamento transversal é uma carga distribuída $p_y(x)$, em N/m, positiva quando atuando na direção positiva de y. O equilíbrio do esforço normal já foi detalhado na seção anterior, e pode ser ajustado facilmente usando os argumentos vistos no detalhamento a seguir.

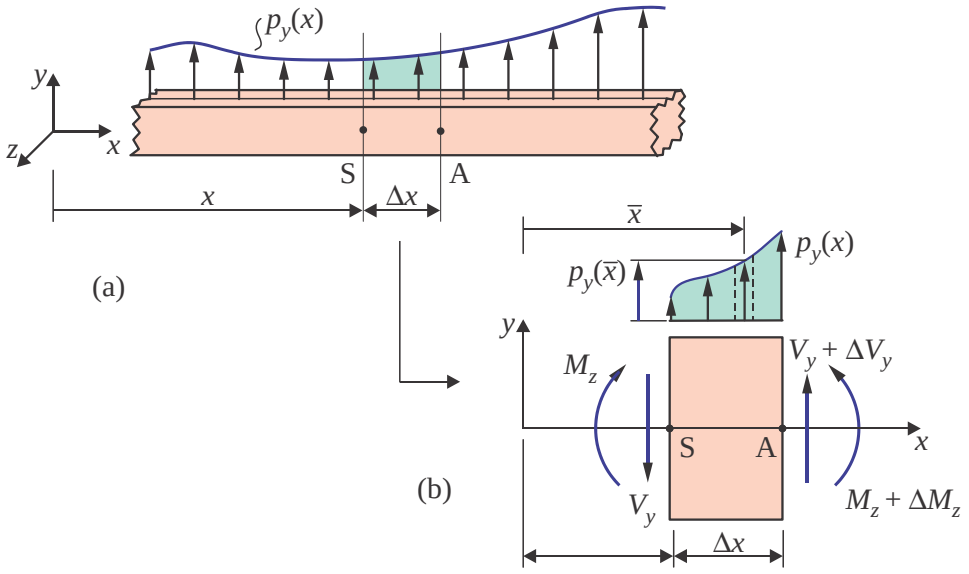


Figura 2.33: Esforços de flexão num segmento de comprimento Δx.

No segmento cortado aplicam-se as forças internas. Na seção s, de coordenada x, os esforços são $V_y(x)$ e $M_z(x)$. Na seção A, de coordenadas $x + \Delta x$, os esforços são diferentes daqueles de s: $V_y(x + \Delta x)$ e $M_z(x + \Delta x)$. Entretanto, pode-se representar estes esforços em termos de seus valores em x, adicionados da diferença, isto é,

$$\begin{aligned} V_y(x + \Delta x) &= V_y(x) + \Delta V_y, \\ M_z(x + \Delta x) &= M_z(x) + \Delta M_z. \end{aligned}$$

As equações de equilíbrio não triviais para o segmento são:

$$\begin{cases} \sum F_y \to -V_y + (V_y + \Delta V_y) + \int_{e=x}^{x+\Delta x} p_y(e)\ de = 0, \\ \sum M_z^A \to -M_z + (M_z + \Delta M_z) + V_y \Delta x - \int_{e=x}^{x+\Delta x} (\Delta x - e) p_y(e)\ de = 0. \end{cases} \tag{2.42}$$

A avaliação das integrais pode ser feita com o auxílio do "Teorema do Valor Médio" do cálculo, que pode ser sintetizado dizendo que a integral de uma função $f(x)$ contínua e finita, num intervalo finito $[a - b]$, (*i.e.*, $\int_a^b f(x)dx$), é igual a $(b-a)f(\overline{x})$, onde $\overline{x} \in [a; b]$. O teorema garante que $\overline{x}$ existe e localiza-se dentro do intervalo de integração.

Assim, eq.(2.42) fica

$$\begin{cases} \Delta V_y + p_y(\overline{x})\Delta x = 0, \\ \Delta M_z + V_y\Delta x - \Delta x\Delta x p_y(\overline{x}) + p_y(\overline{x})\overline{x}\Delta x = 0. \end{cases}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir cada equação por Δx:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta V_y}{\Delta x} = -p_y(\overline{x}), \\ \dfrac{\Delta M_z}{\Delta x} + V_y - xp_y(\overline{x}) - p_y(\overline{x})\Delta x + p_y(\overline{x})\overline{x} = 0. \end{cases}$$

Agora fazemos o limite $\Delta x \to 0$.Nesse caso, $\Delta V_y/\Delta x \to dV_y/dx$, $\Delta M_z/\Delta x \to dM_z/dx$, $\Delta x \to 0$ e $\overline{x} \to x$. Então

$$\boxed{\frac{dV_y}{dx} = -p_y(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_z}{dx} = -V_y(x).} \tag{2.43}$$

Essas são as mesmas equações de equilíbrio deduzidas em forma simplificada na seção anterior, eq.(2.39).

Notemos que todo o trabalho acima foi realizado para uma **carga distribuída na direção** y, $p_y(x)$. Para uma **carga na direção** z, $p_z(x)$, as equações diferenciais de equilíbrio são:

$$\boxed{\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_y}{dx} = V_z(x).} \tag{2.44}$$

As quatro equações diferenciais (2.43) e (2.44) são as quatro **equações diferenciais equilíbrio de flexão de viga**. Elas podem ser combinadas em apenas duas da seguinte forma. Derivando $(2.43)_2$ podemos substituir dV_y/dx em $(2.43)_1$. O mesmo pode ser feito com (2.44), o que resulta em

$$\boxed{\frac{d^2M_z}{dx^2} = p_y(x), \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -p_z(x).} \tag{2.45}$$

Conhecendo as funções de carregamento, $p_y(x)$ e $p_z(x)$, as equações (2.33) e (2.44) podem ser usadas para determinar os esforços de flexão na viga, V_y, V_z, M_y e M_z. Isso pode ser feito integrando essas equações, isto é: dados $p_y(x)$ e $p_z(x)$,

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} p_y(x) & \to & V_y(x) = -\int_{\epsilon=\epsilon_o}^{x} p_y(\epsilon)\ d\epsilon + C_1 & \to & M_z(x) = -\int_{\epsilon=\epsilon_o}^{x} V_y(\epsilon)\ d\epsilon + C_2, \\ p_z(x) & \to & V_z(x) = -\int_{\epsilon=\epsilon_o}^{x} p_z(\epsilon)\ d\epsilon + C_3 & \to & M_y(x) = -\int_{\epsilon=\epsilon_o}^{x} V_z(\epsilon)\ d\epsilon + C_4. \end{array}} \tag{2.46}$$

onde $C_1 - C_4$ são constantes de integração. De fato, esse é um processo de solução para os esforços em vigas denominado **método do somatório**. Entretanto, embora aparentemente simples, o procedimento não é aconselhável em cálculos manuais. Ocorre que as operações (2.46) devem ser realizadas sequencialmente, trecho a trecho da viga, a partir de uma extremidade até a outra. Em cada trecho a constante de integração deve ser determinada para permitir a definição completa da solução naquele trecho. Esta equação é então usada para definir o valor do esforço no início do trecho seguinte, o que dará o valor C daquele trecho. É visível então que **qualquer erro de cálculo cometido num dos trechos se propagará em cadeia a todos os trechos subsequentes.**

Entretanto, uma das grandes utilidades operacionais das equações diferenciais (2.43) e (2.44) é a de servirem como teste para soluções obtidas por outros métodos, como o método das seções. Nessas equações se pode ver que existe claramente uma cadeia:

$$\begin{array}{ccccccc} M_z(x) & \underrightarrow{\text{deriva}} & -V_y(x) & \underrightarrow{\text{deriva}} & +p_y(x) \\ M_y(x) & \underrightarrow{\text{deriva}} & V_z(x) & \underrightarrow{\text{deriva}} & -p_z(x) \end{array} \tag{2.47}$$

em que uma função deve ser precisamente igual a $\pm$ a derivada de outra.

Cargas Concentradas

As equações diferenciais (2.39) tratam diretamente apenas do equilíbrio de cargas distribuídas. Entretanto, é interessante identificar como os esforços variam em presença de uma carga concentrada. Forças e momentos concentrados são singularidades que não são diretamente representados em equações diferenciais. Então, se uma viga possui uma força concentrada numa dada seção A, as equações diferenciais só tem validade e uso nas demais seções, não em A. Definida a seção A, de coordenada x, podemos identificar a seção que fica numa coordenada infinitesimalmente próxima a x, à direita, que podemos designar por $x^+ = x + dx$, e a seção imediatamente à esquerda de A, na seção $x^- = x - dx$.

Como as equações diferenciais não são válidas nos pontos de singularidade, isto é, aqueles que contém forças externas concentradas ou descontinuidades em algum dos carregamentos ou em suas derivadas, segue-se que elas também não são válidas nos **pontos de apoio**, pois nesses pontos atuam reações concentradas. Com isso, as equações diferenciais são válidas apenas no interior de cada **trecho** entre cargas concentradas. Por exemplo, para um trecho AB, como na Figura 2.34, as equações são válidas para todo x no intervalo aberto $(x_{A+},\ x_{B-})$, onde x_{A+} é o ponto infinitesimalmente próximo de x_A, a sua direita, e x_{B-} é infinitesimalmente próximo de x_{B-}, à sua esquerda.

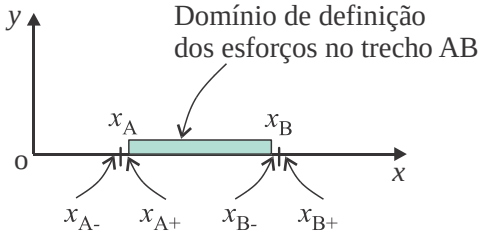


Figura 2.34: Domínio de definição das equações diferenciais de esforços no trecho AB entre cargas concentradas ou apoios.

Consideremos agora o equilíbrio entre os esforços que atuam nas duas seções infinitesimalmente próximas a uma carga concentrada. Para isso, consideremos uma viga genérica, com forças externas concentradas F_x, F_y e F_z e momentos concentrados m_x, m_y e m_z, todos aplicados numa certa seção A, como ilustrados nas Figuras 2.35 e 2.36.

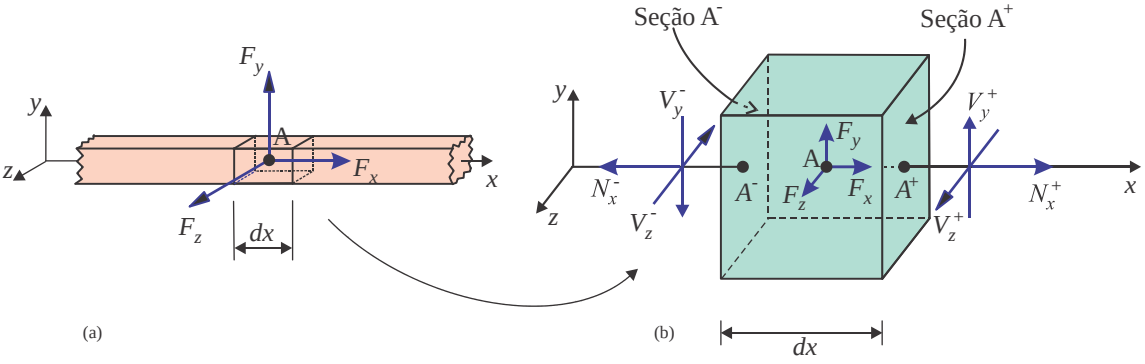


Figura 2.35: Forças concentradas F_x, F_y e F_z aplicadas numa certa seção A e esforços à esquerda e à direita da seção.

Consideremos que, através de um processo de cálculo qualquer (como o método das seções, por exemplo), temos os valores dos esforços na seção à esquerda de A, infinitesimalmente próxima, que denominemos aqui de seção A^-.Então conhecemos os valores dos esforços N_x^-, N_x^-, V_y^-, V_z^-, M_z^- e M_y^-. A questão aqui consiste em determinar os esforços N_x^+, N_x^+, V_y^+, V_z^+, M_z^+ e M_y^+ na seção logo à direita de A. Isto é feito de forma bastante simples, com o diagrama de corpo livre de uma

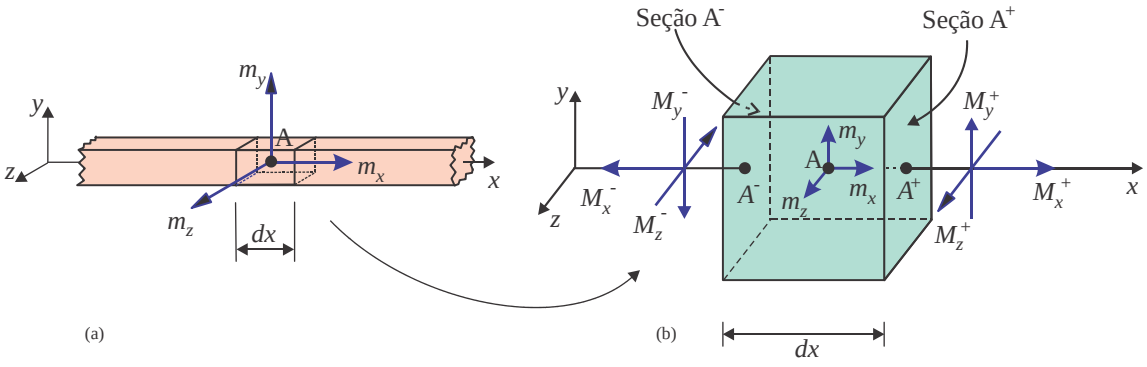


Figura 2.36: Momentos concentrados m_x, m_y e m_z aplicados numa certa seção A e esforços de momento à esquerda e à direita da seção.

fatia de viga de comprimento dx, mostrado na Figura 2.35b. As seis equações de equilíbrio são:

$$\begin{array}{lcl} N_x^+ = N_x^- - F_x, & \text{e} & M_x^+ = M_x^- - m_x, \\ V_y^+ = V_y^- - F_y, & \text{e} & M_y^+ = M_y^- - m_y, \\ V_z^+ = V_z^- - F_z, & \text{e} & M_z^+ = M_z^- - m_z. \end{array} \tag{2.48}$$

2.5.3 Usos das equações diferenciais de equilíbrio e equilíbrio para forças concentradas

São diversos os usos das equações diferenciais de equilíbrio (2.39) e do equilíbrio em torno de cargas concentradas (2.48):

1. Uso como **teste dos esforços** obtidos por algum método.

2. Podem ser usadas como base de um método para obter as próprias equações de esforços. Esse é o chamado **método de integração**, que será exemplificado nesse capítulo.

3. As equações diferenciais de equilíbrio em termos dos esforços são usadas como parte do método de solução de deflexão das vigas sob a ação das forças aplicadas. Esse é o chamado **método de integração da curva elástica**, detalhado no Capítulo 12.

Teste das equações dos esforços

Considere que as equações de esforços em cada trecho da viga tenham sido obtidas para um problema através de algum método. Uma vez calculadas, surge a necessidade de realizar alguns testes nas equações para verificar se estão corretas. De fato, qualquer que tenha sido o método de solução, as reações nos apoios e as equações dos esforços devem satisfazer o conjunto completo de equações de equilíbrio, formado pelo equilíbrio global da estrutura (2.4), por (2.39) e (2.48):

$$
\begin{array}{ll}
\text{Equilíbrio global} & \left\{\begin{array}{l} \sum_n F_{xn} + \sum_j R_{xj} = 0, \\ \sum_n F_{yn} + \sum_j R_{yj} = 0, \\ \sum_n F_{zn} + \sum_j R_{zj} = 0, \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \sum_s M_{xs} + \sum_k R^k_{mx} = 0, \\ \sum_s M_{ys} + \sum_k R^k_{my} = 0, \\ \sum_s M_{zs} + \sum_k R^k_{mz} = 0. \end{array}\right. \\
\text{Equilíbrio diferencial} & \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dN_x}{dx} = -p_x(x), & \dfrac{dM_z}{dx} = -V_y(x) & \dfrac{dM_y}{dx} = V_z(x) \\ & \dfrac{dV_y}{dx} = -p_y(x) & \dfrac{dV_z}{dx} = -p_z(x) \end{array}\right. \\
\text{Equilíbrio em cargas concentradas} & \left\{\begin{array}{l} N_x^+ = N_x^- - F_x, \\ V_y^+ = V_y^- - F_y, \\ V_z^+ = V_z^- - F_z, \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} M_x^+ = M_x^- - m_x, \\ M_y^+ = M_y^- - m_y, \\ M_z^+ = M_z^- - m_z. \end{array}\right.
\end{array}
\tag{2.49}
$$

Adicionalmente, pode-se afirmar que,

> se um conjunto de reações e de equações de esforços satisfaz esse conjunto de equações em todos os pontos, então esse conjunto de valores e funções é a solução correta do problema.

(2.50)

As relações (2.49) podem ser usadas como **teste para verificar a correção de diagramas de esforços**. Algumas das verificações que podem ser feitas são as seguintes:

1. O **teste da correção das reações** começa pela verificação das 6 equações de equilíbrio $(2.49)_1$. Entretanto, um teste geral mais eficiente consiste em reconstruir cada uma das 3 equações de equilíbrio de momentos em relação a uma seção diferente daquela usada no processo de cálculo das reações. Por exemplo, se no cálculo foi usado somatório de momentos M_z em relação à seção A, então um bom teste consiste em verificar se as reações obtidas satisfazem o balanço de momentos calculados em relação a uma seção B.

2. Nota-se que em cada trecho, as equações obtidas para momento fletor, esforço cortante e carga distribuída transversal, devem ser compatíveis entre si. Por exemplo, para flexão na direção z, tomando a equação de M_z obtida para um dado trecho da viga, sua derivada em relação a x deve ser igual a menos a equação obtida para $V_y(x)$. Isso corresponde à última equação em (2.49). Adicionalmente, a derivada da equação obtida para $V_y(x)$ deve ser igual a menos a equação da carga distribuída transversal $p_y(x)$. Isso corresponde à segunda equação em (2.49).

3. Para carregamento axial $p_x(x)$, a equação obtida para o esforço normal $N_x(x)$ também deve satisfazer a equação diferencial no trecho da viga.

4. Aqui fica claro que em cada trecho, todos os diagramas devem ser contínuos.

5. Qualquer descontinuidade numa seção só pode existir se uma força ou momento concentrado externo aplicado naquela seção. Por exemplo, se numa seção a força transversal F_y é nula, de $(2.49)_3$, i.e., $V_y^+ = V_y^- - F_y$, segue-se que $V_y^+ = V_y^-$, o que significa que o esforço a direita da seção é igual ao esforço a esquerda. O mesmo vale para as demais componentes de força e de momento concentrados.

6. Caso haja uma força ou momento concentrado, a descontinuidade só existirá no esforço correspondente. Por exemplo, uma força F_y só acarretará descontinuidade no diagrama de cortantes V_y, não em nenhum outro esforço. Da mesma forma, um momento concentrado m_y só gerará descontinuidade no diagrama de esforços de momentos fletores M_y.

Exemplo 2.5 – Teste de diagramas

Considere Exemplo 3, com os dados mostrados na Figuras 2.23. A solução obtida foi a seguinte: reações $R_{Cy} = 87,5$ N e $R_{Ay} = 12,5$ N, esforços no trecho AB

$$V_y^{\mathrm{AB}}(x) = -12,5 \text{ N} \qquad \text{e} \qquad M_z^{\mathrm{AB}}(x) = 12,5x \text{ Nmm}, \qquad \forall x \in (0;100) \text{ mm}, \tag{2.51}$$

e esforços no trecho BC

$$\rightarrow V_y^{\mathrm{BC}}(e) = 10^{-4}e^3 - 12,5 \qquad \text{e} \qquad M_z^{\mathrm{BC}}(e) = 1.250 + 12,5e - 2,5.10^{-5}e^4, \qquad \forall e \in (0;100) \text{ mm}. \tag{2.52}$$

Esses esforços são esboçados na Figura 2.37. Desejamos verificar a coerência dessa resposta.

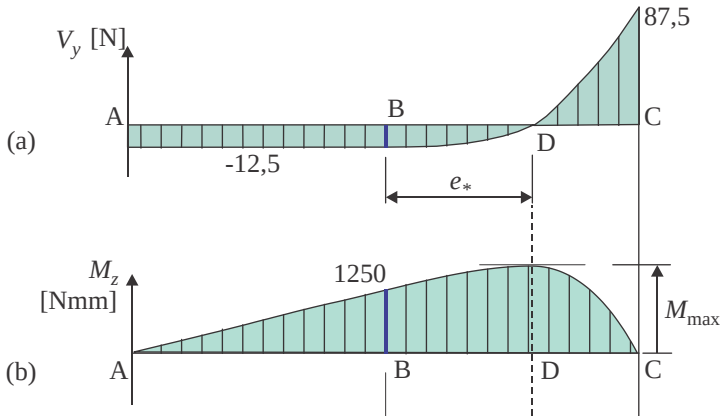


Figura 2.37: Diagrama de momento fletor e cortante dos Exemplos 3 e 5.

Solução:
A primeira parte do teste deve ser sobre as reações nos apoios. O cálculo das reações no Exemplo 3 usou o equilíbrio de momentos M_z em relação à seção A, como visto na eq. (2.28). Um teste eficiente da correção dos resultados consiste em representar o equilíbrio em relação a uma outra seção, por exemplo a seção B:

$$\begin{aligned} \sum M_z^{\mathrm{B}} \stackrel{?}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum M_z^{\mathrm{B}} &= \bar{e}F_R + aR_{\mathrm{A}} - cR_{Cy}, \\ &= 75 \times 100 + 100 \times 12,5 - 100 \times 87,5 \\ &= 0. \qquad \Rightarrow \quad \text{OK}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

A segunda parte do teste consiste em verificar as descontinuidades dos esforços nos apoios e nas seções de cargas concentradas aplicadas.

1. **Seção B.** No enunciado do Exemplo 3, Figuras 2.23, não existem forças ou momentos concentrados na seção B, logo, de $(2.49)_3$, os diagramas de cortante e momento devem ser contínuos, isto é, $V_{yB^+} = V_{yB^-}$, e $M_{ze^+} = M_{zB^-}$. Isso é verificado nos resultados dos esforços obtidos na Figura 2.37.

2. **Na seção C** existe uma força concentrada aplicada, a reação $R_C = +87,5$ N. Logo, o diagrama de cortantes deve possuir uma descontinuidade. A eq.$(2.49)_3$ toma a forma $V_y^{\mathrm{C}+} = V_y^{\mathrm{C}-} - R_C$. Note que o uso da equação pressupõe que o sentido arbitrado para a reação seja positivo no sentido positivo de y, como foi feito na solução do problema. Então, devemos ter $V_y^{\mathrm{C}+} - V_y^{\mathrm{C}-} = -R_C = -87,5$ N. No presente caso, o esforço $V_y^{\mathrm{C}+}$ à direita do apoio é nulo, de forma que se deve ter que o esforço à esquerda deve ser $V_y^{\mathrm{C}-} = R_C = 87,5$ N. Os resultados obtidos no diagrama confirmam. Como o apoio é uma rótula, e não há carga externa de momento aplicada ali, devemos ter $M_z^{C^-} = M_z^{C^+} = 0$.

3. **Na seção A** atua a força concentrada externa $R_{Ay} = 12,5$ N. Tomamos novamente $(2.49)_3$ para os cortantes a esquerda e direita $V_y^{A+} = V_y^{A-} - R_{Ay}$. Como o esforço à esquerda V_y^{A-} é nulo (está fora da viga), os resultados devem ser tais que $V_y^{A+} = -R_{Ay} = -12,5$ N, o que é confirmado pelo diagrama. Como o apoio é uma rótula, e não há carga externa de momento aplicada ali, devemos ter $M_z^{A^-} = M_z^{A^+} = 0$, o que também é verificado pelos resultados.

4. **Equações diferenciais no trecho AB**. Nota-se que as equações obtidas para os esforços, (2.29), satisfazem as equações diferenciais de equilíbrio $(2.49)_2$, i.e., verifica-se que $dM_z^{AB}/dx = 12,5 = -V_y^{AB}(x)$, e $dV_y^{AB}/dx = 0 = -p_y(x)$, lembrando que no trecho a carga p_y é nula.

5. **Equações diferenciais no trecho BC**. Nota-se que as equações obtidas para os esforços, (2.29), satisfazem as equações diferenciais de equilíbrio $(2.49)_2$, i.e., verifica-se que

$$\begin{aligned} \frac{dM_z^{BC}}{dx} &= \frac{d}{dx}(1.250 + 12,5e - 2,5.10^{-5}e^4) = -10^{-4}e^3 + 12,5 = -V_y^{BC}(x), \text{ e} \\ \frac{dV_y^{BC}}{de} &= \frac{d(10^{-4}e^3 - 12,5)}{de} = 3 \cdot 10^{-4}e^2 = -p_y. \end{aligned} \tag{2.54}$$

A carga no trecho BC foi dada como $q = 3 \cdot 10^{-4}e^2$, no sentido negativo de y, o que corresponde a $p_y = -3 \cdot 10^{-4}e^2$. Lembremos que nas equações diferenciais deduzidas, **cada carga distribuída é positiva quando no sentido positivo do respectivo eixo.**

Exemplo 2.6 – Diagrama com cargas concentradas

Determine os diagramas de esforços para a viga do Exemplo 2.
Solução:
As reações já haviam sido determinadas, de forma que se pode usar o método das seções em cada trecho.

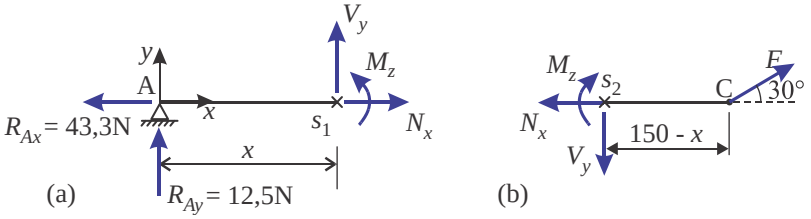


Figura 2.38: Diagramas de corpo livre para corte no trecho AB e no trecho BC.

Trecho AB

Fazemos um corte numa seção genérica s_1, como mostrado na Figura 2.18b, situado a uma distância x do apoio A. O diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte é mostrado na Figura 2.38a. As equações de equilíbrio resultam em:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N_x = 43,3 \text{ N}, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y = -12,5 \text{ N}, \\ \sum M_z^{s_1} &\rightarrow M_z(x) = 12,5x, \qquad \text{para} \quad \forall x \in (0; 100 \text{ mm}). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Trecho BC

Fazemos um corte s_2 numa seção genérica do trecho BC, situado a uma coordenada x do apoio A, como ilustrado na Figura 2.18b. O diagrama de corpo livre do lado direito do corte é visto na Figura 2.38b. (Note que, da mesma forma, poderíamos ter tomado o diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte, o que resultaria na mesma solução). As equações de equilíbrio produzem:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow N_x = F\cos 30^\circ \rightarrow \boxed{N_x = 43,3 \text{ N}} \\
\sum F_y &\rightarrow V_y = F \text{ sen } 30^\circ \rightarrow \boxed{V_y = 25 \text{ N}} \\
\sum M_z^{s_2} &\rightarrow M_z = F \text{ sen } 30^\circ \times (150 - x) \\
&\rightarrow \boxed{M_z(x) = -25x + 3.750, \quad \text{para} \quad \forall x \in (100; 150) \text{ mm.}}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

As equações (2.55) e (2.56) podem então ser usadas para esboçar os diagramas, como visto na Figura 2.39.

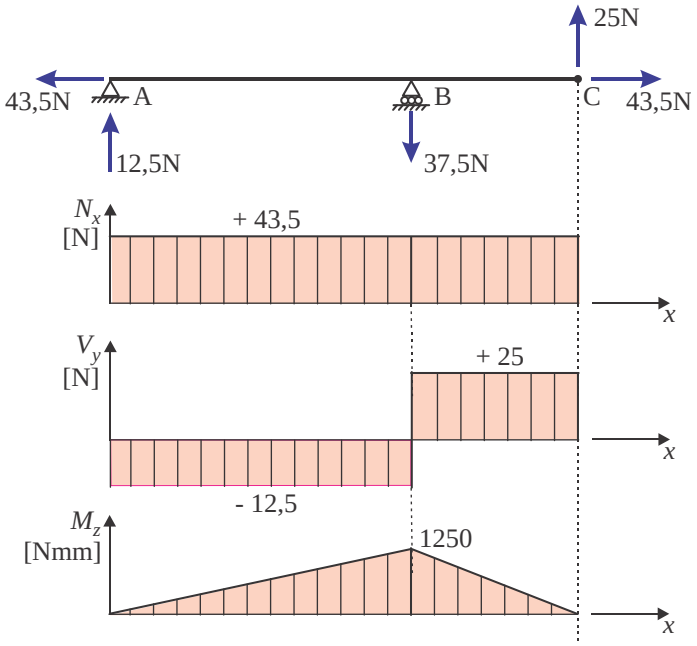


Figura 2.39: Diagramas de esforços do exemplo 6.

Observe que os diagramas passam nos testes indicados, isto é, as equações de esforços (2.55) e (2.56) satisfazem às equações de equilíbrio (2.43). Além disso nas seção sob carga concentrada, como a seção B, a eq.(2.48) é satisfeita. (Note que o salto no diagrama de V_y tem exatamente o valor 37,5 N da carga aplicada na seção, e o momento é contínuo, pois não há carga de momento concentrado em B).

Exemplo 2.7 – Momento fletor concentrado

Determine as reações de apoio e os esforços na estrutura da Figura 2.40 para $a = 2$ m, $b = 3$ m, carga distribuída uniforme $q = 100$ N/m e momento fletor concentrado na extremidade A no valor $m = 1$ kNm.

Solução:

Inicialmente definimos um sistema de coordenadas $x - y$ e indicamos as 2 reações não nulas, R_B e R_C, como indicado na Figura 2.40. As equações globais de equilíbrio são:

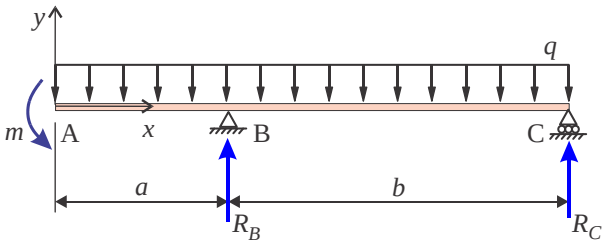


Figura 2.40: Estrutura do Exemplo 6.

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow R_B + R_C - qL = 0, \\ \sum M_z^B &\rightarrow m + R_C b + \frac{q\,a^2}{2} - \frac{q\,b^2}{2} = 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde fez-se o somatório de momentos em relação à seção B, e $L = a + b$ é o comprimento total da viga. A solução do sistema é: $R_C = [q(b^2 - a^2)/2 - m]/b$ e $R_B = qL - R_C$. Substituindo os dados obtém-se as reações: $R_B = 750$ N e $R_C = -250$ N. Logo, a reação R_C é uma força de 250 N orientada na direção negativa de y.

A próxima etapa consiste em aplicar o método das seções em cada um dos dois trechos da viga.

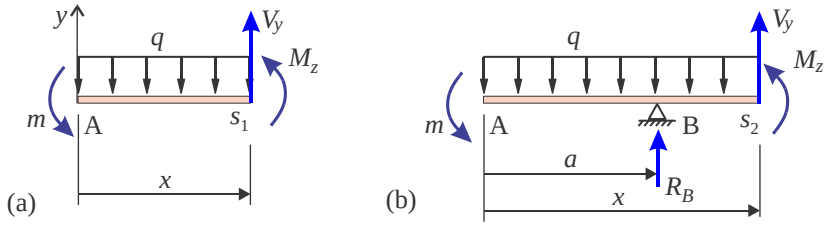


Figura 2.41: Diagramas de corpo livre para o método das seções na viga do Exemplo 6.

Trecho AB

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (0; 2)$, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.41a, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow V_y - qx = 0, \\ \sum M_z^{s_1} &\rightarrow M_z + qx\left(\frac{x}{2}\right) + m = 0 \end{aligned}$$

cuja solução é: $V_y = qx$ e $M_z = -qx^2/2 - m$. Substituindo os dados do problema tem-se: $V_y = 100x$ e $M_z = -50x^2 - 1.000$, para $\forall x \in (0; 2)$ m. O momento máximo ocorre na seção onde $dM_z/dx = 0$, isto é, $-50 \times 2\,\bar{x} = 0$, logo, $\bar{x} = 0$. O valor do momento máximo no trecho AB é obtido pela equação de momento, aplicada na coordenada $\bar{x} = 0$, isto é, $M_{z\,\max} = -50\bar{x}^2 - 1.000 = -1.000$ Nm.

Trecho BC

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (2; 4)$, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.41b, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\sum F_y \rightarrow V_y + R_B - qx = 0,$$
$$\sum M_z^{s2} \rightarrow M_z + qx\left(\frac{x}{2}\right) + m - R_B(x-a) = 0$$

cuja solução é: $V_y = qx - R_B$ e $M_z = R_B(x-a) - qx^2/2 - m$. Substituindo os dados do problema tem-se: $V_y = 100x - 750$ e $M_z = -50x^2 + 750(x-2) - 1.000$, para $\forall x \in (2;4)$ m. O momento máximo ocorre na seção onde $dM_z/dx = 0$, isto é, $-50 \times 2\,\bar{x} + 750 = 0$, logo, $\bar{x} = 7,5$ m. Essa seção encontra-se fora da viga, logo não há ponto de inflexão no trecho BC.

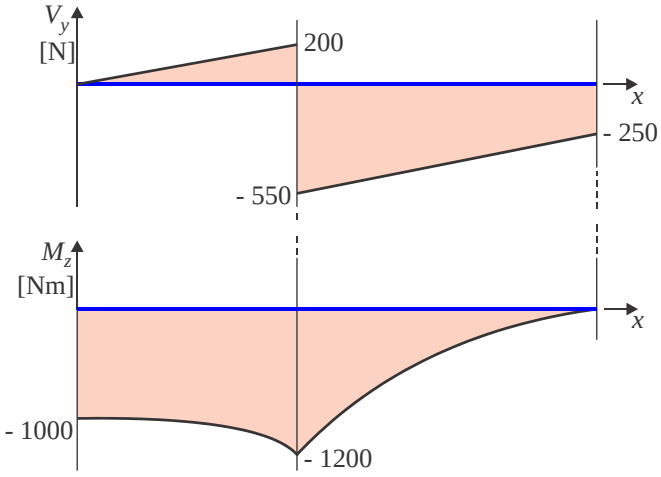


Figura 2.42: Esforços cortante e de momento fletor no Exemplo 6.

A Figura 2.42 mostra os esboços dos diagramas de esforços cortante e de momento fletor na viga. Nota-se que os máximos na viga como um todo são: $V_{y\,\max} = -550$ N e $M_{z\,\max} = -1.200$ Nm, ambos na seção B. Esses valores são importantes para o dimensionamento da seção transversal da viga, ou para a análise de sua segurança, conforme as teorias apresentadas nos demais capítulos.

Exemplo 2.8 – Sequência de vãos

Determine as reações de apoio e os esforços na viga da Figura 2.43, para carga distribuída uniforme $q = 500$ N/m, $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 4$ kN, $F_3 = 500$ N e um momento fletor concentrado $m = 2$ kNm aplicado na seção C.

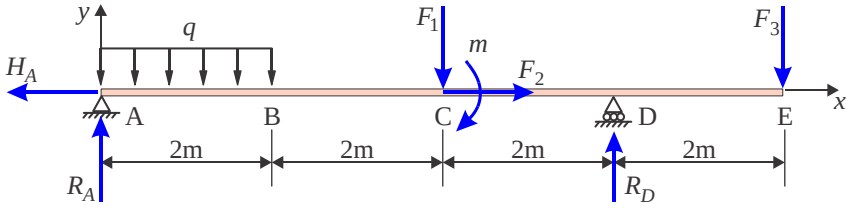


Figura 2.43: Estrutura do Exemplo 7.

Solução:
Inicialmente definimos um sistema de coordenadas $x - y$ e indicamos as 3 reações não nulas, H_A, R_A e R_D, como indicado na Figura 2.43. As equações globais de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}\sum F_x &\rightarrow H_A - F_2 = 0,\\ \sum F_y &\rightarrow R_A + R_D - q(2) - F_1 - F_3 = 0,\\ \sum M_z^A &\rightarrow m - R_D(6) + F_1(4) + F_3(8) + 2q\left(\frac{2}{2}\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.58}$$

onde fez-se o somatório de momentos em relação à seção A. Substituindo os dados obtém-se as reações: $H_A = 4$ kN, $R_A = 667$ N e $R_D = 1.833$ N.

A próxima etapa consiste em aplicar o método das seções em cada um dos quatro trechos da viga.

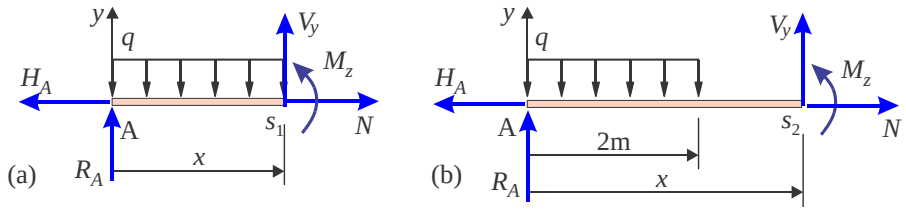


Figura 2.44: Diagramas de corpo livre para os esforços no Exemplo 8.

Trecho AB

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (0;2)$ m, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.44a, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}\sum F_x &\rightarrow H_A - N = 0,\\ \sum F_y &\rightarrow V_y + R_A - qx = 0,\\ \sum M_z^{s1} &\rightarrow M_z + qx\left(\frac{x}{2}\right) - R_A\ x = 0\end{aligned}$$

cuja solução é: $N = H_A$, $V_y = qx - R_A$ e $M_z = R_A x - qx^2/2$. Substituindo os dados do problema tem-se: $N = 4$ kN, $V_y = 500x - 667$ e $M_z = -250x^2 + 667x$, para $\forall x \in (0;2)$ m. O momento máximo ocorre na seção onde $dM_z/dx = 0$, isto é, $-250 \times 2\ \bar{x} + 667 = 0$, logo, $\bar{x} = 1,33$ m. O valor do momento máximo no trecho AB é obtido pela equação de momento, aplicada na coordenada $\bar{x} = 0$, isto é, $M_{z\,\max} = -250\bar{x}^2 + 667\bar{x} = 445$ Nm.

Trecho BC

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (2;4)$ m, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.44b, onde foi tomado o lado esquerdo do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}\sum F_x &\rightarrow H_A - N = 0,\\ \sum F_y &\rightarrow V_y + R_A - 2q = 0,\\ \sum M_z^{s2} &\rightarrow M_z + 2q(x-1) - R_A\ x = 0\end{aligned}$$

cuja solução é: $N = H_A$, $V_y = 2q - R_A$ e $M_z = R_A x - 2qx + 2q$. Substituindo os dados do problema tem-se: $N = 4$ kN, $V_y = 333$ N e $M_z = -333x + 1.000$, para $\forall x \in (2;4)$ m. Os valores de momentos nos extremos do intervalo são: $M_z^{B+} = 333$ Nm, a direita da seção B, e $M_z^{C-} = -333$ Nm a esquerda da seção C.

Trecho CD

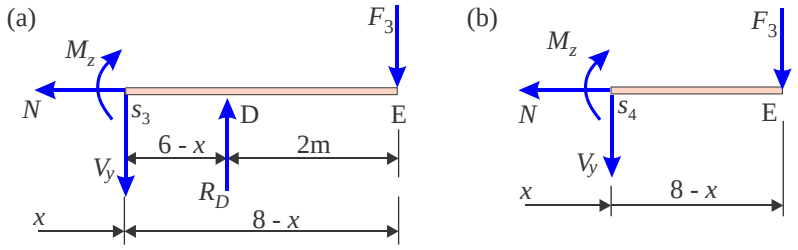


Figura 2.45: Diagramas de corpo livre para os esforços no trecho DE do Exemplo 7.

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (4;6)$ m, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.45a, onde foi tomado o lado direito do corte (note que o lado esquerdo poderia ter sido tomado, o que resultaria nos mesmos resultados). As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y + F_3 - R_D = 0, \\ \sum M_z^{s3} &\rightarrow M_z + F_3(8-x) - R_D\ (6-x) = 0 \end{aligned}$$

cuja solução é: $N = 0$, $V_y = R_D - F_3$ e $M_z = (F_3 - R_D)x + (6R_D - 8F_3)$. Substituindo os dados do problema tem-se: $N = 0$, $V_y = 1.333$ N e $M_z = -1.333x + 7.000$, $\forall x \in (4;6)$ m. Os valores de momentos nos extremos do intervalo são: $M_{zC^+} = 1.667$ Nm, a direita da seção C, e $M_z^{D^-} = -1.000$ Nm a esquerda da seção D. Nota-se que **o momento fletor é descontínuo na seção C** (o momento à esquerda de C foi calculado no trecho BC com o valor $M_z^{C^-} = -333$ Nm). Isso ocorre pela presença do momento concentrado aplicado ali. O valor da descontinuidade deve ser igual ao da carga aplicada na seção. No presente caso, $M_z^{C^+} - M_z^{C^-} = 1.667 - (-333) = 2.000$ Nm, que é o valor de m.

Trecho DE

Faz-se um corte numa seção arbitrária de coordenada $x \in (6;8)$ m, e monta-se o diagrama de corpo livre, como mostrado na Figura 2.45b, onde foi tomado o lado direito do corte. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y + F_3 = 0, \\ \sum M_z^{s3} &\rightarrow M_z + F_3(8-x) = 0 \end{aligned}$$

cuja solução é: $N = 0$, $V_y = -F_3$ e $M_z = F_3x - 8F_3$. Substituindo os dados do problema tem-se: $N = 0$, $V_y = 4$ kN e $M_z = 500x - 4.000$, para $\forall x \in (6;8)$ m.

A Figura 2.46 mostra os esboços dos diagramas de esforços normal, cortante e de momento fletor na viga. Nota-se que os máximos na viga como um todo são: $N_{\max} = 4$ kN, $V_{y\max} = 1.333$ N e $M_{z\max} = -1.667$ Nm, todos na seção C.

2.6 Sistemas de coordenadas locais

A determinação e a representação dos esforços em estruturas de barras ou vigas frequentemente se tornam mais simples com o auxílio de sistemas locais de coordenadas. Principalmente em estruturas planas e tridimensionais, o mais adequado é que seja definido um sistema local para cada elemento.

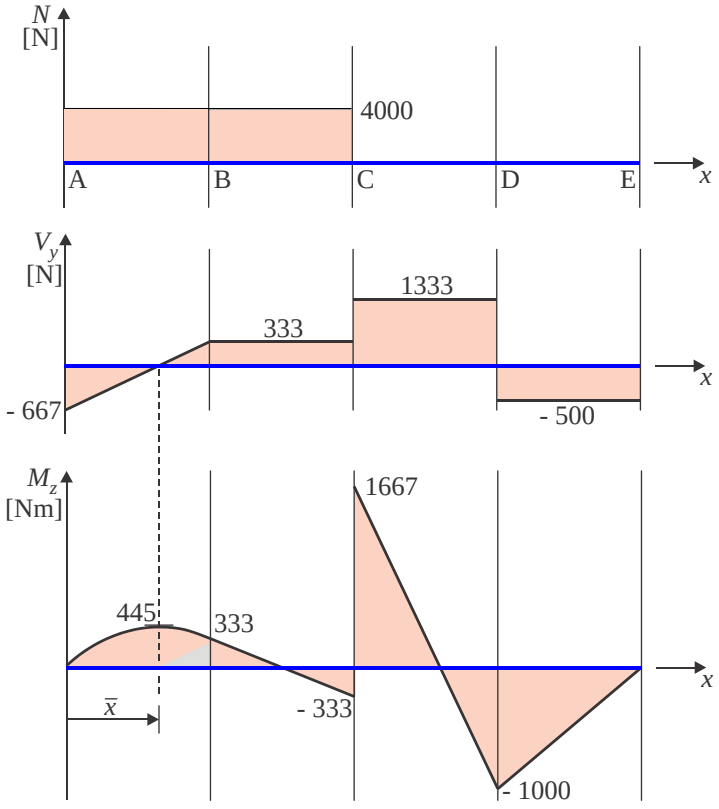


Figura 2.46: Diagramas de esforços do Exemplo 7.

Esse sistema é definido com a origem o_l numa das extremidades da barra ou viga, e o eixo x_l local estendendo-se ao longo o elemento em direção à extremidade oposta. Se a estrutura for plana, o eixo local z_l pode ser orientado preferencialmente paralelo ao eixo global z. Nesse caso, o eixo local y_l deve estar no mesmo plano xy, e orientado de forma que a tríade local o_l-x_l-y_l-z_l seja anti-horária. Isso corresponde à situação em que o sistema local o_l-x_l-y_l-z_l fica definido por uma rotação do sistema global em torno do eixo z.

A convenção de esforços a ser usada deve a mesma definida para o problema em todos os elementos, aplicada ao sistema local de coordenadas.

Deve-se observar que os esforços na seção a esquerda e direita de um dado nó podem apresentar uma aparente falta de compatibilidade. Os valores a esquerda e a direita são obtidos por equações associadas a diferentes sistemas de coordenadas. A compatibilidade deve ser feita identificando fisicamente os valores dos esforços. Esses aspectos podem ser vistos mais claramente através dos dois exemplos a seguir.

Exemplo 2.9 – Estrutura plana e sistemas locais de coordenadas

Consideremos a estrutura mostrada na Figura 2.47, engastada na seção A e submetida a uma força vertical F na extremidade D. Determine as reações de apoio e os esforços para $F = 25$ kN, $a = 0,2$ m, $L = 1$ m.

Solução:

Inicialmente definimos um sistema de coordenadas global $Axyz$ como mostrado na figura. Associado a esse sistema, indicamos as reações no apoio A. As equações globais de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_y \quad &\rightarrow \quad R_A - F = 0, \\ \sum M_z^A \quad &\rightarrow \quad R_M - F(2a) = 0, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad R_A = F \quad \text{e} \quad R_M = 2aF. \tag{2.59}$$

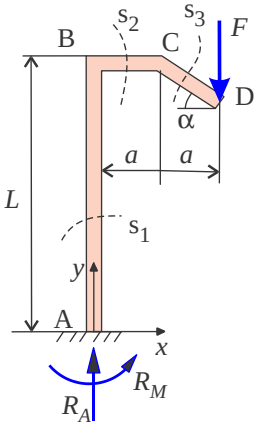


Figura 2.47: Dados do Exemplo 1.

Para os esforços usamos o método das seções, fazendo cortes em seções arbitrárias s_1, s_2 e s_3 em cada um dos trechos da estrutura. Para o trecho AB definimos um sistema local de coordenadas Ax_1y_1z, com eixo x_1 alinhado com o segmento AB da estrutura, como mostrado na Figura 2.48a para o corte s_1. Note que os eixos local e global z são coincidentes. Os esforços são indicados usando a mesma convenção de sinais mostrado na Figura 2.16, aplicado ao sistema local de coordenadas. Nota-se que, em relação a esse sistema, não há dúvida de qual seja o lado esquerdo e direito em relação ao corte. No presente caso tomamos o lado esquerdo do corte.

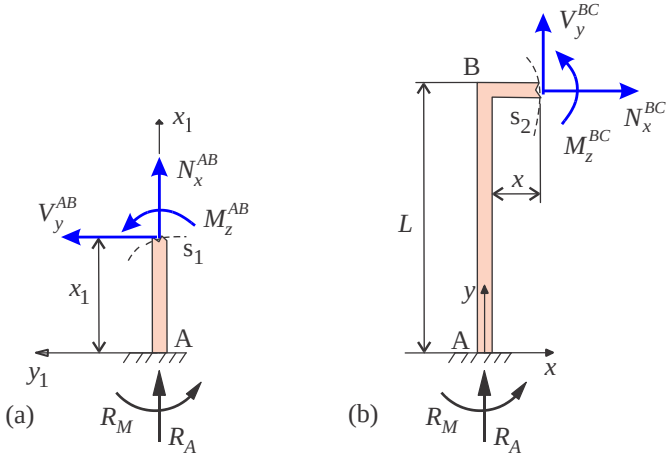


Figura 2.48: (a) Corte no trecho AB, com sistema local de coordenadas, (b) corte no trecho BC.

As equações de equilíbrio para os esforços numa seção de coordenada local arbitrária x_1 no **trecho AB** são:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{x_1} \rightarrow N_x^{AB}(x_1) + R_A = 0, & \Rightarrow & N_x^{AB}(x_1) = -R_A = -25 \text{ kN}, \\ \sum F_{y_1} \rightarrow V_y^{AB}(x_1) = 0 & & \\ \sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{AB}(x_1) + R_M = 0, & \Rightarrow & M_z^{AB}(x_1) = -R_M = -10 \text{ kNm}, \quad \forall x_1 \in]0;1[\text{m}. \end{array} \tag{2.60}$$

Para o **trecho BC** usamos o sistema global de coordenadas, uma vez que o eixo x é paralelo ao segmento AB. O diagrama de corpo livre para o lado esquerdo do corte s_2 é ilustrado na Figura 2.48b. As equações de equilíbrio para os esforços numa seção de coordenada arbitrária x no **trecho BC** são:

$$\begin{array}{lll} \sum F_x \rightarrow N_x^{BC}(x) = 0, & & \\ \sum F_y \rightarrow V_y^{BC}(x) + R_A = 0 & \Rightarrow & V_y^{BC}(x) = -R_A = -25 \text{ kN}, \\ \sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{BC}(x) + R_M - R_A x = 0, & \Rightarrow & M_z^{BC}(x) = 25x - 10 \text{ [kNm]}, \quad \forall x \in]0; 0,2[\text{m}. \end{array} \tag{2.61}$$

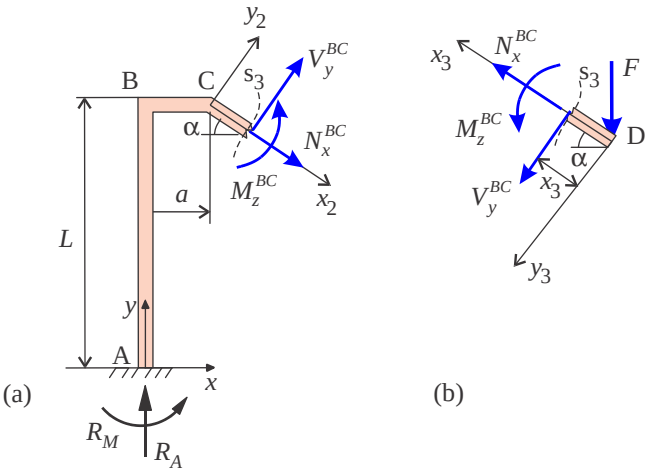


Figura 2.49: Corte no trecho CD, tomando o lado esquerdo e o direito.

Para o **trecho CD** usamos o sistema local de coordenadas, Cx_2y_2z, com eixo x_2 alinhado com o segmento CD da estrutura, como mostrado na Figura 2.49a para o lado esquerdo do corte s_3. Com o diagrama de corpo livre mostrado, as equações de equilíbrio para os esforços numa seção de coordenada arbitrária x_2 no **trecho CD** são:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{x_2} \rightarrow N_x^{CD}(x_2) + R_A \cos\alpha = 0, & \Rightarrow & N_x^{CD}(x_2) = 17,7 \text{ kN}, \\ \sum F_{y_2} \rightarrow V_y^{CD}(x_2) + R_A \text{ sen } \alpha = 0 & \Rightarrow & V_y^{CD}(x_2) = -17,7 \text{ kN}, \\ \sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{CD}(x_2) + R_M - R_A(a + x_2 \cos\alpha) = 0, & \Rightarrow & M_z^{CD}(x_2) = -5 + 17,7x_2 \text{ [kNm]}, \end{array} \tag{2.62}$$

$\forall x_2 \in (0; 0,238)$ [m]. Nesse ponto observamos que podemos resolver cada trecho, o CD, por exemplo, usando um outro sistema local de coordenadas, por exemplo, o sistema Dx_3y_3z, com eixo x_2 mostrado na Figura 2.49b, com origem na seção D, e o eixo axial x_3 orientado no sentido D→C. As equações de equilíbrio se tornam

$$\begin{array}{lll} \sum F_{x_3} \rightarrow N_x^{CD}(x_3) - F \text{ sen } \alpha = 0, & \Rightarrow & N_x^{CD}(x_3) = 17,7 \text{ kN}, \\ \sum F_{y_3} \rightarrow V_y^{CD}(x_3) - F \cos\alpha = 0 & \Rightarrow & V_y^{CD}(x_3) = -17,7 \text{ kN}, \\ \sum M_z^{s_1} \rightarrow M_z^{CD}(x_3) - (F \cos\alpha)\, x_3 = 0, & \Rightarrow & M_z^{CD}(x_3) = 17,7x_3 \text{ [kNm]}, \quad \forall x_3 \in]0; 0,238[\text{m}. \end{array} \tag{2.63}$$

Nota-se que os sinais dos esforços normal e cortante permanecem os mesmos nos dois sistemas locais, uma vez que ambos os eixos x_2 e x_3 são colineares com a barra CD. Entretanto os momentos se tornam distintos. Podemos tomar a seção imediatamente a direita de C, na barra CD. Da solução $M_z^{CD}(x_2) = -5 + 17,7x_2$ temos $M_z^{CD}(x_2 = 0) = -5$ kNm. Entretanto, da solução $M_z^{CD}(x_3) = 17,7x_3$ temos no mesmo ponto, C, o valor $M_z^{CD}(x_3 = 0,238) = +5$ kN. No trecho BC, o esforço é $M_z^{BC}(x) = 25x - 10$, de forma que na seção à esquerda de C, o momento é $M_z^{BC}(x = a) = -5$ kNm. Uma vez que não há momento externo concentrado aplicado na seção C, devido ao equilíbrio local deve-se ter que os esforços a esquerda e a direita devem ter o mesmo valor. Isso gera uma aparente inconsistência nos resultados de $M_z^{CD}(x_3 = 0,238) = +5$ kN, quando esperamos o valor -5 kNm. A Figura 2.50 mostra o diagrama de corpo livre em torno da seção C, e do trecho CD, com o esforço em C^+ obtido pelo sistema de coordenadas Dx_3y_3z. Nota-se que o valor à esquerda

de C, $M_z^{BC}(x = a) = -5$ kNm, é um momento de 5 kNm anti-horário, como indicado. Então a direita, C^+, devemos ter 5 kNm horário. Esse valor a direita de C corresponde corretamente com aquele obtido em C^+ obtido pelo sistema de coordenadas Dx_3y_3z, que à esquerda do corte C^+ no trecho CD, deve ser anti-horário como ilustrado.

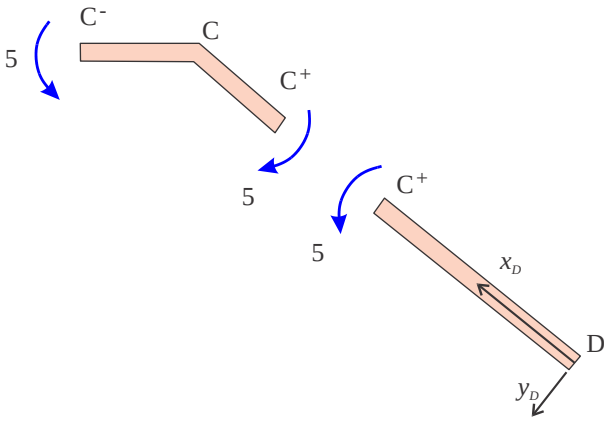


Figura 2.50: Esforços de momento obtidos na seção C^+ em suas orientações físicas.

Então os valores são fisicamente coerentes em qualquer sistema de coordenadas que se use em cada trecho. Entretanto, os sinais obtidos pelas equações de cada trecho não serão compatíveis se os eixos x dos dois sistemas tiverem orientações opostas. Com isso, adotaremos a seguinte regra prática para facilitar a identificação de compatibilidade entre dois trechos contíguos das estruturas no presente texto. Consideremos uma estrutura plana definida por trechos retos, AB, BC, CD, etc.

Sempre definimos o sistema local de coordenadas de um trecho arbitrário BC, Bx_By_Bz, adotando sua origemna seção final B do trecho anterior AB. Esse sistema terá o eixo axial x_B sempre orientado de B para C, isto é, B→C.O trecho seguinte, CD, terá um sistema local Cx_Cy_Cz, com origem na seção C, e eixo x_C orientado por C→D.

(2.64)

Esse procedimento faz com que os valores de momentos internos obtidos pelas equações de cada trecho sempre guardem diretamente a relação de equilíbrio em torno de uma seção, dada pelas relações $(2.49)_3$, sem a necessidade de interpretações físicas adicionais para compatibilização de sinais.

Os diagramas dos esforços do exemplo são vistos na Figura 2.51.

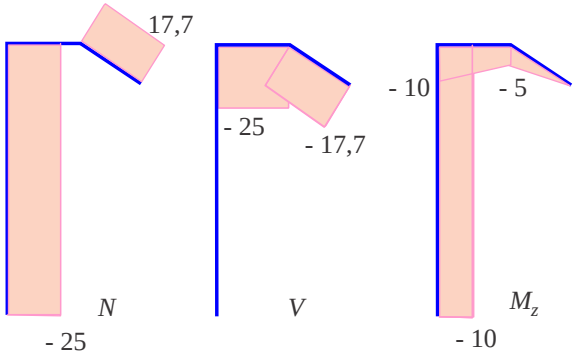


Figura 2.51: Diagramas dos esforços do exemplo 9, em kN e kNm.

2.7 Exemplos adicionais

Normalmente, problemas hiperestáticos não são passíveis de solução através do uso apenas das equações de equilíbrio globais, exatamente devido à insuficiência da quantidade destas em relação no número de reações incógnitas. Entretanto, numa classe de problemas essa deficiência pode ser contornada: é o caso em que a estrutura possui uma construção aberta com vínculos internos. Cada vínculo interno define uma equação de equilíbrio independente adicional, que pode levar à determinação do problema hiperestático. Os detalhes são vistos nos exemplos que seguem.

Exemplo 2.10 – Estrutura planas hiperestática

Determine as reações de apoio e os esforços na estrutura da Figura 2.52 para $F = 20$ kN. Na seção C existe uma articulação.

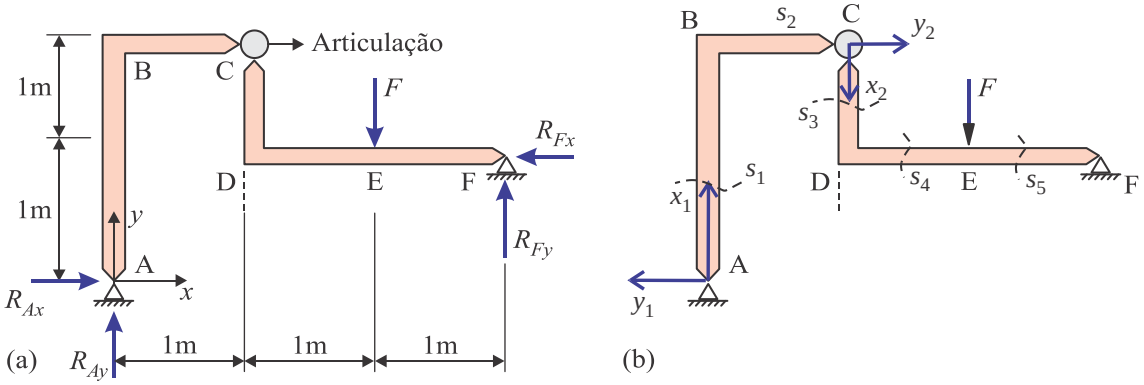


Figura 2.52: (a) Estrutura do Exemplo 10, com reações, (b) indicação dos sistemas locais de coordenadas usados na solução.

Solução:
Inicialmente definimos um sistema de coordenadas $Axyz$ e indicamos as 4 reações não triviais R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Fx} e R_{Fy}, como indicado na Figura 2.52a. As equações globais de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow R_{Ax} - R_{Fx} = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow R_{Ay} + R_{Fy} - F = 0, \\ \sum M_z^A &\rightarrow R_{Fy}(3) + R_{Fx}(1) - F(2) = 0. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Note que existem quatro reações incógnitas e apenas três equações de equilíbrio. **Observe que é inútil tentar obter mais uma equação, por exemplo calculando o momento em relação a um outro ponto que não A**. Isso apenas resultaria numa equação linearmente dependente dos três primeiras. Entretanto, a rótula interna oferece uma possibilidade concreta. Façamos um corte exatamente na seção C, e construamos um diagrama de corpo livre de um dos lados, o esquerdo por exemplo, como na Figura 2.53a.

Para esse lado da estrutura, podemos novamente escrever três equações de equilíbrio que serão independentes das equações (2.65), pois incorporam os esforços N_C, V_y^C e M_z^C em C:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N^C - R_{Ax}, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y^C = -R_{Ay}, \\ \sum M_z^C &\rightarrow M_z^C + R_{Ax}(2) - R_{Ay}(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

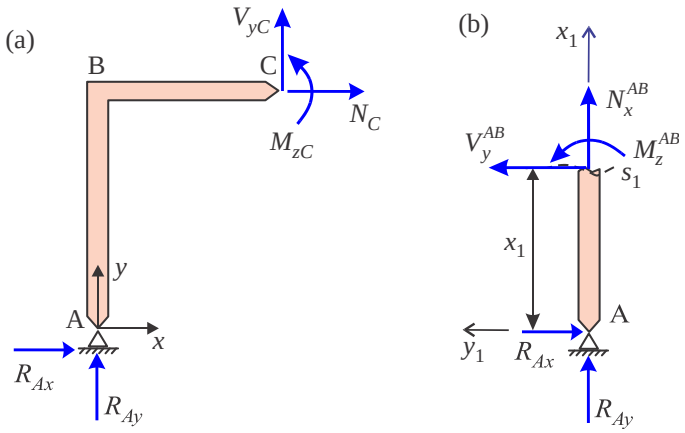


Figura 2.53: Diagrama de corpo livre para o corte sobre a rótula interna, (b) esforços no trecho AB, com o sistema local de coordenadas Ax_1y_1z.

Embora as duas primeiras sejam corretas, elas são, neste ponto, inúteis, uma vez que desconhecemos tanto as reações quanto os esforços. Entretanto, a terceira equação é útil, uma vez que **sabemos, a priori, que o esforço M_z^C na rótula é nulo**. Note que esse conhecimento não vem de uma dedução. É conhecido fisicamente, pelo fato que a rótula não resiste esforços de momento: ela apenas gira um lado em relação ao outro, livremente. Assim, $(2.66)_3$ ajunta-se às três equações (2.65) num sistema determinado, que produz a solução das quatro reações:

$$R_{Ax} = R_{Fx} = \frac{F}{5}, \qquad R_{Ay} = \frac{2F}{5}, \qquad R_{Fy} = \frac{3F}{5}. \tag{2.67}$$

Esforços no trecho AB. A determinação dos esforços pode ser feita pelo método das seções. Definimos um sistema local de coordenadas Ax_1y_1z, com origem na seção A, e eixo x_1 orientado para a seção B, como ilustrado na Figura 2.52b. A Figura 2.53b mostra o diagrama de corpo livre para um corte numa posição arbitrária s_1, em uma coordenada arbitrária x_1. Os esforços são:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_1} &\rightarrow N_{x_1}^{AB}(x_1) = -R_{Ay} = -\frac{2F}{5}, \\
\sum F_{y_1} &\rightarrow V_{y_1}^{AB}(x_1) = R_{Ax} = \frac{F}{5}, \\
\sum M_z^s &\rightarrow M_z^{AB}(x_1) = -R_{Ax}x_1 = -\frac{Fx_1}{5}, \ \forall x_1 \in (0;2) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Esforços no trecho BC. Como esse trecho é paralelo ao eixo x global, podemos usar o sistema global de coordenadas, fazendo um corte numa seção arbitrária s_2 de coordenada x. Montando o diagrama de corpo livre como mostrado na Figura 2.54a, os esforços são obtidos por:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_1} &\rightarrow N_x^{BC}(x) = -R_{Ax} = -\frac{F}{5}, \\
\sum F_{y_1} &\rightarrow V_y^{BC}(x) = -R_{Ay} = -\frac{2F}{5}, \\
\sum M_z^{s_2} &\rightarrow M_z^{BC}(x) = R_{Ay}x - (2)R_{Ax} = \frac{2F}{5}(x-1), \ \forall x_1 \in (0;1) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Esforços no trecho CD. Definimos um sistema local de coordenadas Cx_2y_2z, com origem na seção C, e eixo x_2 orientado para a seção D, como ilustrado na Figura 2.54b. A figura mostra o diagrama de corpo livre para um corte numa posição arbitrária s_3 do trecho BC, em uma coordenada arbitrária x_2. Note que tomamos o lado direito do corte em relação ao sistema local de coordenadas.

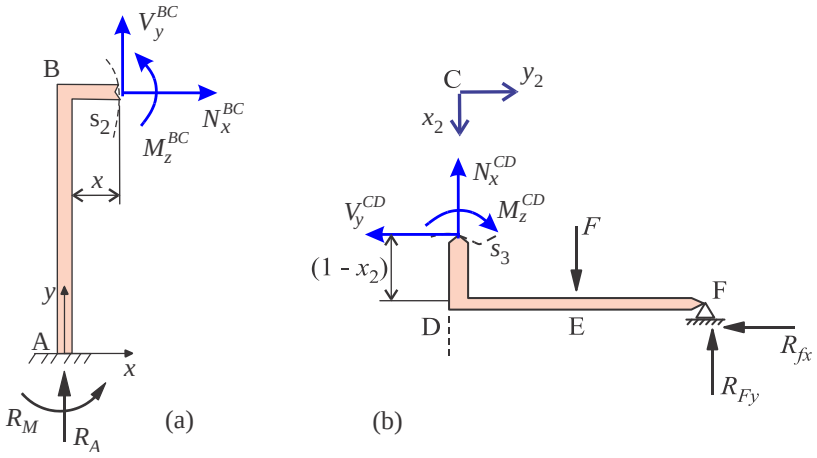


Figura 2.54: (a) diagrama de corpo livre para o trecho BC e (b), para o trecho CD com sistema local de coordenadas Cx_2y_2z.

Então, o diagrama de corpo livre apresenta na figura os esforços em suas convenções adequadas. Eles são obtidos por:

$$\begin{aligned}
\sum F_{x_2} &\rightarrow N_{x_2}^{CD}(x_2) = F - R_{Fy} = \frac{2F}{5}, \\
\sum F_{y_2} &\rightarrow V_{y_2}^{CD}(x_2) = R_{Fx} = -\frac{F}{5}, \\
\sum M_z^{s_3} &\rightarrow M_z^{CD}(x_2) = -(1)F + (2)R_{Fy} - R_{Fx}(1 - x_2) = \frac{Fx_2}{5}, \ \forall x_2 \in (0;1) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

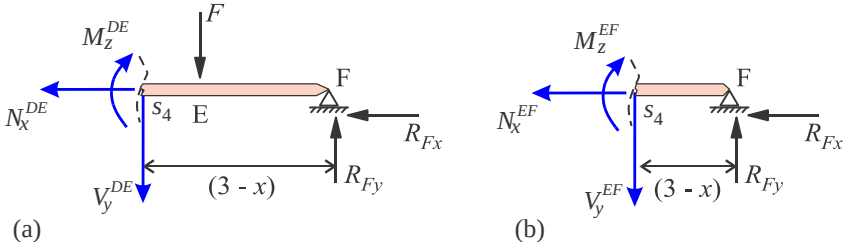


Figura 2.55: (a) diagrama de corpo livre para o trecho DE e (b), para o trecho EF.

Esforços nos trechos DE e EF. Como esses trechos são paralelos ao eixo x global, podemos usar o sistema global de coordenadas em ambos os trechos. Fazendo cortes em seções arbitrárias s_4 e s_5. Montando os diagramas de corpo livre como mostrados na Figura 2.55, os esforços são obtidos por:

trecho DE

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow N_x^{DE}(x) = F - R_{Fx} = -\frac{F}{5}, \\
\sum F_y &\rightarrow V_y^{DE}(x) = F - R_{Fy} = \frac{2F}{5}, \\
\sum M_z^{s_4} &\rightarrow M_z^{DE}(x) = (2 - x)F - (3 - x)R_{Fy} = \frac{2Fx}{5} + \frac{F}{5}, \ \forall x \in (1;2) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

trecho EF

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow N_x^{EF}(x) = -R_{Fx} = -\frac{F}{5}, \\
\sum F_y &\rightarrow V_y^{EF}(x) = R_{Fy} = \frac{3F}{5}, \\
\sum M_z^{s_4} &\rightarrow M_z^{EF}(x) = (3-x)R_{Fy} = \frac{9F}{5} - \frac{3Fx}{5}, \ \forall x \in (2;3) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Podemos sumarizar os esforços em todos os trechos e esboçar os diagramas como na Figura 2.56. Como regra para os gráficos, representamos os valores negativos das funções "do lado de dentro" da estrutura.

$$\begin{array}{llll}
\text{AB} \rightarrow & N^{AB}(y) = -\frac{2F}{5}, & V^{AB}(y) = \frac{F}{5}, & M_z^{AB}(y) = -\frac{Fx_1}{5}, \quad \forall x_1 \in (0;2) \text{ m}, \\
\text{BC} \rightarrow & N^{BC}(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{-2F}{5}, & M_z(x) = \frac{2F}{5}(x-1), \quad \forall x \in (0;1) \text{ m}, \\
\text{CD} \rightarrow & N(y) = \frac{2F}{5}, & V(y) = \frac{-F}{5}, & M_z(y) = \frac{Fx_2}{5}, \quad \forall x_2 \in (0;1) \text{ m}, \\
\text{DE} \rightarrow & N(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{-2F}{5}, & M_z(x) = \frac{F}{5}(2x+1), \quad \forall x \in (1;2) \text{ m}, \\
\text{EF} \rightarrow & N(x) = -\frac{F}{5}, & V(x) = \frac{3F}{5}, & M_z(x) = \frac{3F}{5}(3-x), \quad \forall x \in (2;3) \text{ m}.
\end{array} \tag{2.73}$$

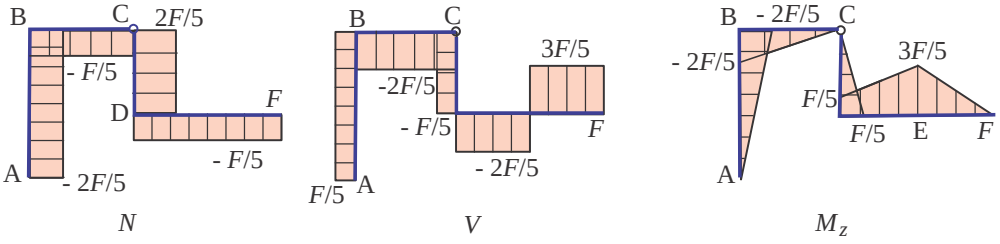


Figura 2.56: Esforços no Exemplo 10, em unidades [N] e [m].

Exemplo 2.11 – Estrutura com cabo

Considere o sistema de elevação de carga simples ilustrado na Figura 2.57a. Consiste em uma base horizontal ABCD, apoiada nos pontos A e C. Uma lança DE é articulada por uma rótula na extremidade D da base, e é sustentada pela extremidade oposta E por um cabo de aço BE. Determine a força de tração no cabo, a carga compressiva na lança e as reações nos apoios para uma carga $F = 100$ kN, quando a lança encontra-se na posição mostrada na Figura, fazendo um ângulo de $\beta = 30°$ com a horizontal. Determine também os esforços na base AD.

Solução:

Primeiramente, observa-se que esse é um problema isostático, de forma que as reações independem da forma da estrutura apoiada nos pontos A e C. As forças no cabo são forças internas ao sistema, isto é, esforços. O cálculo das reações é realizado da forma rotineira, escrevendo as equações de equilíbrio no plano $oxyz$:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow R_{Ax} = 0, \\
\sum F_y &\rightarrow R_{Ay} - R_C + F = 0, \\
\sum M_z^D &\rightarrow R_C(5) - F\ (12,5) = 0,
\end{aligned}$$

o que resulta nas reações: $R_{Ax} = 0$, $R_{Ay} = 1,5F$ e $R_{Cy} = 2,5F$.

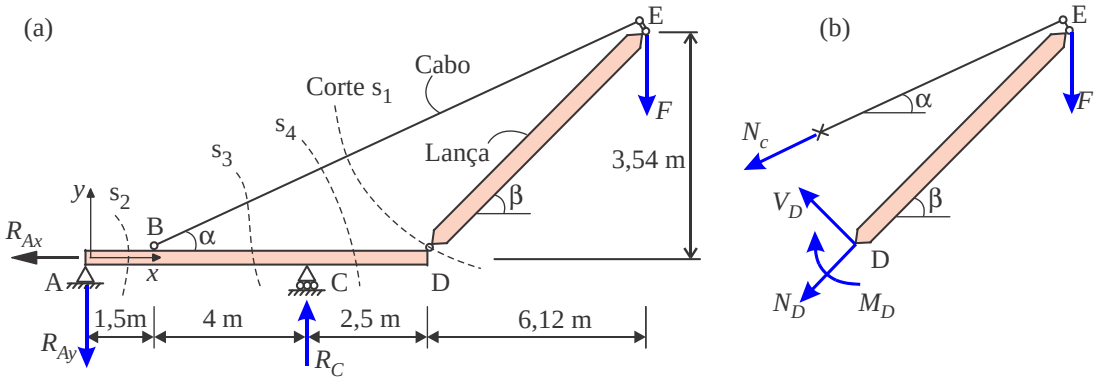


Figura 2.57: (a) Estrutura do Exemplo 11; (b) diagrama de corpo livre da lança.

(a) Esforços no cabo e na lança

Uma característica física sobre os cabos, em geral, é que eles são capazes de suportar apenas esforços normais de tração: é facilmente compreensível que um cabo não tem rigidez a cargas transversais de flexão, isto é, $V_c = M_c = 0$. Adicionalmente, o esforço normal é uniforme ao longo de cabos que não estejam sujeitos a força peso apreciável (como os cabos curtos) ou outras cargas distribuídas. Outro aspecto que é útil considerar no problema é que na rótula D os esforços cortante e de momento são nulos, $M_D = V_l = 0$.

Podemos fazer um corte s_1 como indicado na Figura 2.57, passando pela rótula D. Note que, uma vez que o esforço normal é uniforme ao longo do cabo, a posição onde o corte será feito nele não interferirá no valor do esforço obtido. Assim, para facilitar os cálculos trigonométricos na montagem das equações de equilíbrio, busca-se sempre, nesse tipo de problema, fazer o corte no cabo numa posição favorável. No exemplo, podemos fazer o corte próximo ao ponto E em que o cabo se conecta à lança DE. Em seguida, devemos lembrar que o corte deve dividir a estrutura em duas partes. Assim, o mesmo corte passa pelo ponto próximo de E e pela rótula interna D. A vantagem de passar o corte pelo ponto D, é que ali sabemos, a priori, que o esforço de momento é nulo devido à rótula. Assim, no cabo o esforço normal é N_c, e no ponto D da lança os esforços são N_D, V_D e o momento $M_D = 0$. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &\rightarrow N_c \cos\alpha + N_D \cos\beta + V_D \text{ sen } \beta = 0, \\
\sum F_y &\rightarrow F + N_c \text{ sen } \alpha + N_D \text{ sen } \beta - V_D \cos\beta = 0, \\
\sum M_z^D &\rightarrow M_D + F\ (6,12) + N_c \text{ sen } \alpha\ (6,12) - N_c \cos\alpha\ (3,54) = 0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Dos dados geométricos do problema temos que $\alpha = 15,67^o$. Logo, a terceira equação produz a tração no cabo como $N_c = 3,486F$. As duas primeiras equações resultam os esforços na lança: $N_D = -3,876F$ e $V_D = 0$. Observe que se poderia esperar que o cortante na lança DE fosse nulo, uma vez que ela é unida ao resto da estrutura apenas por rótulas, e está sujeita apenas a cargas nas extremidades. Então, toda a lança e o cabo comportam-se como partes de uma treliça, e apenas a barra horizontal suporta flexão.

(b) Esforços na base, trecho AB

Fazemos um corte s_2 como indicado na Figura 2.57, numa seção arbitrária do trecho AB, e fazemos o diagrama de corpo livre do lado esquerdo. O equilíbrio define os esforços

$$\begin{aligned}
V_y^{AB}(x) &= R_{Ay} = 1,5F, \\
M_z^{AB}(x) &= -R_{Ay}x = 1,5Fx, \qquad \forall x \in (0;1,5) \text{ m}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

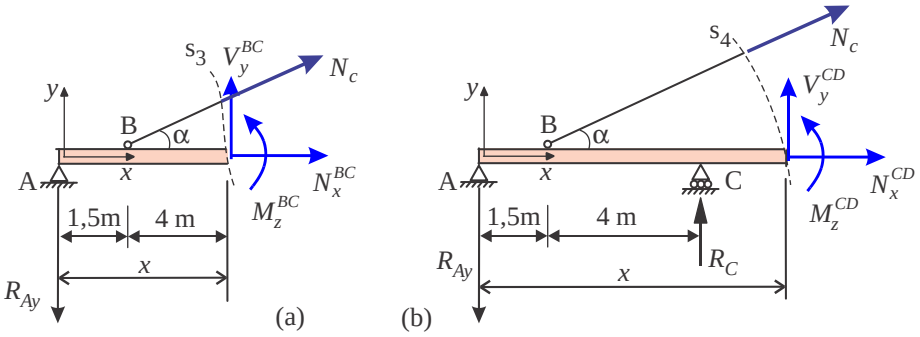


Figura 2.58: Diagramas de corpo livre para os trechos BC e CD.

(c) Esforços na base, trecho BC

Fazemos um corte s_3 como indicado na Figura 2.57, numa seção arbitraria do trecho BC, e fazemos o diagrama de corpo livre do lado esquerdo mostrado na Figura 2.58a. O equilíbrio define os esforços

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N^{BC} + N_c \cos\alpha = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y^{BC} - R_{Ay} + N_c \text{ sen } \alpha = 0, \\ \sum M_z^{s3} &\rightarrow M_z^{BC} + R_{Ay}x - N_c \text{ sen } \alpha\ (x-1,5) = 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

A solução do sistema resulta

$$\begin{aligned} N^{BC} &= -3,357F, \\ V_y^{BC}(x) &= 0,628F, \\ M_z^{BC}(x) &= -0,628Fx - 1,412F, \qquad \forall x \in (1,5;5,5) \text{ m}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

(d) Esforços na base, trecho CD

Fazemos um corte $s_4$como indicado na Figura 2.57, numa seção arbitraria do trecho CD, e fazemos o diagrama de corpo livre do lado esquerdo mostrado na Figura 2.58b. O equilíbrio define os esforços

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow N^{CD} + N_c \cos\alpha = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow V_y^{CD} - R_{Ay} + R_{Cy} + N_c \text{ sen } \alpha = 0, \\ \sum M_z^{s4} &\rightarrow M_z^{CD} + R_{Ay}x - R_{Cy}(x-5,5) - N_c \text{ sen } \alpha\ (x-1,5) = 0. \end{aligned} \tag{2.78}$$

A solução do sistema resulta

$$\begin{aligned} N^{CD} &= -3,357F, \\ V_y^{CD}(x) &= -1,492F, \\ M_z^{CD}(x) &= 1,942Fx - 15,55F, \qquad \forall x \in (5,5;8) \text{ m}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

(d) Testes dos resultados

Pode-se fazer os testes dos resultados obtidos de reações e esforços, conforme detalhado na seção 2.5.3 e no Exemplo 5. Nota-se que as derivadas dos momentos e dos cortantes são compatíveis em cada vão da base. Também, os resultados para esforço de momento são contínuos na seção

C, i.e., $M_z^{BC}(5,5) = M_z^{CD}(5,5) = -4,868F$, como necessário. Nas demais seções o momento é contínuo, sendo nulos nas extremidades A e D, devido às rótulas. Os esforços cortantes apresentam descontinuidades em A, B, C e D compatíveis com as forças concentradas aplicadas naquelas seções. O esforço normal apresenta descontinuidade em B e D, onde existem reações aplicadas. Isso pode ser visualizado nos diagramas da Figura 2.59.

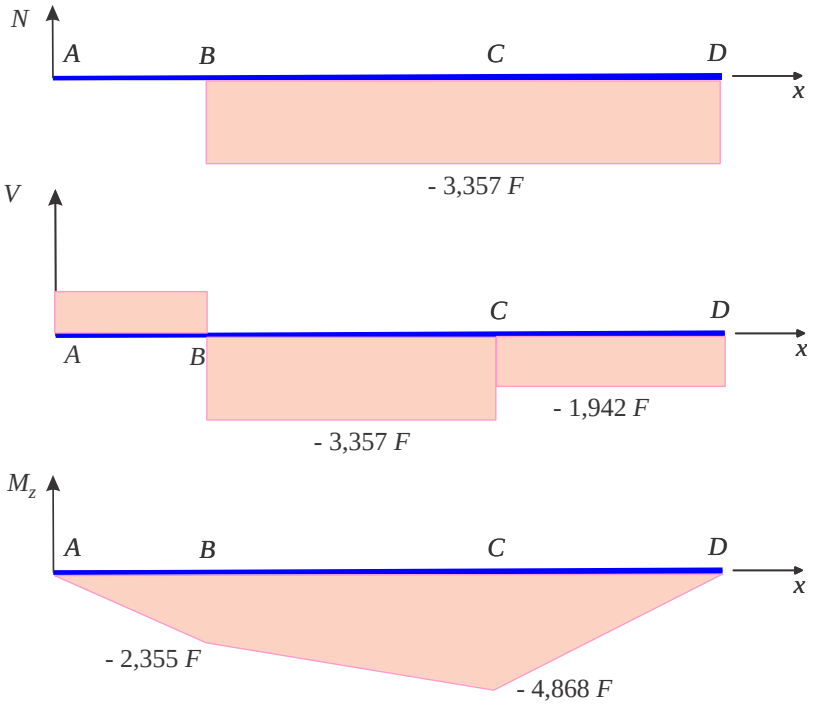
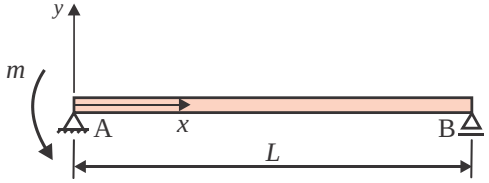


Figura 2.59: Diagramas de esforços do Exemplo 11.

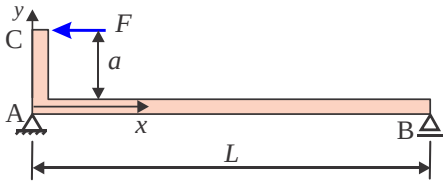
2.8 Exercícios

Determinar as reações, as equações de esforços nos problemas a seguir. Exceto nas treliças, esboçar os diagramas de esforços, indicando os máximos e a coordenada onde atuam. Em todos os problemas, identificar os sistemas de coordenadas usados, tanto o global quanto os locais, esboçar os diagramas de corpo livre necessários, tanto o global quanto os locais. Exceto se indicados diferentemente nos problemas, os dados são os seguintes: $m = 5$ kNm, $L = 1$ m, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m, $F = 25$ kN, $G = 10$ kN, $q = 25$ kN/m, $p = 10$ kN/m, $\alpha = 30°$.

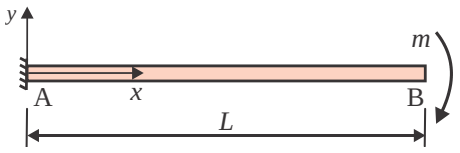
2.1



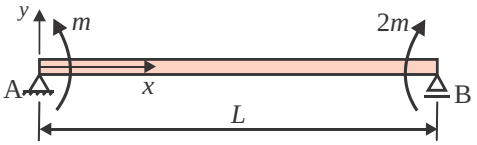
2.2



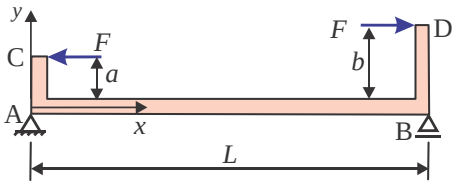
2.3



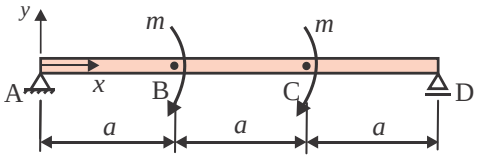
2.4



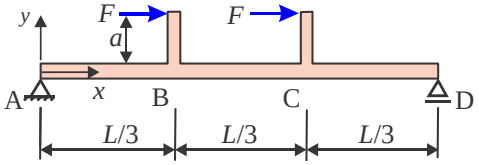
2.5



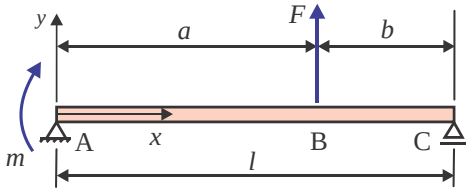
2.6



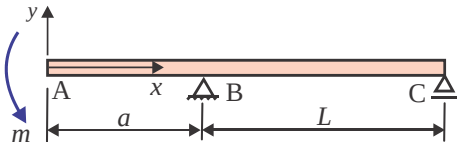
2.7



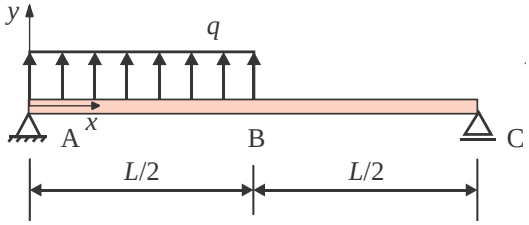
2.8



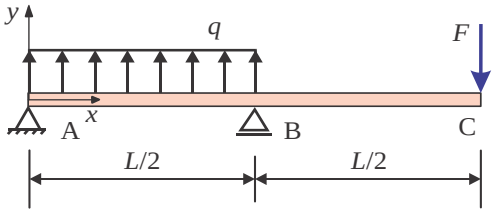
2.8.1



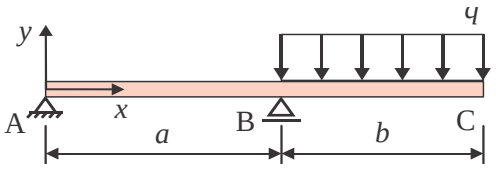
2.9 $q = 8$ kN/m.



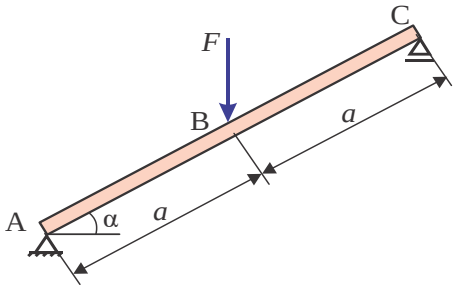
2.10 $q = 5$ kN/m, $F = 1$ kN.



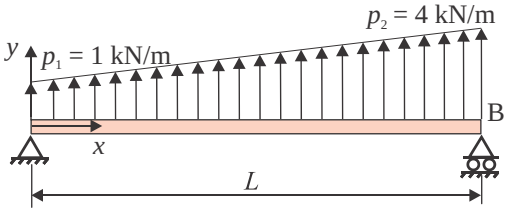
2.11



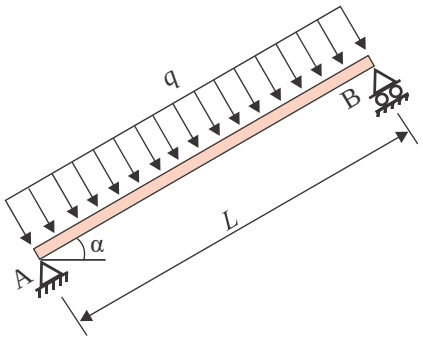
2.12



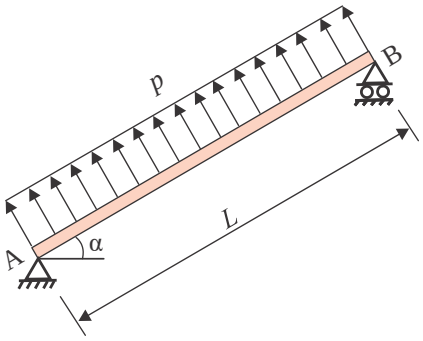
2.13 A carga distribuída varia linearmente entre os valores p_1 e p_2 nas seções A e B.



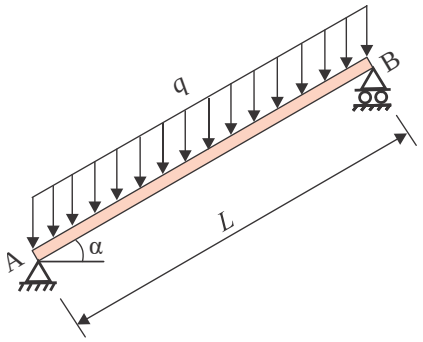
2.14



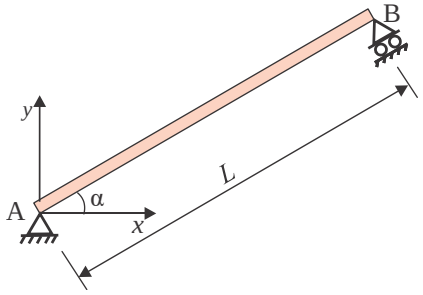
2.15



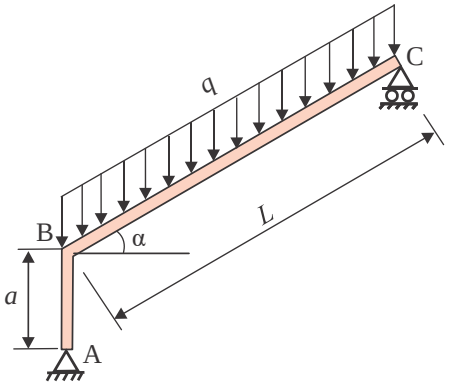
2.16



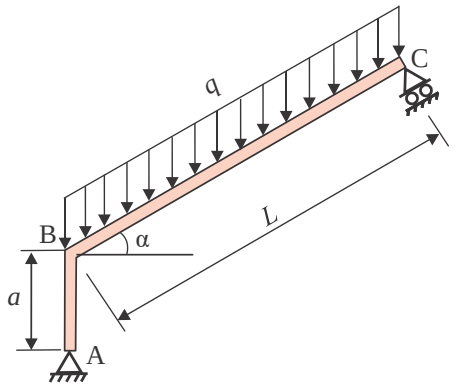
2.17 A barra é de aço, sob a ação de seu próprio peso na direção $-y$. Seu diâmetro é $d = 10$ mm.



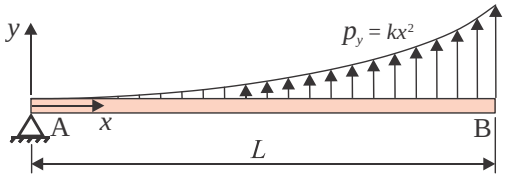
2.18



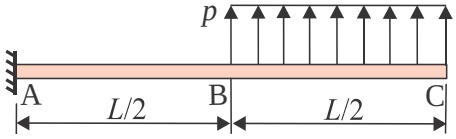
2.18.1



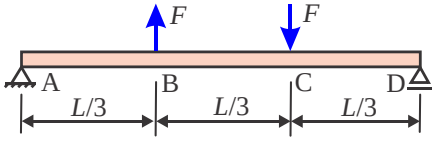
2.19 Resolver em termos de L e k.



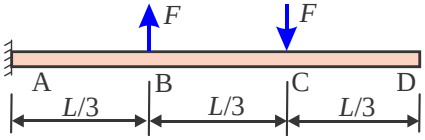
2.20



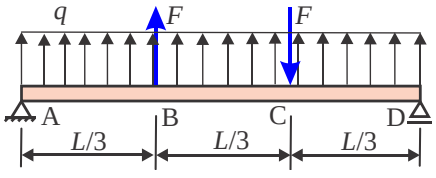
2.21



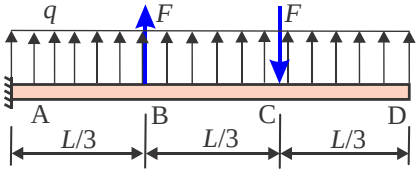
2.22



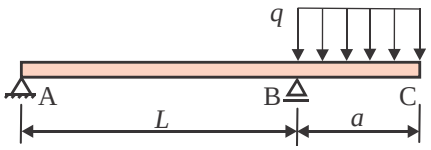
2.23



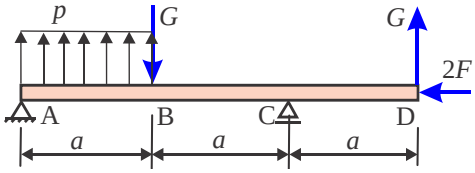
2.24



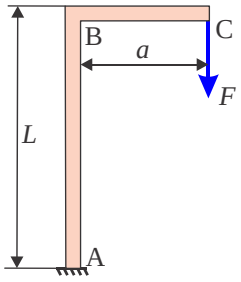
2.25



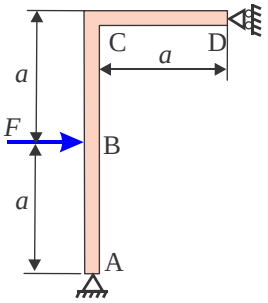
2.26



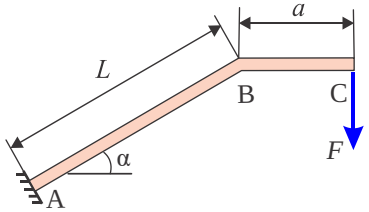
2.27



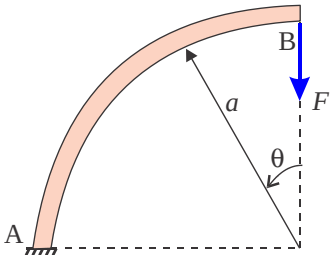
2.28



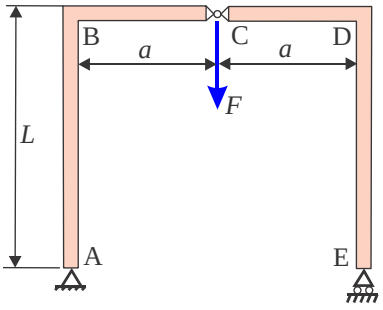
2.29



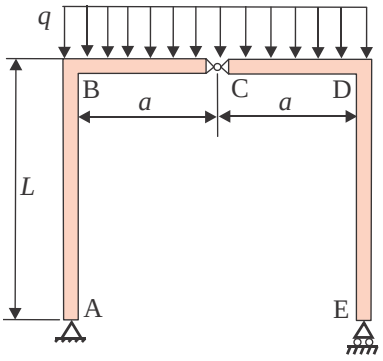
2.30 O arco AB é de um quarto de circunferência de raio a. Para uma seção arbitrária definida pelo ângulo θ, determinar os esforços nas direções normal N_t, de momento fletor M_z e cortante na direção radial V_r, devidos à força F.



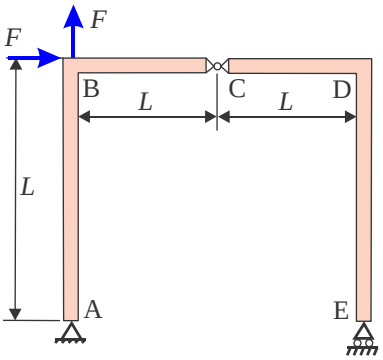
2.31 Nas questões 31 a 33, a seção C possui uma rótula.



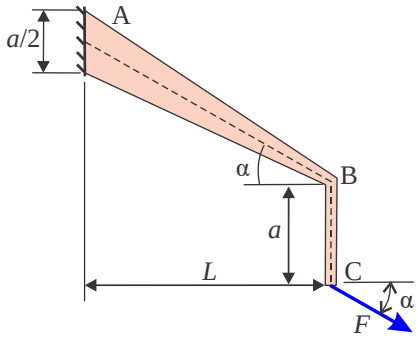
2.32



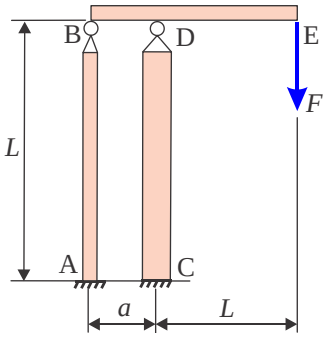
2.33



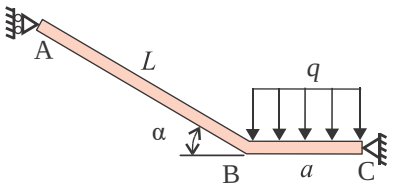
2.34



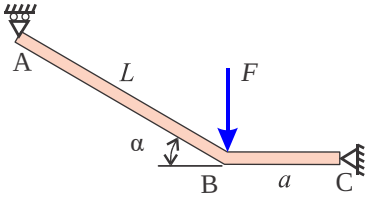
2.35 A barra BDE é apoiada por rótulas B e D às barras AB e CE. Se o componente CE for um macaco hidráulico, qual a força que ele deve exercer para sustentar F?



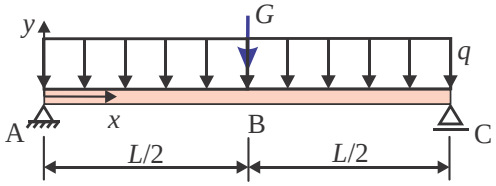
2.36



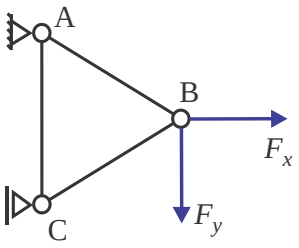
2.37



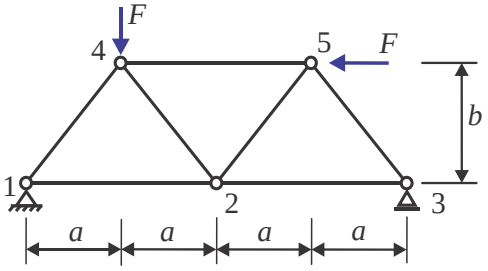
2.38



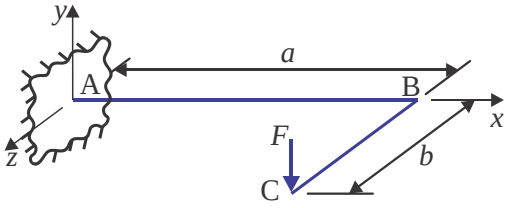
2.39 Barras de comprimento $L = 1$ m, $F_x = F_y = F = 1$ kN.



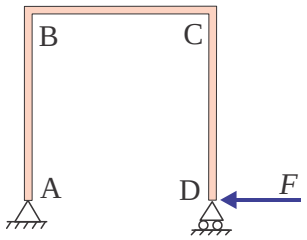
2.40 $F = 10$ kN, $a = 1$ m, $b = 2$ m.



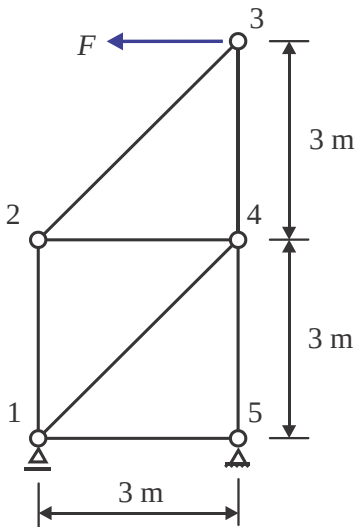
2.41 $f = 25$ kN, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m.



2.42 Os três segmentos de viga têm comprimentos L.

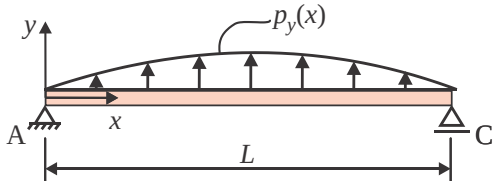


2.43 $F = 10$ kN.



Dados do Exerccio 2.43.

2.44 A carga distribuída transversal varia senoidalmente por $p(x) = p_o \text{ sen } \pi x/L$.



Capítulo 3

Tensões

Na seção 2.3.1 fizemos uma descrição preliminar e geral do conceito de tensões num ponto. No presente capítulo esse conceito é detalhado e inicia-se sua aplicação em alguns problemas práticos de análise mecânica de componentes estruturais. É recomendado que aquela seção seja lida antes do presente capítulo. Entretanto, nota-se que ali se buscava mostrar a relação entre os esforços numa dada seção interna do corpo e a distribuição de tensões distribuídas ali. No presente capítulo, iniciamos por considerar estritamente os conceitos e propriedades das tensões.

Consideremos a Figura 3.1a que mostra o diagrama de corpo livre de um corpo de geometria arbitrária, com seu carregamento externo $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\cdots$, e um sistema de eixos cartesianos xyz. Consideramos que o corpo se encontra em equilíbrio estático sob a ação dessas forças. Caso o corpo esteja vinculado a uma base fixa, parte dessas forças pode ser reações de apoios. Consideramos um ponto genérico P de coordenadas definidas pelo vetor $\mathbf{x}$, de componentes $\{x; y; z\}$. Em seguida definimos uma superfície S passando pelo ponto P. Essa superfície pode ser de formato arbitrário, i.e, uma superfície curva, tal que em cada ponto tenha uma normal distinta dos demais. Entretanto, no momento é mais conveniente definir a curva S de tal forma que no ponto P sua normal seja paralela ao eixo cartesiano x.

Usamos a superfície S para separar um dos lados do corpo e montamos um diagrama de corpo livre, como na Figura 3.1b. Nessa parte do corpo temos as forças externas (exemplificadas ali por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$), que são equilibradas pela **força e momento internos resultantes**, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$, aplicados no centroide da seção.

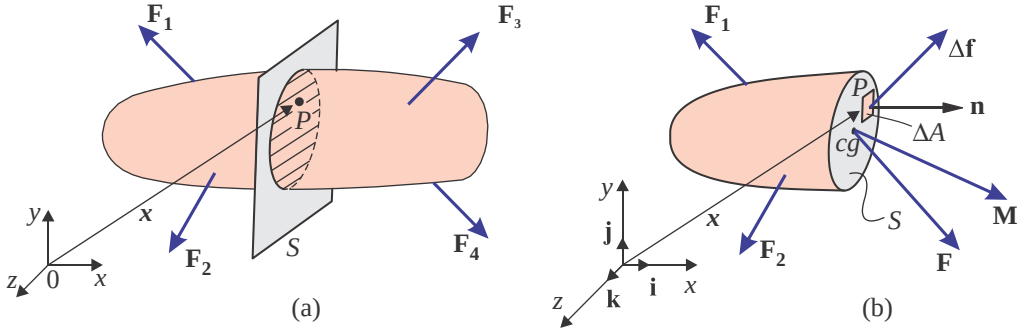


Figura 3.1: Forças externas num corpo e força interna num ponto P.

Deve-se lembrar que os esforços internos $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ são apenas resultantes da distribuição de forças internas interatômicas que atuam na superfície S. Considere um elemento ΔA de área pertencente à superfície S, localizado no ponto P como indicado na Figura 3.1b. Esse elemento de área tem sua normal orientada na direção de um **vetor normal n**, que arbitramos como paralelo ao vetor unitário $\mathbf{i}$, isto é, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Claramente, cada ponto de S possui sua própria orientação normal, i.e., existe uma função $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$.

No elemento de área ΔA atua uma parcela da força total da seção, dado pelo vetor $\Delta\mathbf{f}$. suas componentes nas direções cartesianas, isto é,

$$\Delta\mathbf{f} = \Delta f_x\mathbf{i} + \Delta f_y\mathbf{j} + \Delta f_z\mathbf{k}, \tag{3.1}$$

ou simplesmente $\{\Delta f_x;\ \Delta f_y;\ \Delta f_z\}$.

Observe que temos aqui a superfície S subdividida em um número finito N de áreas ΔA_j, de forma que a área total é a união das partes ΔA_j, i.e., $A = \bigcup_{j=1}^{N} \Delta A_j$. Cada partição ΔA_j é um valor finito, não infinitesimal. Entretanto, buscamos uma quantificação da força que seja pontual. Assim, definimos as chamadas **componentes de tensão** como as intensidades de força por unidade de área, válidas em um ponto. Matematicamente, temos que as componentes de tensão num ponto de coordenada $\mathbf{x}$, numa área com normal na direção $\mathbf{i}$, são dadas por:

$$\tau_{xx}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0}\frac{\triangle f_x(\mathbf{x})}{\triangle A}, \qquad \tau_{xy}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0}\frac{\triangle f_y(\mathbf{x})}{\triangle A}, \qquad \tau_{xz}(\mathbf{x}) = \lim_{\triangle A\to 0}\frac{\triangle f_z(\mathbf{x})}{\triangle A}. \tag{3.2}$$

As componentes são designadas pela letra grega τ, (tau minúsculo), e dois índices: o **primeiro índice** indica a orientação do elemento de área e o **segundo índice** indica a orientação da força. Por exemplo, em τ_{xy}, temos uma componente de tensão atuando numa superfície orientada em x, devida a uma força infinitesimal orientada em y.

A tensão tem então **unidades** de [Força]/[área]. No *Sistema Internacional de Unidades* é usado o **Pascal**, abreviado por Pa, definido por

$$1\ \text{Pa} = \frac{1\ \text{Newton}}{1\ \text{m}^2}. \tag{3.3}$$

Frequentemente é usado o múltiplo MPa, que é tal que

$$\begin{aligned} 1\ \text{MPa} \quad &: \quad = 10^6\ \text{Pa}, \\ &= \quad \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{mm}^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observação 1: Voltando às definições das componentes de tensão (3.2), observamos que a definição exige a existência de uma área, porém o valor obtido refere-se a um ponto apenas, aquele de coordenada $\mathbf{x}$, localizado na superfície S, uma vez que foi feito o limite $\Delta A \to 0$.

Observação 2: Note que não temos área nula: trata-se de um valor diferencial dA.

Observação 3: Note também que as três componentes de tensão não são associadas apenas ao ponto $\mathbf{x}$, mas também à orientação da área ΔA , que no caso é $\mathbf{i}$.

Claramente, das três componentes (3.2), τ_{xx} atua perpendicularmente à superfície, isto é, causa **tração** ou **compressão** do material localizado no ponto $\mathbf{x}$, na direção x. Então τ_{xx} é denominada uma componente de **tensão normal**.

As duas componentes τ_{xy} e τ_{xz} são associadas a forças que atuam tangentes à superfície S no ponto $\mathbf{x}$. São as chamadas componentes de **tensão cisalhantes**.

As componentes de tensão que atuam em $\mathbf{x}$ na área dA com normal orientada na direção $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ compõem o chamado **vetor tensão**, $\mathbf{t}_{(\mathbf{i})}(\mathbf{x})$, que é definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) \quad &: \quad = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta A}, \quad \text{tal que} \\ &= \quad \tau_{xx}\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} \qquad \text{(em componentes cartesianas).} \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1 Alguns aspectos sobre tensões

Consideremos agora o vetor tensão que atua num ponto de coordenada $\mathbf{x}$,na área diferencial dA cuja normal seja orientada na direção $\mathbf{n}$ é o vetor $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$, que é definido por

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) := \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}. \tag{3.6}$$

Duas das características mais importantes das componentes de tensões, i.e., do vetor de tensões $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$, nem sempre fáceis de compreender num primeiro momento. Essas características são as seguintes:

1. $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$ varia de ponto a ponto do corpo, i.e., é uma função, um **campo**, na forma $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{x})$.

2. Num ponto arbitrário P o vetor de tensões muda conforme a orientação da área. Em (3.5) temos as tensões atuando numa superfície orientada na direção $\mathbf{i}$, daí o uso do subscrito "$\mathbf{i}$" em $\mathbf{t}_{(\mathbf{i})}$. Se, no mesmo ponto P, tivéssemos definido uma outra superfície com orientação distinta $\overline{\imath}$, os valores das componentes do vetor seriam distintos. Mais do que isso, **o próprio vetor seria outro**. Isso pode ser visualizado na Figura 3.2 para duas áreas, dA e $d\overline{A}$, cujas normais são orientadas ao longo de dois distintos sistemas de coordenadas, x-y-z e $\overline{x}$-$\overline{y}$-$\overline{z}$ respectivamente, associados às bases ortogonais **i**-**j**-**k** e $\overline{\imath}$-$\overline{\mathbf{j}}$-$\overline{\mathbf{k}}$. Para facilitar a visualização, fizemos com que os eixos z e $\overline{z}$ coincidissem e mostramos as áreas de perfil.

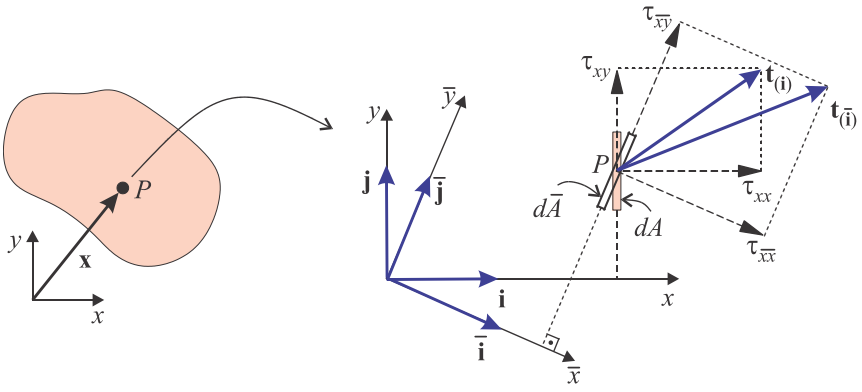


Figura 3.2: Vetores de tração num ponto P, em duas áreas de distintas orientações.

No ponto P do corpo definimos os vetores tensão $\mathbf{t}_{(\mathbf{i})}$ e $\mathbf{t}_{(\overline{\imath})}$, de componentes $\{\tau_{xx}; \tau_{xy}; \tau_{xz}\}$ e $\{\tau_{\overline{xx}}\ \tau_{\overline{xy}}\ \tau_{\overline{xz}}\}$, atuando nas áreas normais a $\mathbf{i}$ e $\overline{\imath}$, respectivamente. **O mais importante aqui é entender que não são apenas distintas componentes de um mesmo vetor, mas são componentes dois vetores distintos**. Suas representações cartesianas são as seguintes:

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{i})}(\mathbf{x}) = \tau_{xx}\mathbf{i} + \tau_{xy}\mathbf{j} + \tau_{xz}\mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{t}_{(\overline{\imath})}(\mathbf{x}) = \tau_{\overline{xx}}\overline{\imath} + \tau_{\overline{xy}}\overline{\mathbf{j}} + \tau_{\overline{xz}}\overline{\mathbf{k}}. \tag{3.7}$$

Para entender isso consideremos um caso simples de estado de tensões, como aquele mostrado na Figura 3.3a. Temos o problema simples de uma barra submetida a uma força axial F. Definimos um sistema de coordenadas xyz associado a uma base de vetores cartesianos **i**-**j**-**k**, sendo $\mathbf{i}$ na direção axial da barra. Fazemos um corte s transversal ao eixo x, i.e., definindo uma seção de área A com normal $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, como na Figura 3.3b. Se consideramos as tensões uniformemente distribuídas sobre a área A da seção transversa de corte, o valor do **vetor tensão** $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ em qualquer área diferencial é dado pelo valor médio:

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{i})} = \frac{F}{A}\mathbf{i}. \tag{3.8}$$

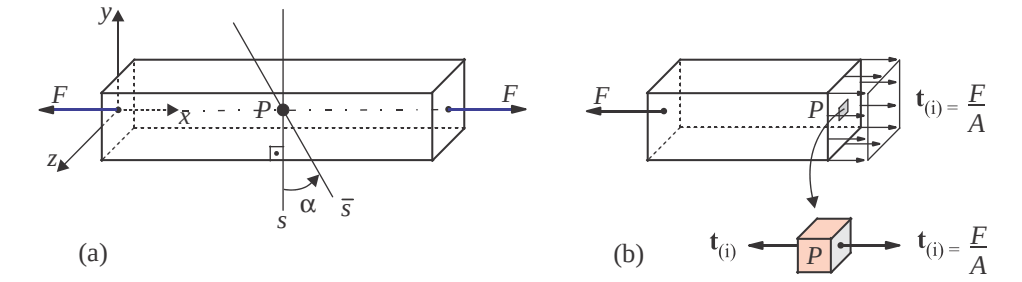


Figura 3.3: Vetor tensão num ponto arbitrário P, numa área de normal **i**.

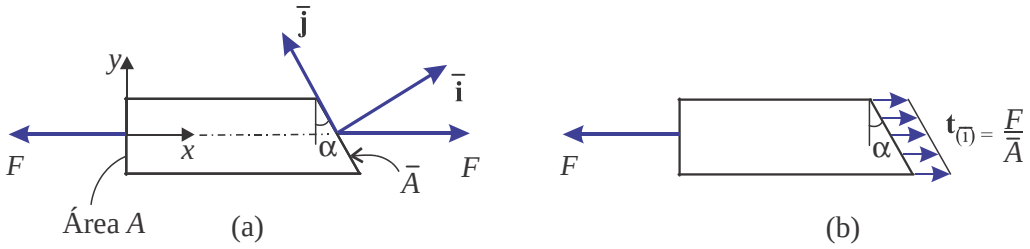


Figura 3.4: Vetor tensão num ponto arbitrário P, numa área de normal $\bar{\imath}$.

Consideremos agora a mesma barra, porém fazemos um outro corte, $\bar{s}$, definindo uma área $\bar{A}$ com normal orientada pelo vetor unitário $\bar{\imath}$, como mostrado na Figura 3.4. Para simplificar a visualização, consideramos que a tríade de vetores $\bar{\imath}$-$\bar{\mathbf{j}}$-$\bar{\mathbf{k}}$ seja tal que $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$, de forma que o vetor $\bar{\imath}$ esteja contido no plano **i-j**. Podemos fazer o diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte, como na Figura 3.4b. Devido ao equilíbrio de forças, a orientação da seção de corte não altera o valor da resultante de forças na seção, que continua sendo $N_x = F$. Entretanto, a área da seção de corte, $\bar{A}$, agora é maior que A, sendo dada por

$$\bar{A} = A/\cos\,\alpha, \tag{3.9}$$

onde α é o ângulo de orientação da seção inclinada. Se consideramos novamente que as tensões nessa superfície sejam uniformemente distribuídas, o vetor tensão em qualquer ponto de $\bar{s}$ é dado por

$$\mathbf{t}_{(\bar{\imath})} = \frac{F}{\bar{A}}\mathbf{i} = \frac{F}{A}\cos\,\alpha\;\mathbf{i}. \tag{3.10}$$

Comparando com (3.8), torna-se claro que

$$\mathbf{t}_{(\bar{\imath})} \neq \mathbf{t}_{(\mathbf{i})}. \tag{3.11}$$

Isso significa que no mesmo ponto temos diferentes vetores tensão, definidos pela orientação da superfície onde atua. Note que são realmente distintos vetores, não um mesmo vetor representado por componentes de dois sistemas de coordenadas diferentes. De fato, ambos os vetores em (3.8) e (3.10) estão representados em termos da mesma base **i-j-k**.

3.2 Tensor tensão

Se considerarmos novamente o corpo genérico da Figura 3.1 e o ponto P arbitrário, podemos fazer infinitos cortes em torno de P, gerando infinitas superfícies, cada uma com uma orientação própria **n**. Buscaremos representar o **estado de tensões** do material no ponto através de um número finito de superfícies. Considere que temos já definido um sistema de coordenadas, xyz, e já tínhamos realizado um corte passando por P, na direção x, isto é, o vetor normal **n** da superfície é $\mathbf{n} = +\mathbf{i}$.

Isso definiu três componentes de tensão, τ_{xx}, τ_{xy} e τ_{xz} em P. Considere agora que podemos realizar um segundo corte em P, porém orientado na direção $\mathbf{n} = +\mathbf{j}$, isto é, perpendicular ao eixo y. De fato, podemos realizar ao todo seis cortes em torno do ponto P, definindo um elemento diferencial de volume de lados dx, dy, e dz, como indicado na Figura 3.5a, com faces orientadas em $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ e $\pm\mathbf{k}$. Esse elemento é o hexaedro regular mostrado na Figura 3.5b.

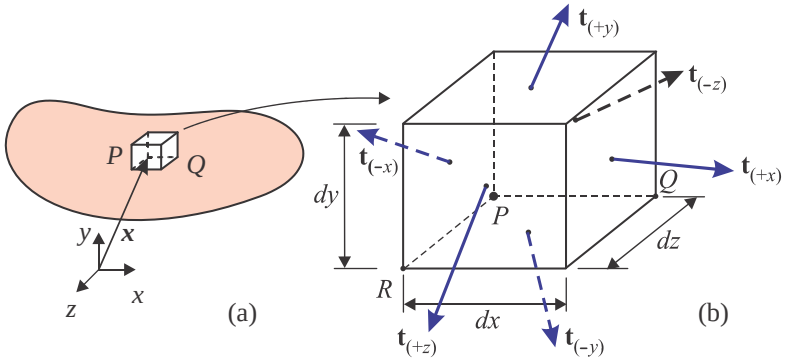


Figura 3.5: Elemento diferencial num ponto P de um corpo, e diagrama de corpo livre.

Em cada face do hexaedro atua um vetor tensão. Os índices usados nesses vetores, $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$, indicam a orientação da face onde o vetor atua. Cada um desses vetores pode ser expresso em termos de suas componentes cartesianas. Por exemplo, tínhamos já representado as componentes de $\mathbf{t}_{(+x)}$por

$$\mathbf{t}_{(x)} = \{\tau_{xx}; \tau_{xy}; \tau_{xz}\}. \tag{3.12}$$

De forma semelhante podemos definir as componentes nas faces $+y$ e $+z$:

$$\mathbf{t}_{(y)} = \{\tau_{yx}; \tau_{yy}; \tau_{yz}\}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{t}_{(z)} = \{\tau_{zx}\ \tau_{xy}\ \tau_{zz}\}. \tag{3.13}$$

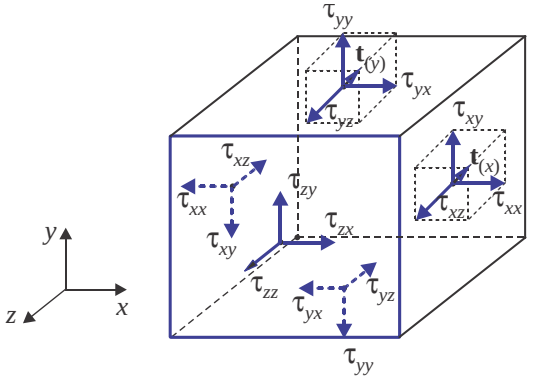


Figura 3.6: Componentes de tensão no sistema cartesiano xyz, no ponto P do corpo.

Essas componentes são vistas nas três faces anteriores do elemento da Figura 3.6. Os índices usados em cada componente são:

1. O primeiro índice indica a orientação da face onde atua a componente de tensão;
2. O segundo índice indica a direção da força associada à tensão. Por exemplo, τ_{zx} é uma tensão atuando na face normal ao eixo z, devida a uma força atuando na direção x.

Nas três faces posteriores do elemento, aquelas orientadas em $-x$, $-y$ e $-z$, tem valores de tensão distintos daqueles atuantes nas faces anteriores. Entretanto, as denominações de cada componente

são as mesmas, dadas pelas regras de índices 1 e 2 acima. Por exemplo, na face posterior orientada em $-x$, as componentes de tensão são

$$\mathbf{t}_{(-x)} = \{\tau_{xx};\ \tau_{xy};\ \tau_{xz}\},$$

exatamente como $\mathbf{t}_{(x)}$visto em (3.12). Tanto as componentes de $\mathbf{t}_{(-x)}$quanto $\mathbf{t}_{(-y)}$ são ilustrados na Figura 3.6, enquanto $\mathbf{t}_{(-z)}$ é omitido para melhor clareza da figura.

As componentes nas faces anteriores são orientadas nas direções positivas dos eixos cartesianos, e são consideradas as **orientações positivas de tensão nessas três faces. Nas três faces posteriores, as orientações positivas** são opostas àquelas das faces anteriores, como ilustrada na Figura 3.6. A explicação a isso se deve às condições de equilíbrio, conforme será visto na próxima seção.

Existem então 9 componentes de tensão num ponto qualquer de um corpo, que podem ser organizadas numa matriz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Observe que cada uma das linhas de $\boldsymbol{\sigma}$ corresponde às componentes de um dos vetores tensão, $\mathbf{t}_{(x)}$, $\mathbf{t}_{(y)}$ e $\mathbf{t}_{(z)}$ respectivamente, conforme as equações (3.12) e (3.13).

As nove componentes em (3.14) são componentes de uma entidade matemática denominada **tensor**, no caso o **tensor tensão**, e definem esse tensor em relação aos eixos cartesianos xyz. O tensor pode ser, à primeira vista, entendido como uma entidade análoga aos vetores, com a diferença que um vetor necessita três componentes cartesianas para ser representado, e um tensor necessita nove componentes.

Da mesma forma que nem toda tríade $\{a;\ b;\ c\}$ de valores pode ser considerada componentes de um vetor, também nem toda matriz 3×3 define componentes de um tensor. O que caracteriza um tensor, tanto quanto um vetor, é sua forma característica de se somar um ao outro e a forma com que suas componentes se transformam em presença de uma rotação do sistema de coordenadas. No Capítulo 5 trataremos em detalhe a **transformação de componentes tensoriais.**

Em (3.14), as componentes na diagonal principal, τ_{xx}, τ_{yy} e τ_{zz} são denominadas **tensões normais**, uma vez que atuam perpendicularmente à face onde atuam. A tendência dessas componentes é a de "estenderem" ou "contraírem" o material naquele ponto, conforme sejam positivas ou negativas. Assim, essas componentes são ditas **trativas** ou **compressivas**. Esse efeito pode ser visualizado na Figura 3.7a.
Ainda na equação (3.14), as componentes fora da diagonal principal são as **tensões cisalhantes**. O efeito de uma tensão cisalhante num ponto do material é provocar uma **deformação angular**. Isso é ilustrado na Figura 3.7b, para τ_{xy} positivo e negativo.

Notação

As componentes do tensor tensão em (3.14) frequentemente são representadas na literatura usando outras notações. Primeiramente, as **tensões normais** também são representadas pela letra grega σ (sigma minúsculo), isto é, em lugar de τ_{xx}, usa-se σ_{xx} por exemplo. Adicionalmente, o índice repetido é suprimido, e usa-se apenas σ_x, σ_y e σ_z em vez de τ_{xx}, τ_{yy} e τ_{zz}.
Os eixos coordenados, em lugar de letras, x-y-z, podem ser representados por números, 1-2-3. Assim, os índices de tensão tornam-se também numéricos. Isso permite que as componentes em (3.14) possam ser representadas por

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

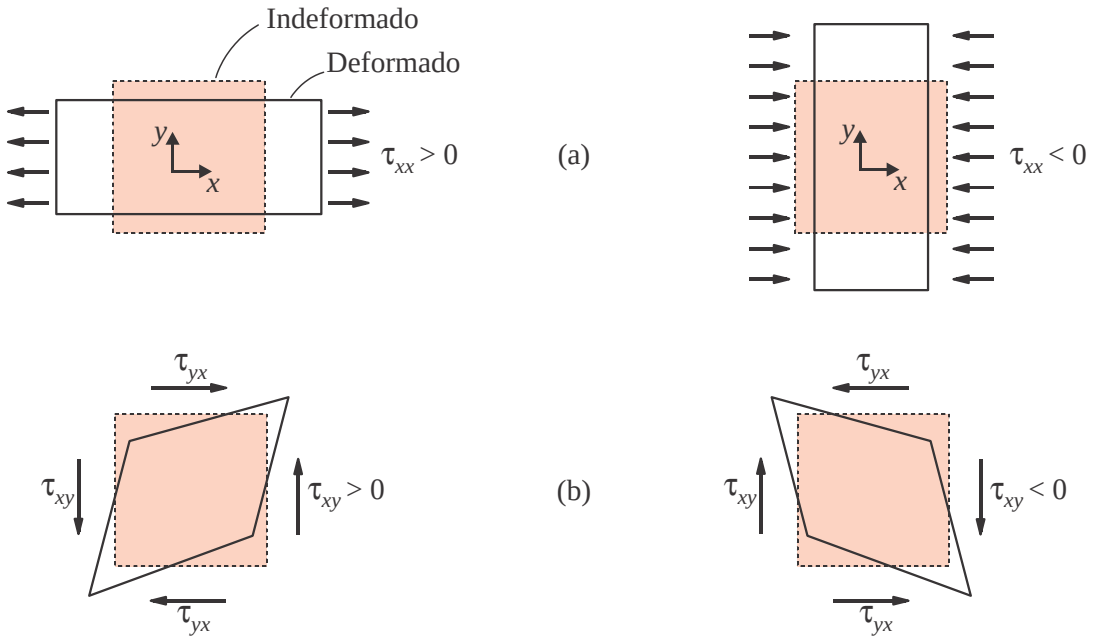


Figura 3.7: (a) Visualização do efeito de tensão normal trativa e compressiva; (b) efeito de tensão cisalhante positiva e negativa num elemento diferencial de volume.

Simetria

Na próxima seção será provado que o tensor tensão é simétrico, isto é, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. De forma compacta isso pode ser posto simplesmente como

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad i \neq j. \tag{3.16}$$

Assim, **existem seis componentes de tensão independentes** num ponto de um corpo. Lembramos que **cada componente é uma função do ponto**, tem-se que num problema genérico

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(x, y, z) \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Podemos dizer que uma das tarefas em mecânica dos sólidos e análise de estruturas consiste em determinar essas funções, i.e., determinar o valor das componentes de tensões em cada ponto do corpo.

3.3 Equações diferenciais de equilíbrio

Consideremos um elemento de material isolado de um corpo genérico, como na figura 3.5a. Consideremos agora que esse elemento tenha **dimensões finitas** Δx, Δy e Δz (em vez de diferenciais dx, dy e dz como antes). Na Figura 3.8 temos um diagrama de corpo livre do elemento, onde incluímos **o efeito do gradiente de tensões**, isto é, o fato que as tensões variam de ponto a ponto. Por exemplo, consideremos as duas faces paralelas orientadas em $(-x)$ e $(+x)$. A face $(-x)$ situa-se em uma coordenada x, enquanto a face $(+x)$ situa-se na posição $x + \Delta x$, isto é, ambas as faces distam Δx entre si. Assim, se a tensão normal tiver um valor σ_x em $(-x)$, em $(+x)$ ele terá um valor distinto. Pode-se dizer que em $(+x)$ a tensão será aquela em $(-x)$ adicionada de um incremento $\Delta\sigma_x$. Em resumo, considerando todas as 6 faces na Figura 3.8, temos que as tensões nas faces anteriores (orientadas em $(+x)$, $(+y)$ e $(+z)$), são obtidas por incremento das tensões das faces posteriores.

Além das forças devidas às tensões atuando nas faces do volume, podemos considerar que atuam também forças de corpo $\mathbf{f}_c$. Essas forças normalmente são representadas como **força de corpo por unidade de volume**, dadas em $[\mathrm{N/m^3}]$ e podem ser representadas pelas suas componentes

cartesianas f_{cx}, f_{cy} e f_{cz}, i.e., $\mathbf{f}_c = f_{cx}\mathbf{i} + f_{cy}\mathbf{j} + f_{cz}\mathbf{k}$. Em geral, essa força é dependente do ponto, i.e., variam de ponto a ponto, de forma que são representadas por uma função vetorial $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_c(\mathbf{x})$ conhecida. A força de corpo atuando no elemento volumétrico é $\mathbf{f}_c \Delta x \Delta y \Delta z$, que consideramos atuando no centroide do bloco.

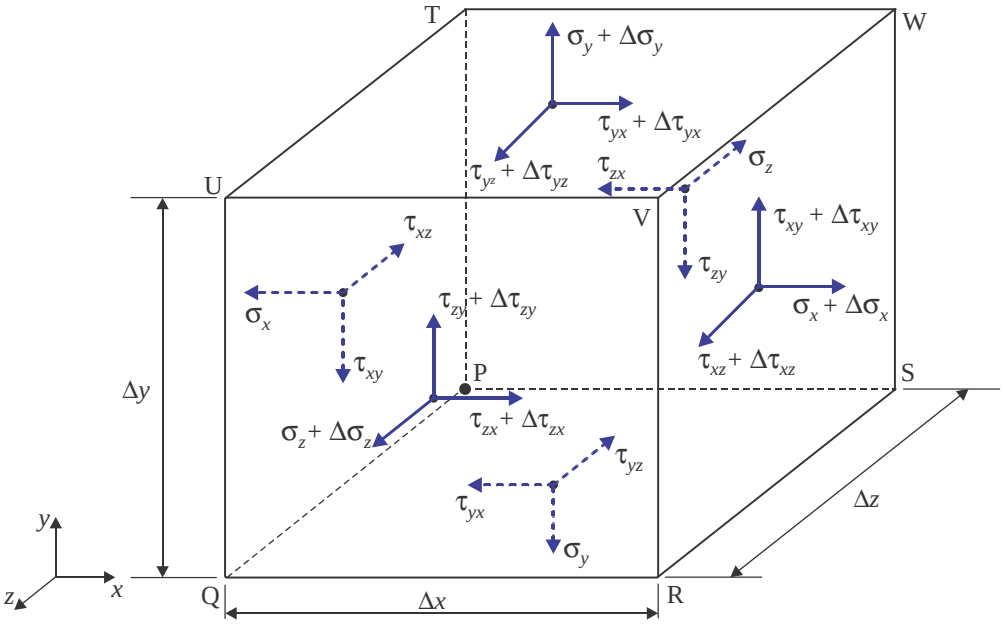


Figura 3.8: Componentes de tensão num elemento de dimensões finitas $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$.

O equilíbrio do elemento é representado por seis equações, isto é, três de forças e três de momentos. Por simplicidade, desenvolveremos apenas uma de cada tipo, uma vez que as demais têm forma semelhante. Assim, a equação de **equilíbrio dinâmico** no elemento volumétrico na direção x é

$$\begin{aligned}\sum F_x \rightarrow \quad & -\sigma_x \Delta y \Delta z + (\sigma_x + \Delta\sigma_x)\Delta y \Delta z - \tau_{zx}\Delta x \Delta y + (\tau_{zx} + \Delta\tau_{zx})\Delta x \Delta y \\ & -\tau_{yx}\Delta x \Delta z + (\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx})\Delta x \Delta z + \underbrace{f_{cx}\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{Força de corpo}} = \underbrace{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{Força de inércia}},\end{aligned} \tag{3.18}$$

A componente x da força de corpo atuando no elemento volumétrico é $f_{cx}\Delta x \Delta y \Delta z$. A massa do elemento volumétrico é $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, sendo ρ a **densidade do material** no ponto, em kg/m^3. O termo à direita da igualdade é a **força de inércia**, dada pela massa vezes a aceleração do elemento na direção x. Como o deslocamento na direção x é a função $u(x, y, z, t)$, a aceleração é $\partial^2 u/\partial t^2$. O Capítulo 4 fará um detalhamento do campo de deslocamentos num corpo deformável. Na presente dedução incluímos as forças de inércia apenas para gerar completicidade na formulação. Entretanto, o restante do texto será restrito a problemas estáticos, em que as forças de inércia são pequenas e podem ser desprezadas. O tratamento de problemas em que as acelerações são importantes na resposta compõem toda a parte da engenharia de vibrações e dinâmica estrutural, que normalmente é assunto de diversas outras disciplinas e textos.

O equilíbrio de momento das forças é calculado em relação à linha que suporta o segmento VW indicado no topo do bloco na Figura 3.8. Então, $\sum M_z^{VW}$ produz

$$
\begin{aligned}
&-(\sigma_x+\Delta\sigma_x)\Delta y\Delta z\left(\frac{\Delta y}{2}\right)+\underbrace{\sigma_x\Delta y\Delta z}_{\text{Elemento de força}}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)+(\sigma_y+\Delta\sigma_y)\Delta x\Delta z\left(\frac{\Delta x}{2}\right)-\sigma_y\Delta x\Delta z\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\\
&-\tau_{zx}\Delta x\Delta y\left(\frac{\Delta y}{2}\right)+(\tau_{zx}+\Delta\tau_{zx})\Delta x\Delta y\left(\frac{\Delta y}{2}\right)-(\tau_{zy}+\Delta\tau_{zy})\Delta x\Delta y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)+\tau_{zy}\Delta x\Delta y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\\
&-\tau_{yx}\Delta x\Delta z\ (\Delta y)+\tau_{xy}\Delta y\Delta z\ (\Delta x)\\
&\underbrace{+f_{cx}\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\Delta y}{2}\right)-f_{cy}\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{Momento das forças de corpo}}=\underbrace{\rho\frac{d^2u}{dt^2}\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\Delta y}{2}\right)-\rho\frac{d^2v}{dt^2}\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{Momento de inércia}}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

As equações de equilíbrio devem envolver forças em vez de tensões. Assim, aparecem termos como $-\sigma_x\Delta y\Delta z$, que é força na direção $-x$ devido a σ_x atuando na superfície, e $\sigma_x\Delta y\Delta z(\Delta y/2)$ é o momento na direção $+z$ devido àquela força Os braços de alavanca do momento de cada termo estão marcados entre parênteses.

Após cancelar os termos de sinais contrários em ambas as equações (3.19) e (3.18), podemos dividi-las pelo volume do bloco, $\Delta x\Delta y\Delta z$, o que produz

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x}+\frac{\Delta\tau_{yx}}{\Delta y}+\frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z}+f_{cx}=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\
&\rightarrow \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)+\frac{\Delta\sigma_y}{\Delta y}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)+\frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)+\frac{\Delta\tau_{zy}}{\Delta z}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)-\tau_{yx}+\tau_{xy},\\
&\qquad +f_{cx}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)-f_{cy}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)=\rho\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)-\rho\frac{d^2v}{dt^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Fazendo os limites $\Delta x\rightarrow 0$, $\Delta y\rightarrow 0$ e $\Delta z\rightarrow 0$, os termos do tipo $\Delta\sigma_x/\Delta_x\rightarrow\partial\sigma_x/\partial x$, onde, uma vez que σ_x é uma função de várias variáveis, isto é, $\sigma_x=\sigma_x(x,y,z,t)$, usamos a notação "$\partial$ para indicar derivadas parciais. Na segunda equação, todos os termos que envolvem Δx, Δy ou Δz no numerador se anulam no limite. Assim, as equações se reduzem a

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_{cx}=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\
&\rightarrow \quad \tau_{xy}-\tau_{yx}=0.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

A segunda equação mostra claramente a simetria das componentes do tensor tensão. Repetindo o procedimento para o equilíbrio de forças e momentos nas direções y e z obtemos seis equações, em que as três de momento mostram que

$$
\boxed{\tau_{yx}=\tau_{xy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}\qquad \text{e}\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}}
\tag{3.22}
$$

resultado este que foi antecipado em (3.16). As equações diferenciais de equilíbrio dinâmico nas direções cartesianas toma a forma final

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+f_{cx}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+f_{cy}=\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_{cz}=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}.
\end{aligned}
}
\tag{3.23}
$$

Aqui f_{cx}, f_{cy} e f_{cz} são as funções que representam as forças de corpo por unidade de volume, ρ é a densidade do material e u, v, w são as funções de deslocamento do ponto nas direções x, y e z respectivamente. Os termos à direita são as forças de inércia, e $\partial^2u/\partial t^2$, $\partial^2u/\partial t^2$ e $\partial^2u/\partial t^2$ são as acelerações do bloco nas direções x y e z respectivamente.

As equações (3.23) são também chamadas **equações locais do movimento**. Quando o lado

direito é nulo (aceleração nula), elas são chamadas **equações diferenciais de equilíbrio**

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+f_{cx}=0,\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+f_{cy}=0,\\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+f_{cz}=0.\end{aligned}} \tag{3.24}$$

Tem-se então o caso dos **problemas estáticos** em mecânica dos sólidos.

Observação. *Note que o elemento de volume que estamos considerando é de dimensões finitas*[1]*, o que significa que cada componente de tensão varia ao longo de sua superfície de atuação. De fato, na presente dedução, estamos suprimindo algumas etapas. O procedimento completo foi descrito na dedução das equações diferenciais de equilíbrio de viga sob flexão, Seção 2.3, p. 18. Rigorosamente, o Teorema do Valor Médio do cálculo deve ser usado, de forma que a força devido a uma certa componente τ é igual a $\tau(x^*)\Delta A$, onde x^* é a coordenada de um ponto dentro da área considerada. Na presente dedução consideramos que x^* situava-se no centroide da área, x_c, o que gerou a equação de equilíbrio de momentos vista na eq. (3.19). Com o processo de limite $\Delta A \to 0$, a diferença x^*-x_c tende a zero, ambos os pontos tendem a x, a coordenada do ponto P, e a falta de rigor não produz nenhuma incorreção no resultado final.*

3.4 Alguns problemas reais resolvidos por tensões médias

Num problema genérico, de geometria e carregamento irregular, o estado de tensões é tal que:

- Cada ponto do corpo se encontra submetido à todas ou parte das seis componentes do tensor tensão são não nulas. Isso é denominado de um **estado triaxial de tensões**;
- O valor de cada componente de tensão varia ponto a ponto, i.e., $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\mathbf{x})$. Existe um gradiente de tensões.

Isso faz com que a solução da maioria dos problemas reais seja uma tarefa formidável, frequentemente sendo possível apenas de forma aproximada, através de métodos numéricos como o *Método de Elementos Finitos*. Entretanto, diversos dos componentes mecânicos mais utilizados em engenharia, como as **barras, cabos** (como na Figura 3.11)**, pinos e colunas**, permitem uma solução bastante simples. Isso ocorre por que, fisicamente o estado de tensões nesses elementos é suficientemente simples para tornar possíveis as seguintes, **hipóteses simplificativas**:

- O **estado de tensões é uniaxial**, isto é, das seis componentes de tensão, apenas uma delas é não nula, geralmente uma tensão normal, σ_x, ou cisalhante, τ_{xy};
- O gradiente de tensões é bastante simples:
  - a tensão é uniforme ao longo da seção transversal do componente. Algumas vezes, como nos problemas de cisalhamento vistos a seguir, a distribuição de tensões não é uniforme, mas conseguimos realizar cálculos aproximativos tomando seu valor médio.;
  - a tensão é uniforme ao longo do comprimento da barra, ou varia de forma previsível, frequentemente linear ao longo de uma das coordenadas, como nos problemas de flexão de vigas. A seguir fazemos o detalhamento de alguns casos que se encaixam nessa situação de tensões uniformes.

[1] O termo *dimensão finita* é usado na literatura para ser entendido como um volume não infinitesimal. Então ele tem valores mensuráveis, i.e., 20 mm^3, ou 10^{-3}mm^3, etc. Isso é diferente de um volume infinitesimal, cujas dimensões só podem ser concebidas no sentido de um limite tendendo a zero.

3.4.1 Tensões normal e cisalhante médias

Barra sob carga axial

Considere um segmento de barra (ou cabo) sob carga axial, como na Figura 3.9a, onde previamente já se tenha determinado o esforço normal na seção s. Nesse caso, a **tensão normal média** na seção é

$$\boxed{\sigma_{med}(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)}} \tag{3.25}$$

Note que tanto o esforço normal N_x quanto a área A da seção transversal podem variar de seção a seção.

Observa-se que, de fato, as tensões podem variar de um ponto a outro da seção. Entretanto, essa variação é bastante pequena em regiões distantes das extremidades da barra ou de variações bruscas de seção transversal. Entretanto, mesmo que a tensão varie de ponto a ponto da seção, o valor N/A é uma média da tensão na seção, que pode ser usada, desde que de forma cuidadosa, como descrito no texto a seguir.

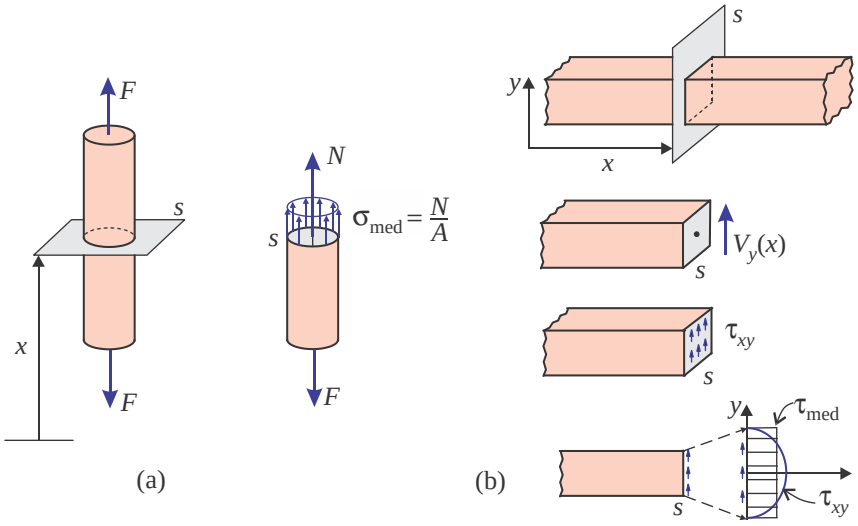


Figura 3.9: (a) Tensão normal média σ_{med} em barra tracionada; (b) distribuição de tensão cisalhante real $\tau_{xy}(y)$ e tensão média τ_{med}.

Viga sob esforço cortante

Como na Figura 3.9b, considere uma seção qualquer de uma viga numa coordenada x, em que já se tenha previamente determinado o esforço cortante $V_y(x)$. Esse caso é mais complicado, por que a **distribuição de tensões cisalhantes na seção**, fisicamente, **não é uniforme** (como será demonstrado em capítulo subsequente para o caso de uma seção retangular), mas aproxima-se de uma função parabólica ao longo da direção do cortante, isto é, se temos V_y como na figura, a tensão cisalhante varia ao longo de y na seção conforme uma função $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$, como ilustrado na figura (b) inferior. Em diversas situações, entretanto, usa-se o **valor médio da tensão cisalhante**, dado por

$$\boxed{\tau_{med}(x) = \frac{V_y(x)}{A(x)}} \tag{3.26}$$

Nesse ponto é interessante o leitor ficar alerta de que:

Sempre as tensões médias são calculadas usando o esforço na seção, nunca diretamente uma força externa. (3.27)

Exemplo 1 - Tensões normais num esticador de cabos

Considere o esticador de cabos mostrado na Figura 3.10, submetido a uma força $F = 10$ kN. A áreas de seção transversal no parafuso, seção $a-a$, é $A_a = 100$ mm^2, e na seção $b-b$ é $A_b = 60$ mm^2. Estime as tensões normais médias em ambas as seções:

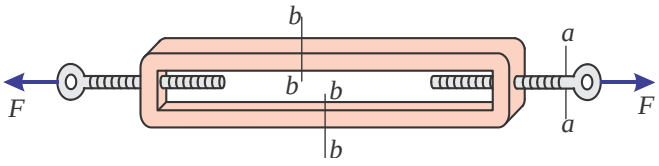


Figura 3.10: Esticador de cabos do Exemplo 1.

Essa geometria é uma estilização de um estirador típico, como pode ser visto na Figura 3.11. Ali também se pode ver uma forma simples de fixar a extremidade do conjunto a uma base fixa, no caso através de abraçadeira e parafuso. Note-se que no estirador, um dos parafusos deve possuir rosca invertida.

Figura 3.11: Detalhe de fixador e esticador de cabos de aço de tipo simples.

Solução:

O cálculo das tensões médias é imediato. Primeiro determinamos o esforço normal, que é $N_a = F$ na seção $a-a$ e $N_b = F/2$ na seção $b-b$. As tensões médias são:

$$\begin{aligned} \tau_{aa} &= \frac{N_a}{A_a} = \frac{10.10^3 \text{ N}}{100 \text{ mm}^2} = 100 \text{ N/mm}^2 = 100 \text{ MPa}, \\ \tau_{bb} &= \frac{N_b}{A_b} = \frac{5.10^3 \text{ N}}{60 \text{ mm}^2} = 83,3 \text{ N/mm}^2 = 83,3 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

As componentes do tensor tensão média em um ponto arbitrário na seção $a-a$ e na seção $b-b$, em relação a um sistema de coordenada em que o eixo x seja axial com as forças aplicadas, são:

$$\sigma^a = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}, \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\sigma}^a = \begin{bmatrix} 83,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Exemplo 2 - Barra escalonada - tensões nominais

Considere uma barra de uma máquina, como ilustrada na Figura 3.12. É uma **barra escalonada**, isto é, a seção transversal é uniforme em cada trecho, como mostrado. Uma barra desse tipo é comum em eixos de redutores de velocidade de engrenagens, quando apoiadas por dois ou mais rolamentos em vez do engaste do presente caso. Determine as tensões normais médias nas seções transversais normais nas regiões centrais de cada trecho, devido as forças axiais aplicadas F_1, F_2, F_3 e F_4.

Observação 1: num componente real, a variação de espessura não é brusca como no presente caso. Uma variação suave é incorporada na transição entre os escalonamentos de forma a reduzir as tensões localizadas que surgem nessas regiões.

Observação 2: nessa classe de problemas, em que a geometria apresenta variações de diâmetro, de espessuras, presença de furos, ranhuras e vários outros tipos de irregularidade geométrica, as tensões médias são denominadas **tensões nominais**, e são usadas como ponto de partida para o cálculo dos valores locais, mais precisos de tensões, que ocorrem nas regiões próximas às variações de seção. A complementação desse tipo de problema é feita com o uso de **fatores de concentração de tensões,** que será visto no Capítulo 4.

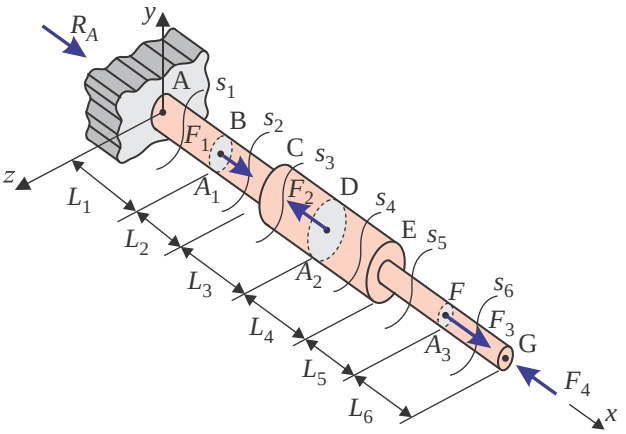


Figura 3.12: Barra escalonada sob cargas axiais do Exemplo 2.

Os dados são: $A_1 = 60$ mm^2 para as seções do trecho AC, $A_2 = 120$ mm^2 e $A_3 = 50$ mm^2 para as seções nos trechos CE e EG. Os comprimentos são: $L_1 = L_2 = 60$ mm, $L_3 = L_4 = 80$ mm e $L_5 = L_6 = 50$ mm. As forças são: $F_1 = 10$ kN, $F_2 = 15$ kN, $F_3 = 8$ kN e $F_4 = 5$ kN. Note que essa é a situação típica em um eixo escalonado de redutor de velocidades, como ilustrado na Figura 3.13, em que cada escalonamento é usado para suportar uma polia, engrenagem ou mancal.

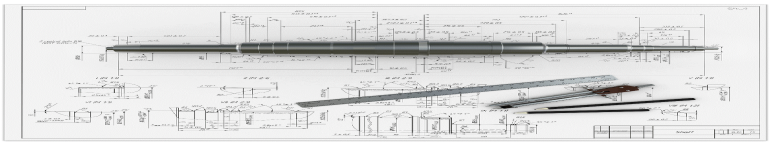


Figura 3.13: Um eixo escalonado típico.

Solução:

Tabela 3.1: Resultados dos Exemplos 2 e 3.

Seção no trecho	Esforço, kN	Área, mm^2	Tensão média, MPa	n
AB	$-2,0$	60	$\sigma = \frac{-2{\cdot}10^3\text{N}}{60\ \text{mm}^2} = -33,3$	12
BC	$-12,0$	60	$\sigma = \frac{-12{\cdot}10^3\text{N}}{60\ \text{mm}^2} = -200,0$	2.0
CD	$-12,0$	120	$\sigma = \frac{-12{\cdot}10^3\text{N}}{120\ \text{mm}^2} = -100,0$	4,0
DE	$+3,0$	120	$\sigma = \frac{3{\cdot}10^3\text{N}}{120\ \text{mm}^2} = +25,0$	16
EF	$+3,0$	50	$\sigma = \frac{3{\cdot}10^3\text{N}}{50\ \text{mm}^2} = +60,0$	6,7
FG	$-5,0$	50	$\sigma = \frac{-5{\cdot}10^3\text{N}}{50\ \text{mm}^2} = -100,0$	4,0

Como método de trabalho, devemos sempre seguir a indicação do quadro (3.27), isto é, **primeiramente devemos obter os esforços normais** em cada seção onde desejamos estimar as tensões. Uma vez que o problema é isostático, a reação no apoio pode ser obtida usando simplesmente o equilíbrio de forças externas. Para realizar os cálculos, inicialmente definimos um sistema de coordenadas e obtemos a **reação** no apoio A como:

$$\sum F_x \rightarrow R_A + F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A = 2 \text{ kN}.$$

Para os **esforços**, usamos o método das seções, realizando seis cortes, um em cada trecho, como indicado na Figura 3.12. Note que, como não há carga axial distribuída, apenas cargas concentradas, sabemos que o esforço normal será uniforme em cada trecho entre cargas externas concentradas, de forma que precisamos realizar apenas um corte em cada trecho, numa posição arbitrária nele. Na Figura 3.14 mostramos os diagramas de corpo livre apenas nos três primeiros trechos. O diagrama completo de esforços é visto na Figura 3.15.

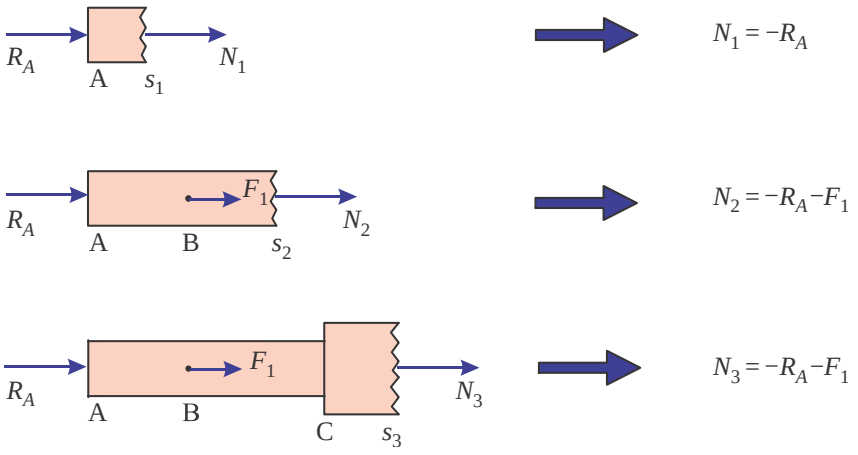


Figura 3.14: Alguns diagramas de corpo livre para o Exemplo 2.

Uma vez conhecido o esforço em cada seção, o cálculo da tensão média é imediato, através da equação (3.25), como visto na Tabela 3.1.

3.4.2 Modos de falhas e tensões admissíveis

Pode-se definir **modo de falha** como qualquer comportamento ou característica de uma estrutura que possa ser classificada como indesejável. O Capítulo 6 detalha alguns dos modos de falha, porém aqui podemos antecipar alguns deles, dentre dezenas de outros:

- Falha por deslocamento excessivo, isto é, baixa rigidez da peça;

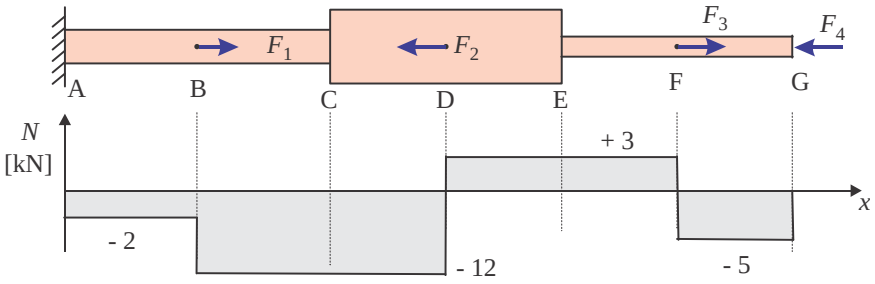


Figura 3.15: Diagrama de esforços normais do Exemplo 2.

- Falha do material, sendo a ruptura (separação da peça em duas partes) apenas a mais óbvia dentre inúmeras outras formas;
- Falha por flambagem ou instabilidade, como brevemente descrita no Capítulo 13;

Consideramos no momento apenas a **falha do material**. Sabe-se que em grande parte dos casos **esse tipo de falha é diretamente associada ao nível de tensões aplicadas em cada ponto do corpo.** Grosso modo, podemos entender que cada material existente, por exemplo, aço, alumínio, concreto, madeira, polímeros, cerâmicos etc, é capaz de suportar tensões até um certo valor. Existe então um nível crítico de tensão, definido para cada material que, dentro de certas condições, faz com que o material falhe.

Para um ponto do corpo submetido a um estado triaxial de tensões (aquele em que as nove componentes do tensor são não nulas), o processo de análise de falha (e segurança) necessita uma elaboração mais detalhada, através de teorias próprias, (algumas das quais serão vistas no Capítulo 13). Entretanto, para os **estados uniaxiais de tensão**, as ideias são bastante imediatas, como visto a seguir, através dos dois casos típicos:

1. Para uma porção de material no ponto de coordenada **x**, **sob tensão normal simples**, define-se o **coeficiente de segurança** n no ponto por:

$$n(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{aplic}(\mathbf{x})} = \frac{\text{máxima tensão de resistência do material}}{\text{tensão aplicada no ponto de coordenada } \mathbf{x} \text{ da peça}}. \tag{3.28}$$

   σ_{aplic} é a tensão aplicada no ponto analisado. É a tensão que resulta da aplicação do carregamento na peça. Note que σ_{aplic} é conceitualmente distinto de σ_{resist}, sendo esta uma característica do material, sem relação com o carregamento ou com as dimensões da peça de que o material é construído. Nos Capítulos 4 e 6 serão detalhados tipos e formas de determinação de σ_{resist}. A ideia em (3.28) é que só há segurança no ponto se a tensão aplicada for menor que a tensão que o material pode resistir quando submetido num ensaio ao mesmo tipo de estado de tensões, i.e., tensão normal simples O coeficiente de segurança é então uma função do ponto. Entretanto, numa grande quantidade de situações, a falha de um ponto do corpo leva à falha da estrutura como um todo. Assim, **o coeficiente de segurança da estrutura, n_{estr}, é definido pelo ponto mais solicitado, isto é, aquele ponto de menor** n. Então, n_{estr} é obtido por

$$n_{estr} = \min_{\mathbf{x}} n(\mathbf{x}),$$

   Assim, para se ter segurança na estrutura deve-se ter $n_{estr} > 1$, enquanto $n_{estr} < 1$ indica falha.

2. Para elementos submetidos apenas a **cisalhamento puro**, i.e., a uma única das três componentes de tensão cisalhante, (3.28) pode ser reescrito como

$$n = \frac{\tau_{resist}}{\tau_{aplic}} \tag{3.29}$$

Cada área da engenharia, por exemplo, civil, aeronáutica, ferroviária, naval, nuclear, espacial, militar etc, através de suas associações, entidades de classe, grandes consumidores como governos ou entidades governamentais, determina ou recomenda, através de normas, valores mínimos de n a serem usados para cada material e cada tipo de estrutura.

A escolha do n deve refletir, de fato, a quantidade de informação e aspectos desconhecidos no projeto. Assim, se todas as dimensões, cargas e condições de uso forem muito bem determinadas, pode-se usar um n pequeno, próximo de 1. Isso é o que ocorre, por exemplo, na indústria aeronáutica. Deve-se observar que $n \gtrsim 1$ indica menos material, estrutura mais leve, mais bem determinada.

Ao contrário, situação como algumas áreas de construção civil, onde a qualidade da mão-de-obra e do material pode ser bastante variável, os valores de coeficientes de segurança devem ser grandes.

As equações acima são bastante adequadas ao chamado procedimento de verificação ou **análise de segurança** da peça, onde conhecemos o carregamento, a geometria, o material e as dimensões. Como cada ponto encontra-se submetido a um valor distinto de tensões, cada ponto apresenta-se mais próximo ou mais distante da falha, e $n = n(\mathbf{x})$ reflete esse **nível local de segurança**.

Por outro lado, é usual o conceito de **tensão admissível** σ_{adm}, como sendo o maior valor de tensão que admite-se aplicar à estrutura. Quando esse valor é dado na elaboração de um projeto, ele já embute um coeficiente de segurança, isto é,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{resist}}{n}. \tag{3.30}$$

O dimensionamento pode então ser feito por

$$\sigma_{apl} \leqslant \sigma_{adm}. \tag{3.31}$$

Exemplo 3 -Determinação do coeficiente de segurança

Considere a barra escalonada do Exemplo 2. Realize a análise de segurança da estrutura, isto é, determine os coeficientes de segurança locais e, a partir deles, determine o coeficiente global da peça. O material da barra é aço, com tensão de ruptura $\sigma_R = 400$ MPa, tanto a tração quanto a compressão.

Solução:

No Exemplo 2 tínhamos já determinado as tensões aplicadas em toda a barra. Como a barra é de seções escalonadas, sob cargas concentradas, as tensões são uniformes em cada trecho, como visto na penúltima coluna da Tabela 3.1.

Consideremos primeiro uma seção transversal qualquer no trecho AB. Como a tensão média aplicada é compressiva, $\sigma_{AB} = -33,3$ MPa, utilizamos a resistência do material a compressão, $\sigma_R = 400$ MPa. Assim, o coeficiente de segurança local é

$$n_{AB} = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{apl}} = \frac{\sigma_R}{|\sigma_{AB}|} = \frac{400 \text{ MPa}}{33,3 \text{ MPa}} = 12,0.$$

Num ponto qualquer do segmento BC, temos $\sigma_{BC} = -200$ MPa, tal que

$$n_{BC} = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{apl}} = \frac{\sigma_R}{|\sigma_{BC}|} = \frac{400 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}} = 2,0.$$

Da mesma forma, no segmento DE, $\sigma_{DE} = +25$ MPa, e

$$n_{DE} = \frac{\sigma_{resist}}{\sigma_{apl}} = \frac{400 \text{ MPa}}{25 \text{ MPa}} = 16,0.$$

Assim calculamos para pontos em toda a estrutura. Os valores locais são listados na última coluna da tabela 3.1. O coeficiente de segurança global da estrutura, nesse caso, é obtido pelo mínimo n, isto é, $n = 2,0$, que ocorre em qualquer ponto do trecho BC, excetuando-se as regiões próximas às transições entre diferentes seções transversais. Essas seções são as **seções críticas da**

estrutura, isto é, aquelas mais propensas a apresentarem falha em situações anormais de uso, como uma sobrecarga.
Note-se, entretanto, que os valores obtidos nesse exemplo são apenas nominais, valores preliminares, válidos apenas nas seções distantes das irregularidades geométricas que apresentam as chamadas **concentrações de tensões**. Nessas seções o tratamento é feito de forma separada.

Exemplo 4 - Dimensionamento de uma barra escalonada

Considere a barra da Figura 3.12 do Exemplo 2, como as cargas indicadas. Dimensione a seção transversal em cada trecho, isto é, determine as áreas A_1, A_2 e A_3, nas seções transversais dos trechos AC, CE e EG. O material é aço, com tensão de ruptura $\sigma_R = 400$ MPa. Use um coeficiente de segurança $n = 2,0$.

Solução:

A primeira etapa no processo consiste sempre na determinação das **reações** nos apoios e dos diagramas de **esforços**. Essas etapas já foram executadas no Exemplo 2, e os esforços normais são vistos no diagrama da Figura 3.15.
A tensão admissível em cada ponto é

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_R}{n} = \frac{\pm\ 400\text{MPa}}{2} = \pm 200\ \text{MPa}$$

onde o sinal $\pm$ aplica-se a tração e a compressão respectivamente. O dimensionamento em cada trecho é feito como segue.

Trecho AC

Uma vez que foi estabelecido que ao longo de todo o trecho AC a seção transversal seja uniforme, as seções em que o material é mais solicitado são aquelas onde o esforço é maior, nesse caso, no trecho BC, onde $N_{BC} = -12$ kN. Então esse esforço é o que definirá a área de seção transversal em todo o trecho AC. Em qualquer ponto desse trecho, a tensão média aplicada é

$$\sigma_{apl}^{BC} = \frac{N_{BC}}{A_1}.$$

Podemos determinar A_1 fazendo com que

$$\sigma_{apl}^{BC} = \sigma_{adm}.$$

Assim,

$$\boxed{\sigma_{apl}^{BC} = \frac{N_{BC}}{A_1} = \sigma_{adm}} \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = \frac{N_{BC}}{\sigma_{adm}}. \tag{3.32}$$

Substituindo os valores, a seção transversal em AC deve ter área

$$A_1 = \frac{N_{BC}}{\sigma_{adm}} = \frac{-12.000\ \text{N}}{-200\ \text{N/mm}^2} = 60,0\ \text{mm}^2.$$

O mesmo procedimento pode ser repetido para os demais trechos.

Trecho CE

Também a área é uniforme, e tomamos o maior esforço, $N_{CD} = -12$ kN. Para $\sigma_{apl} = \sigma_{adm}$, isso resulta

$$A_2 = \frac{N_{CD}}{\sigma_{adm}} = \frac{-12.000\ \text{N}}{-200\ \text{N/mm}^2} = 60,0\ \text{mm}^2.$$

Trecho EG

A área da seção é uniforme e o esforço normal máximo é $N_{FG} = -5$ kN. A área necessária para a seção é

$$A_3 = \frac{N_{FG}}{\sigma_{adm}} = \frac{-5.000 \text{ N}}{-200 \text{ N/mm}^2} = 25,0 \text{ mm}^2.$$

Temos então a primeira estimativa do dimensionamento da barra. Outras verificações ainda se tornam necessárias, como por exemplo a verificação quanto a possibilidade de flambagem nas barras comprimidas (como será visto em capítulo próprio), ou outro modo de falha qualquer. Isso pode tornar necessárias alterações subsequentes nas dimensões.

Exemplo 5 - Força peso em coluna

Considere uma coluna de concreto, como na Figura 3.16a, de altura $L = 4$ m, com área de seção transversal de raio $R = 200$ mm, suportando o peso próprio e uma carga uniformemente distribuída no topo com resultante $F = 10$ kN. Determine a tensão normal média em função da distância z da seção à base. A densidade do concreto é $\rho = 2.300$ kg/m^3.

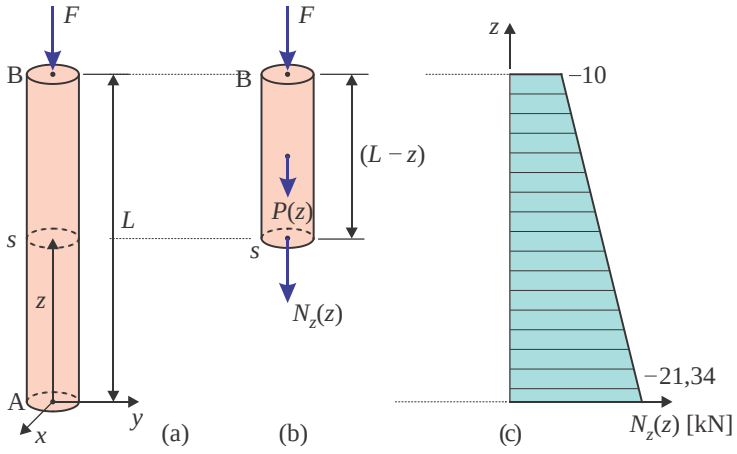


Figura 3.16: Coluna do Exemplo 5 e diagrama de esforços normais.

Solução:

Normalmente, na resolução de um problema, deveríamos primeiramente determinar as reações nos apoios. Porém, como neste problema a barra possui apenas um apoio, é possível aplicar o método das seções sem o conhecimento da reação, bastando tomar o diagrama de corpo livre do lado da estrutura que não contém o apoio. Assim, fazemos um corte na seção s, de coordenada z, e tomamos o lado superior, como na Figura 3.16b. Ali temos indicadas todas as forças atuantes: a carga F, o esforço na seção, $N(z)$, e a força peso do segmento, $P(z)$. O equilíbrio de forças é

$$\sum F_z \rightarrow \quad N_z(z) + P(z) + F = 0. \tag{3.33}$$

$P(z)$ corresponde apenas ao peso do material acima do corte na coordenada z, isto é,

$$P(z) = \rho g(L - z)A,$$

onde g é a aceleração da gravidade. Assim, (3.33) produz

$$\boxed{N_z(z) = -F - \rho g A(L - z)} \tag{3.34}$$

Essa equação é plotada na Figura 3.16c. Para os dados do problema a função toma a forma: $N_z(z) = -21.340 + 2.835,4z$, com z dado em metros e N_z em Newtons, para $\forall z \in (0; 4)$m. A **tensão média** em cada seção também será uma função de z, dada por

$$\sigma_z(z) = \frac{N_z(z)}{A} = \frac{2.835,4z - 21.340}{\pi\ 0,2^2} = 22.556\ z - 1,698.10^5.$$

Essa também é uma distribuição linear, uma vez que a área A da seção é constante. As tensões máximas e mínimas ocorrem respectivamente na base e no topo:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_z(z=0) = -1,698.10^5 \text{ Pa}, \\ \sigma_{\min} &= \sigma_z(z=4)\text{m} = -7,95.10^4 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

3.4.3 Usos da tensão cisalhante média - Pinos e chapas coladas

Consideremos alguns casos bastante comuns em estruturas de engenharia que são normalmente analisadas através do conceito de tensões cisalhantes médias. O primeiro caso é o das **uniões coladas,** como visto na Figura 3.17a. Se usamos o método das seções seccionando o conjunto na interface colada, podemos gerar o diagrama de corpo livre mostrado na figura (b). A força interna na interface, o esforço cortante V_x, deve equilibrar a força externa F. As tensões cisalhantes τ_{xz} distribuem-se na superfície de tal forma que sua resultante seja V_y, i.e., a equação (3.26) é aplicável. Entretanto, a relação entre τ_{xz} e V_x não é simples. Usando métodos consistentes de solução, sabe-se que a distribuição de τ_{xz} na superfície não é uniforme, mas tem uma forma como aquela ilustrada qualitativamente na Figura (c). Como forma de simplificar os procedimentos de cálculo, usa-se a tensão cisalhante média na área, representada pela linha tracejada na Figura 3.17c. Claramente, a tensão média é inferior ao valor máximo da tensão correta, que ocorre em algum ponto da região de contato. Então, **deve-se observar que o uso de tensões médias exige o uso de coeficientes de segurança maiores, que compensem a falta de precisão no cálculo da tensão aplicada**.

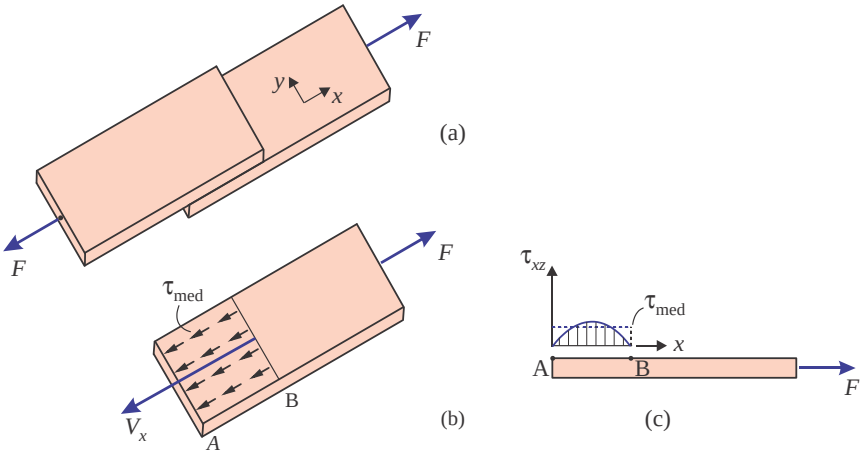


Figura 3.17: Distribuição de tensões reais τ_{xz} e média τ_{med}, numa união colada.

União por pinos

Uma segunda forma clássica de união entre barras é aquela através de pinos, como na foto da Figura 3.18, que ilustra um caso simples de junção de vigas através de abraçadeira aparafusada. Nessa junção, por ter apenas um parafuso, deixa a barra livre para se rotacionar, funcionando como uma rótula. Uma situação mais complexa é como na estrutura de vigas do edifício mostrado na Figura 3.4.3a. Nota-se no detalhe da figura (b), uma junta que une vigas horizontais, verticais e duas diagonais. Nota-se que as vigas diagonais são fixadas por dois e quatro parafusos, o que funciona como um engaste, sendo capaz de transmitir momentos, o que confere maior rigidez à estrutura como um todo.

Note-se que em estruturas de barras, os **principais modos de falha** são:

- flambagem (instabilidade) nas barras comprimidas e

Figura 3.18: Junta entre vigas, constituída por abraçadeira aparafusada.

- falha nas juntas em torno dos pinos, nas barras tracionadas.

(a)

(b)

A Figura 3.19 apresenta uma representação esquemática desse tipo de junta. Diversos modos de falha são possíveis, sendo que os principais são os seguintes:

1. **Cisalhamento no pino**

   Na Figura 3.19a temos uma indicação das forças aplicadas pelas barras sobre o pino. **Claramente outras forças devem estar também sendo aplicadas, uma vez que o equilíbrio de momento do pino não é satisfeito apenas pelo par de forças resultantes** F. O efeito do cisalhamento no pino pode ser imaginado com a ajuda da Figura 3.20b, i.e., o cisalhamento tende a gerar uma ruptura plana na seção de interface entre as cargas aplicadas pela superfície do furo na lateral do pino. A visualização mostrada é apenas uma idealização, uma vez que uma eventual ruptura ocorre acompanhada de um campo de deformações preliminares que é dependente das características do material.

   A Figura 3.20c mostra o esforço cortante na seção transversal do pino, que coincide com a interface das barras. Finalmente, a Figura 3.20d indica as tensões cisalhantes τ distribuídas na seção. A distribuição precisa dessas tensões é complexa, de forma que geralmente os cálculos são realizados usando a tensão média:

$$\tau_{\text{pino}} = \frac{V}{A_{\text{pino}}}. \tag{3.35}$$

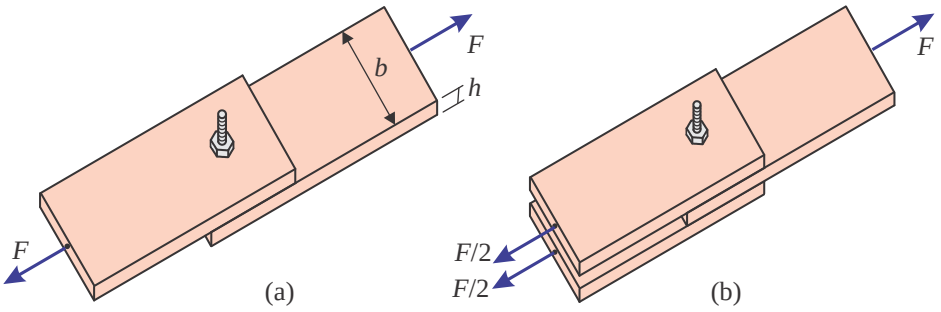


Figura 3.19: Uniões entre chapas através de pinos.

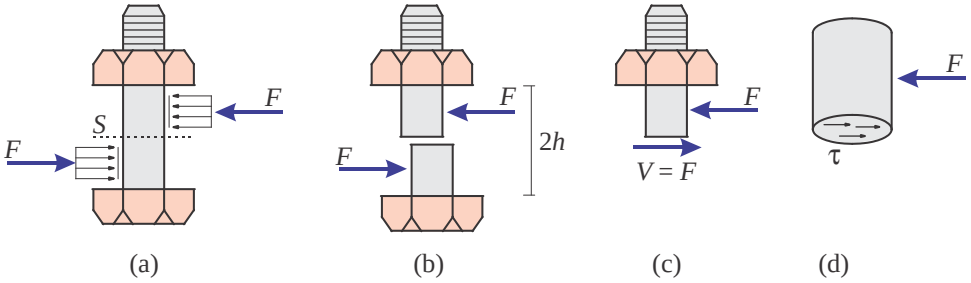


Figura 3.20: Tensões cisalhantes no pino.

2. **Falha na seção líquida da barra**

   Um diagrama da barra é visto na Figura 3.21b. O pino exerce uma força F distribuída na borda do furo como ilustrado. Essa força é a resultante de uma distribuição de tensões normais na seção s_1, indicada na figura (b). A tensão normal média na seção líquida é dada por

$$\sigma_{\text{liq}} = \frac{F}{A_{\text{liq}}} = \frac{F}{(b-d)h}. \tag{3.36}$$

   A_{liq} é a área líquida da seção, i.e., a área de material no corte s_1 da Figura 3.21a, e h é a espessura da chapa.

3. **Rasgamento na borda**

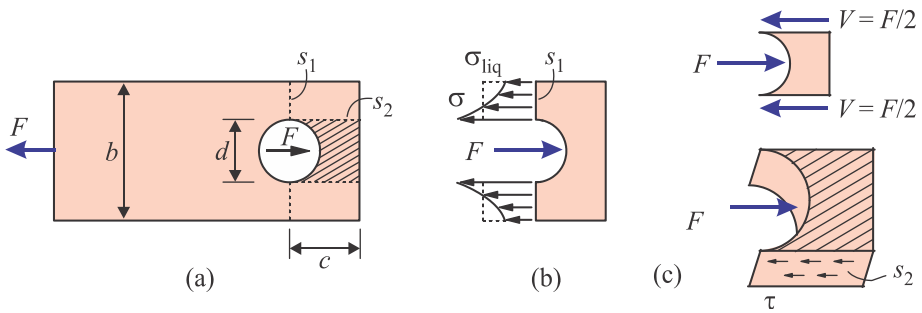


Figura 3.21: Tensões na chapa. (b) tensão normal na seção líquida; (c) tensões cisalhantes de rasgamento na borda.

Quando o furo é posicionado muito próximo da borda da barra, existe o risco de rasgamento ao longo da seção s_2 (indicada na região hachurada na Figura 3.21a). No caso desse tipo de falha ocorrer, toda a peça de material marcada nas figuras (a) e (c) é sacada da barra. O esforço cortante que se desenvolve na superfície s_2 equilibra a força exercida pelo pino. A

tensão cisalhante média na superfície s_2 é dada por

$$\tau_{\text{rasg}} = \frac{V}{A_{\text{rasg}}}, \tag{3.37}$$

onde A_{rasg} é a área de rasgamento, que é a área de material que suporta o esforço cortante $F/2$ na Figura 3.21c.

4. **Esmagamento do furo**

   A Figura 3.22 ilustra a tensão de contato provocado pela atuação da superfície do pino sobre a superfície interna do furo. O material na borda do furo encontra-se comprimido por tensões normais σ, cuja distribuição aproximada é indicada na figura (b). Caso essas tensões excedam um valor crítico do material, o metal na região próxima ao pino começa a "amassar", sofrendo grandes deformações.

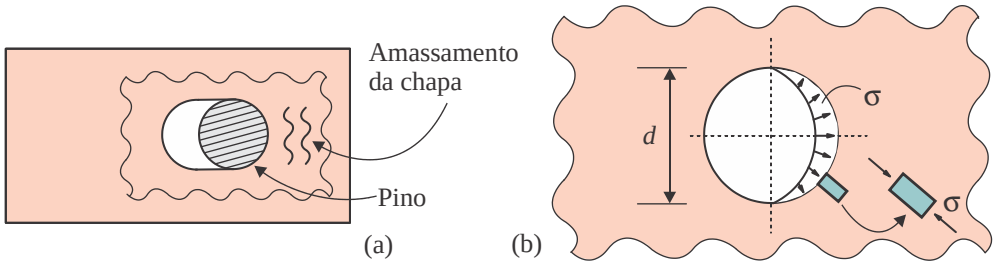


Figura 3.22: Esmagamento do material da chapa pela compressão do pino.

Em lugar de usar a distribuição real de tensões no interior do furo, o procedimento usual de projeto consiste em usar a chamada **tensão média projetada,** dada por

$$\sigma_{\text{proj}} = \frac{F}{A_{\text{proj}}}. \tag{3.38}$$

onde A_{proj} é a área projetada do furo, dada por $A_{\text{proj}} = d\,h$, d é o diâmetro do furo e h a espessura da barra. O dimensionamento ou a análise de segurança é feita comparando a tensão aplicada com um valor representativo da resistência do material ao amassamento, denominado **tensão média de amassamento** σ_{amas}. Assim a segurança ocorre se

$$\sigma_{\text{proj}} < \sigma_{\text{amas}}. \tag{3.39}$$

Exemplo 6 -Dimensionamento em conexões articuladas

Considere a estrutura mostrada na Figura 3.23. A barra AC é suportada pela haste BD que, por sua vez, é suportada por conexões de pinos em ambas as extremidades. Essas extremidades são idênticas e tem suas vistas frontal e superior mostradas na figura. O material da haste e dos pinos é aço, com tensão normal de falha $\sigma_{\text{falha}} = 600$ MPa e tensão cisalhante $\tau_{falha} = 300$ MPa.

(a) Dimensione a seção da região central da haste (diâmetro D);
(b) Determine os diâmetro $d_{p\text{B}}$ e $d_{p\text{D}}$ dos pinos nas extremidades B e D;
(c) Dimensione a cabeça da haste, isto é, determine sua largura b.

A força aplicada no ponto C é $F = 10$ kN. Use um coeficiente de segurança $n = 2,0$. A espessura da haste BD nas extremidades é $h = 3$ mm.

Solução:

O problema é isostático. Então, a primeira etapa na solução é a determinação das **reações nos apoios**. Com a ajuda da Figura 3.24a, as equações globais de equilíbrio são:

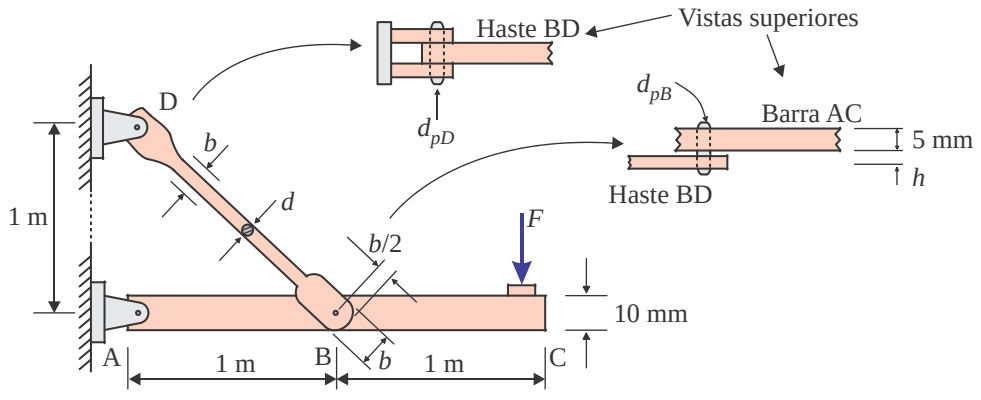


Figura 3.23: Dados do Exemplo 6.

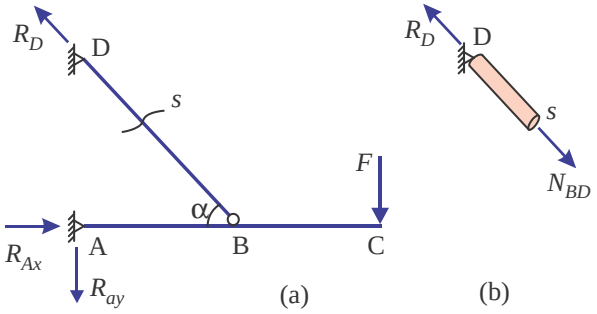


Figura 3.24: Reações nos apoios do Exemplo 6 e esforço na haste.

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow \quad R_{Ax} - R_D \cos\alpha = 0, \\ \sum F_y &\rightarrow \quad R_D \text{ sen } \alpha - R_{Ay} - F = 0, \\ \sum M_z^A &\rightarrow \quad R_D \cos\alpha \ (1) - F \ (2) = 0, \end{aligned}$$

onde $\alpha = 45^o$. A solução do sistema é: $R_D = 28,3$ kN, $R_{Ay} = 10$ kN e $R_{Ax} = 20$ kN.

O **esforço normal na haste** é obtido pelo método das seções, por um corte numa seção genérica s, como visto na Figura 3.24(b), donde se obtém $N_{BD} = R_D = +28,3$ kN. O conhecimento desse esforço é fundamental, uma vez que essa é a força transmitida através dos pinos e pela região central da haste.

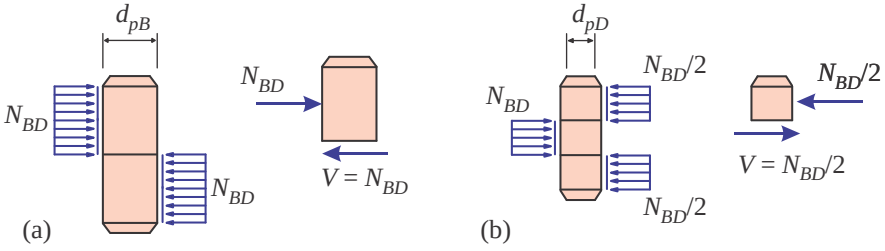


Figura 3.25: (a) Pino no apoio B; (b) pino no apoio D.

As **tensões admissíveis** do problema, normal e cisalhante, são obtidas por (3.30):

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{adm}} &= \frac{\sigma_{\text{falha}}}{n} = \frac{600\ \text{MPa}}{2,0} = 300\ \text{MPa},\\ \tau_{\text{adm}} &= \frac{\tau_{\text{falha}}}{n} = \frac{300\ \text{MPa}}{2,0} = 150\ \text{MPa}.\end{aligned}$$

(a) **Seção transversal na haste BD**. A **tensão** normal **aplicada** na seção arbitrária s da haste é

$$\sigma_{apl} = \frac{N_{BD}}{A} = \frac{28.300}{A}.$$

O dimensionamento é feito determinando a área da seção transversal A que faz com que a tensão média aplicada atinja o valor admissível do material, isto é:

$$\sigma_{\text{apl}} = \sigma_{\text{adm}} \quad \rightarrow \quad \frac{28.300\ \text{N}}{A} = 300\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = 94,3\ \text{mm}^2}$$

(b) **Diâmetro dos diâmetro** $d_{p\text{B}}$ e $d_{p\text{D}}$ nas extremidades B e D. A Figura 3.25 mostra os diagramas de corpo livre dos pinos nos apoios B e D. No apoio B o esforço cortante é $V = N_{BD} = 28,3$ kN e no apoio D o esforço no pino é $V = N_{BD}/2 = 14,1$ kN, como visto nos diagramas da Figura 3.25. Assim, as tensões cisalhantes médias aplicadas nos pinos são:

$$\begin{aligned}\tau^{\text{B}}_{\text{apl}} &= \frac{V_{\text{B}}}{A_{p\text{B}}} = \frac{28,3\cdot 10^3}{\pi d_{pB}^2/4} = \frac{36,0.10^3}{d_{pB}^2},\\ \tau^{\text{D}}_{\text{apl}} &= \frac{V_{\text{D}}}{A_{p\text{D}}} = \frac{14,14\cdot 10^3}{\pi d_{pB}^2/4} = \frac{18,0.10^3}{d_{pB}^2}.\end{aligned}$$

$A_{p\text{B}}$ e $A_{p\text{D}}$ são as áreas de seção transversal dos pinos B e D. Determinamos agora os diâmetros que fazem com que as tensões aplicadas atinja o valor admissível do material. Assim,

$$\begin{aligned}\tau^{\text{B}}_{\text{apl}} = \tau_{\text{adm}} \quad &\rightarrow \quad \frac{36,0\cdot 10^3}{d_{p\text{B}}^2} = 150\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{d_{p\text{B}} = 15,5\ \text{mm}}\\ \tau^{\text{D}}_{\text{apl}} = \tau_{\text{adm}} \quad &\rightarrow \quad \frac{18,0\cdot 10^3}{d_{p\text{D}}^2} = 150\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{d_{p\text{D}} = 11,0\ \text{mm}}\end{aligned}$$

(c) **Cabeça da haste.** As geometrias das cabeças da haste nas extremidades B e D, podem ser visualizadas na Figura 3.21a. Primeiramente determinaremos a **seção líquida** s_1. Tomando a equação (3.36), a **tensão normal** média **aplicada** na extremidade B é

$$\sigma_{\text{liq}} = \frac{N_{BD}}{A_{\text{liq}}} = \frac{N_{BD}}{(b-d_{PB})h} = \frac{28,3\cdot 10^3}{(b-15,5)\times 3}. \tag{3.40}$$

Note que tomamos a extremidade B, onde o pino tem maior diâmetro, o que faz com que a área líquida seja menor que na extremidade D. A tensão média aplicada será igual à tensão admissível do material se b for tal que

$$\sigma_{liq} = \sigma_{\text{adm}} \quad \rightarrow \quad \frac{28,3\cdot 10^3}{(b-15,5)\times 3} = 300 \quad \rightarrow \quad \boxed{b = 46,9\ \text{mm}} \tag{3.41}$$

Nesse ponto temos a determinação preliminar de todas as dimensões, que foram feitas de forma a atender a alguns modos de falha em certas regiões da estrutura. Entretanto, é necessária uma etapa de **verificação de segurança quanto a outros possíveis modos de falha**. Primeiro testamos a segurança quanto ao **rasgamento na borda** da extremidade B da haste BD. Esse modo de falha

é ilustrado na Figura 3.21, na seção s_2., e as tensões cisalhantes correspondentes são vistas na figura (c). A tensão cisalhante média é dada em (3.37) por:

$$\tau_{rasg} = \frac{V}{A_{\text{rasg}}} = \frac{N_{BD}/2}{(b/2)h} = \frac{28,3 \cdot 10^3/2}{(46,9/2) \times 3} = 190,2 \text{ MPa}. \tag{3.42}$$

Logo, com as dimensões obtidas nos itens (a)-(c), há uma previsão de que a tensão de rasgamento aplicada excederia a tensão cisalhante admissível τ_{adm} do material, e se prevê falha quanto a este modo de falha. Torna-se então necessário retornar às etapas anteriores de dimensionamento, e modificar uma ou mais das dimensões de forma a gerar uma configuração que também satisfaça segurança quanto à falha por rasgamento.

Uma opção para acertar o projeto consiste em aumentar a espessura h da cabeça da haste. Se triplicamos essa espessura, isto é, usarmos $h = 9$ mm, podemos refazer os cálculos (3.40)-(3.42), o que produz:

$$\sigma_{\text{liq}} = \sigma_{\text{adm}} \quad \rightarrow \quad \frac{28,3 \cdot 10^3}{(b - 15,5)9} = 300 \quad \rightarrow \quad \boxed{b = 26,4 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\text{rasg}} = \frac{28,3 \cdot 10^3/2}{(26,4/2)9} = 119,1 \text{ MPa} < \tau_{\text{adm}} \qquad \rightarrow OK.$$

O último teste é quanto ao **esmagamento** do material próximo ao furo na haste na extremidade B. O estado de tensões é ilustrado na Figura 3.22. A tensão média de esmagamento é dada por (3.38) como:

$$\sigma_{\text{esm}} = \frac{N_{BD}}{A_{\text{proj}}} = \frac{N_{BD}}{d_{p\text{D}}h} = \frac{28,3 \cdot 10^3}{11,0 \times 9} = \boxed{285,9 \text{ MPa} = \sigma_{esm} < \sigma_{\text{adm}} = 300 \text{ MPa} \qquad \rightarrow OK.} \tag{3.43}$$

Então a tensão de esmagamento é inferior à admissível, e o dimensionamento **é satisfatório**. Temos então um conjunto de dimensões que satisfazem às limitações impostas pelo material. Sem dúvida diversos outros conjuntos dimensionais podem ser determinados, e uma melhor solução pode ser buscada.

Capítulo 4

Deformações e tensões

Nesse capítulo definimos mais uma grandeza fundamental em mecânica dos sólidos, a **deformação**, que se juntará às demais grandezas já estudadas, as **forças externas**, os **esforços** internos, e as **tensões**. O conceito de deformação é embasado em uma outra grandeza fundamental, o campo de **deslocamento,** o que geram **relações deformação-deslocamento**, também denominada relação cinemática. A segunda parte do capítulo trata da relação entre deformações e tensões, as chamadas **relações constitutivas, ou relações tensão-deformação.**

4.1 Ideias básicas de deslocamento e deformação

Considere uma barra reta de seção uniforme, de comprimento L_o, como na Figura 4.1a, engastada na extremidade A. Se aplicamos uma força axial trativa, a barra se deforma e passa a um comprimento L como na figura (b). Existem pelo menos duas formas de equacionar o fenômeno cinemático: através dos conceitos de **campo de deslocamentos** e do **campo de deformação**.

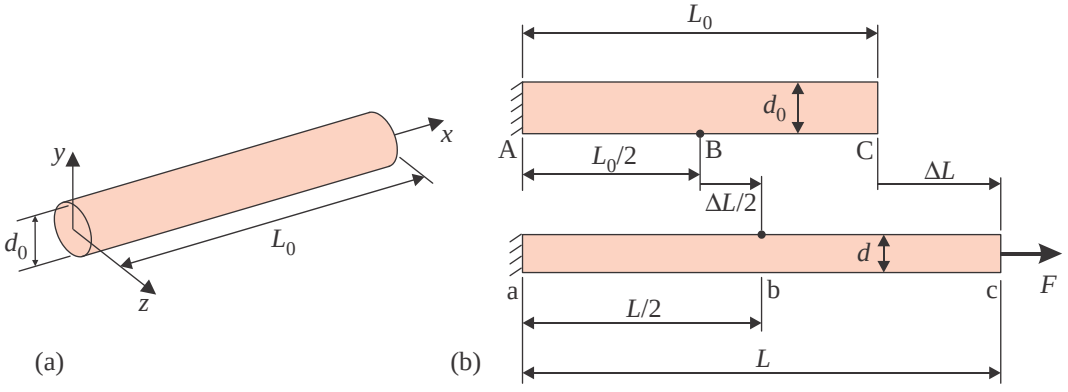


Figura 4.1: Elongamento de uma barra, de um comprimento inicial L_o para um comprimento final L.

Se consideramos a barra fixa pela extremidade A, é visível que cada ponto do material sofreu uma certa quantidade de deslocamento axial (na direção x). Por exemplo, o deslocamento em A é nulo, e a extremidade C deslocou-se ΔL para a posição c. Se considerarmos que a **deformação** seja **uniforme**, temos então que os deslocamentos são proporcionais à coordenada inicial x do ponto. Assim, o ponto central B de coordenada inicial $L_o/2$ sofre deslocamento $\Delta L/2$. Se prosseguimos com a hipótese de proporcionalidade, uma simples "regra de três" mostra que o **deslocamento axial** $u(x)$ numa seção qualquer localizada inicialmente numa coordenada x é dada pela função

$$u(x) = \frac{\Delta L}{L_o} x. \tag{4.1}$$

Quando uma barra como a ilustrada é tracionada, além da variação de comprimento existe também

uma redução nas dimensões transversais, i.e., seu diâmetro reduz-se. Isso significa que cada partícula do material desloca-se ao longo das três dimensões cartesianas. Esse é o chamado **efeito de Poisson**, que será tratado na seção 4.3.

O conceito de deslocamentos é fundamental, mas geralmente a análise de corpos deformáveis é feita com o uso de grandezas derivadas, as deformações. Observe que, em lugar do campo de deslocamentos axiais (4.1), podemos entender todo o comportamento da barra **apenas com a informação do valor de** $\Delta L/L_o$. Assim define-se a **deformação normal específica de engenharia** por

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L_o}} \tag{4.2}$$

$\bar{\varepsilon}$ ("épsilon" minúsculo) é portanto uma quantidade adimensional que, apesar da expressão envolver um comprimento inicial L_o, o valor de $\bar{\varepsilon}$ independente do conhecimento desse comprimento, ou mesmo de como a barra está vinculada. Para entender isso, consideremos o **exemplo** de uma barra com $L_o = 120$ mm que foi extensionada a $L = 121,2$ mm. Então $\Delta L = 1,2$ mm e $\bar{\varepsilon} = 0,01$ (ou 1% como frequentemente é usado). Agora, se for passada a alguém apenas a informação de que $\bar{\varepsilon} = 0,01$, essa pessoa não precisará saber o comprimento original da barra. Se ele tomar qualquer segmento inicial, por exemplo de comprimento $L_o = 20$ mm, ele saberá que esse segmento sofreu extensão de $\Delta L = \bar{\varepsilon} L_o = 0,01 \times 20 = 0,2$ mm, **desde que a deformação seja uniforme em toda a barra**.

A deformação acima tem um caráter "normal", associado a uma variação de comprimento. O termo "normal" se refere ao fato que a deformação é devida a um deslocamento perpendicular à superfície da peça tracionada. Outro tipo de **deformação** é o **cisalhamento**, associado a uma variação do ângulo entre dois segmentos. Considere o tubo de seção circular uniforme sob torção da Figura 4.2. Num ponto A qualquer definimos uma tríade de eixos ortogonais, a, t, r, nas direções axial, tangencial e radial, e tomamos dois segmentos perpendiculares AB e AC sobre a superfície cilíndrica, nas direções axial e tangencial. Com a aplicação do torque, o campo de deslocamentos pode ser visualizado na figura (b). Linhas circunferenciais apenas sofrem rotações em torno do eixo x e linhas retas longitudinais ao longo da superfície cilíndrica tomam a forma de linhas helicoidais.[1] Os segmentos AB e AC deformam-se para ab e ac, que não mais são perpendiculares, mas formam um ângulo $\beta \neq \pi/2$.

Consideremos qualquer outra situação, além daquela do exemplo de torção visto acima, quando se tem dois segmentos de comprimentos diferenciais inicialmente perpendiculares, localizados numa certa coordenada **x** de um corpo. Se logo após a deformação esses segmentos se rotacionam de forma a assumirem um outro ângulo β entre eles, define-se a **deformação cisalhante** no ponto de um corpo como

$$\boxed{\bar{\gamma} = \beta - \frac{\pi}{2}} \tag{4.3}$$

i.e., $\bar{\gamma}$ é o **ângulo de distorção sofrido em relação ao ângulo reto.** γ é "gama" minúsculo), um ângulo dado em radianos.

As definições (4.1) - (4.3) representam as situações mais simplificadas de estados de deformação encontrados em engenharia. Na próxima seção apresentamos o tratamento geral de cinemática tridimensional, e em seguida retornaremos aos casos mais simples através de exemplos.

4.2 Campos de deslocamento e de deformações

É fato sabido que os corpos sólidos reais são deformáveis, i.e., alteram sua **forma** e **dimensões** quando são atuados por forças externas. Podemos obter uma sistematização dessa ideia considerando um corpo genérico, ou parte de um corpo, em sua forma original, **indeformada**, quando está livre de carregamento e em sua forma **deformada**, como ilustrado na Figura 4.3. Podemos

[1] A teoria de torção de eixos retos de seção circular é detalhada no Capítulo 7.

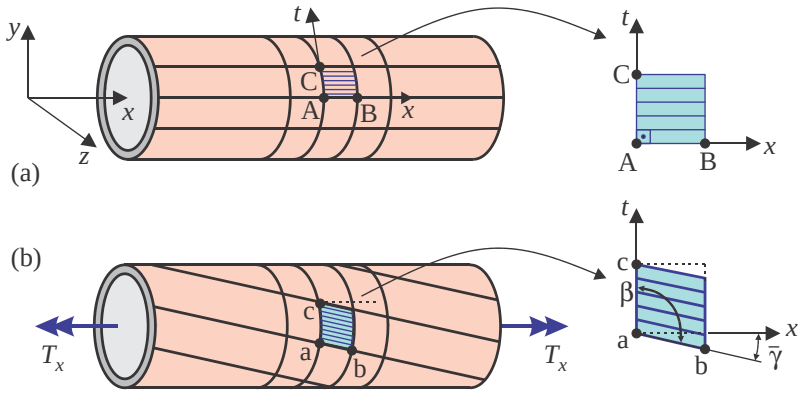


Figura 4.2: Deformação angular num elemento de material num tubo torcionado.

identificar uma porção de material qualquer em sua configuração indeformada, situada numa posição P, definida por suas coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = \{x; y; z\}$. Quando aplicamos o carregamento, cada partícula de material se move, i.e., muda de posição no espaço. O material inicialmente na posição P move-se para a posição p de coordenadas $\overline{\mathbf{x}} = \{\overline{x}; \overline{y}; \overline{z}\}$.

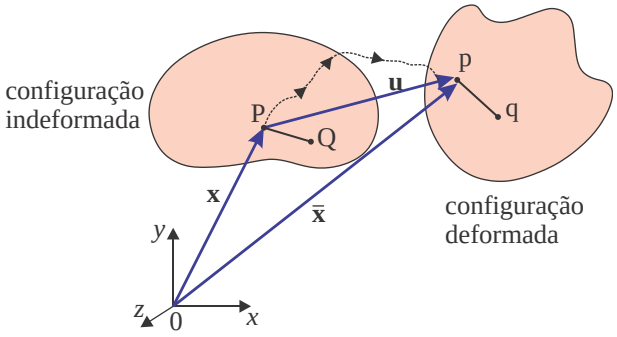


Figura 4.3: Configuração inicial e deformada de um corpo genérico.

Podemos identificar o **vetor deslocamento** $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ como o vetor que define a diferença entre a posição final e a inicial de uma porção de material inicialmente localizado na posição $\mathbf{x}$, i.e.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \tag{4.4}$$

Esse vetor é representado por suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{c} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{array} \right\}. \tag{4.5}$$

i.e., u, v e w são as componentes do movimento do ponto nas direções x, y e z respectivamente. Note que isto não significa uma suposição de que o ponto deslocou-se ao longo de uma linha reta entre as posições $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$. Ao contrário, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ indica apenas as posições inicial e final do movimento. Na Figura 4.3 a trajetória entre os dois instantes é representada pela linha tracejada unindo P a p.

A função vetorial (4.5), ou suas três funções escalares correspondentes, constituem o **campo de deslocamento** do corpo. A partir desse campo, define-se um **campo de deformações** como segue.

Primeiramente, consideramos um ponto A no corpo em sua configuração indeformada, de coordenadas $\mathbf{x}$, e a partir desse ponto identificamos um elemento volumétrico de dimensões finitesimais $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, com faces paralelas aos eixos cartesianos. Na Figura 4.4a temos uma vista do plano xy, com o elemento indeformado formando um retângulo ABCD. Em seguida aplicamos um

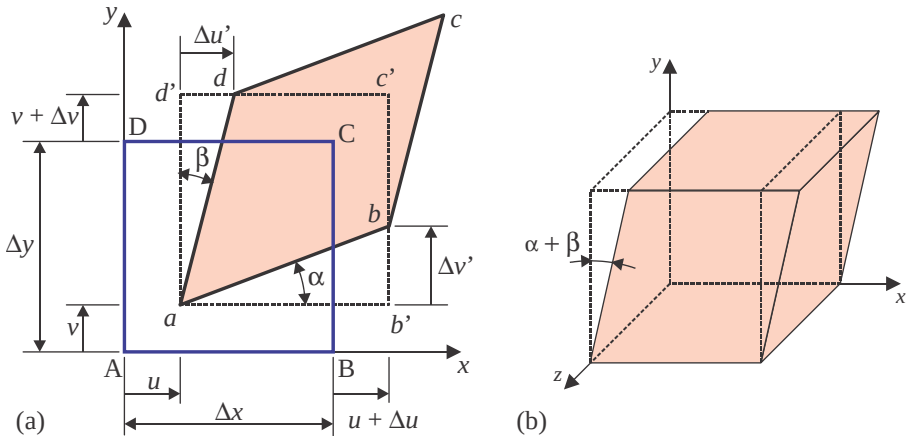


Figura 4.4: (a) Incrementos de deslocamentos de um elemento finitesimal contido no plano xy; (b) Vista 3-D da deformação cisalhante no plano xy, com o elemento tombado sobre o plano xz.

carregamento ao corpo e o material no retângulo deforma-se e os pontos tomam as posições $abcd$ como ilustrado. O ponto A sofre deslocamentos u e v nas direções x e y. Na direção x, o ponto B desloca-se num valor diferente de A, i.e., $u_B = u + \Delta u$. Na direção y, o ponto B também desloca-se diferentemente de A, i.e., $v_B = v + \Delta v'$, o que forma o ângulo α. Para o segmento AD a interpretação é análoga: $u_D = u + \Delta u'$ e $v_D = v + \Delta v$. A Figura 4.4b ilustra a deformação cisalhante no plano xy. (O elemento foi tombado para facilitar a visualização.)

Temos aqui a descrição de uma **teoria simplificada**, **linearizada**, cuja primeira premissa é a de que as **rotações são pequenas**. Esse "pequeno" significa que os ângulos α e β estão naquela faixa em que

$$\text{sen}\ \alpha \approx \text{tg}\ \alpha \approx \alpha \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha \approx 1. \tag{4.6}$$

Quantitativamente, podemos arbitrar um limite, por exemplo $\alpha \lesssim 0,08727$ rad (cerca de 5^o), o que **produz** sen $\alpha = 0,08716$ e tg $\alpha = 0,08749$, i.e., os desvios relativos são de ordem de 0,1 %.

Os incrementos de deslocamentos no elemento podem ser usados para identificar medidas de deformação. Primeiramente, tomemos o segmento horizontal AB ao longo de x, de comprimento inicial Δx. Observando a Figura 4.4, é visível que o comprimento final do segmento, ab, é diferente da projeção ab'. Entretanto, para α pequeno, consideraremos que $ab \simeq ab'$. Assim, a medida de **deformação normal de engenharia** sofrida pelo segmento AB é dada por (4.2), que aqui toma a forma

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{ab' - AB}{AB} = \frac{(u + \Delta u) - u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4.7}$$

Para o segmento vertical AD, a deformação de engenharia é

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{ad' - AD}{AD} = \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y}. \tag{4.8}$$

Os índices "x" e "y" em $\bar{\varepsilon}$ ajudam a indicar a direção do segmento a que se refere a deformação. Finalmente, a deformação cisalhante de engenharia vem de (4.3), que nesse caso é

$$\bar{\gamma} = \alpha + \beta. \tag{4.9}$$

Observando os triângulos associados a α e β na Figura 4.4a, temos que a deformação cisalhante sofrida pelo elemento volumétrico é

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\Delta v'}{\Delta x} + \frac{\Delta u'}{\Delta y}. \tag{4.10}$$

As medidas (4.7)-(4.10) são valores válidos na região macroscópica ABCD. Entretanto, buscamos valores que descrevam a deformação num ponto, o ponto A de coordenadas $\mathbf{x}$. Para isso, fazemos os limites para $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Assim as equações acima resultam em

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.11}$$

ε_x e ε_y são deformações normais específicas e γ_{xy} é a deformação cisalhantes associada ao plano xy.

Todas as considerações feitas de (4.6)-(4.11) podem ser repetidas para os planos xz e yz, no ponto $\mathbf{x}$. Isso resulta no conjunto completo das **seis componentes de deformação** no ponto:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}. \end{array} \tag{4.12}$$

Essas são as relações cinemáticas (ou relações deformação-deslocamento) lineares. Elas são válidas para qualquer corpo, qualquer geometria, carregamento, tipos de apoios e qualquer tipo de material sólido. São limitadas apenas pelas hipóteses de linearidade usadas em sua dedução, i.e., a geometria, o material, o carregamento, devem ser tais que as componentes sejam pequenas.

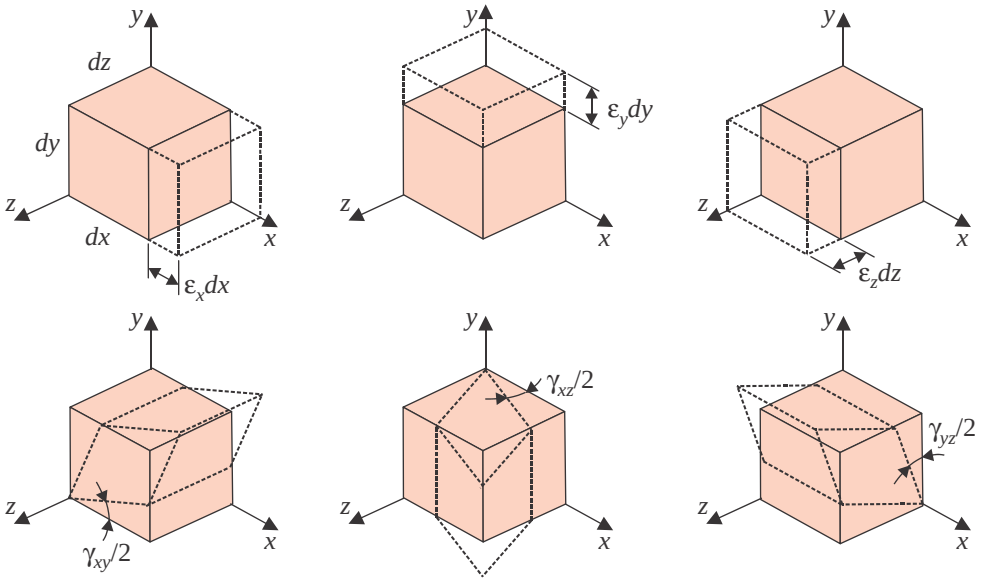


Figura 4.5: As seis componentes de deformação associadas aos eixos xyz.

Cada uma das componentes de deformação é representada individualmente na Figura 4.5. Será provado que essas deformações são as componentes de um **tensor deformação**. A matriz das componentes desse tensor em relação ao sistema cartesiano xyz é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

onde os termos fora da diagonal principal são **deformações cisalhantes tensoriais**, dadas por $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$, $\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}/2$, $\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$, e os termos na diagonal são as deformações específicas normais no ponto de coordenadas $\mathbf{x}$. As propriedades matemáticas desse tensor são idênticas às do tensor tensão, e serão exploradas no capítulo 5.

Unidades

Pelas próprias definições, os ε's e γ's são quantidades adimensionais, pois são dadas por relações entre dois comprimentos. Isso, entretanto, não impede que às vezes sejam usadas unidades. Algumas sem razão de ser, como por exemplo $\varepsilon_x = 50 \cdot 10^{-6}$ mm/mm ou $50 \cdot 10^{-6}$ pol/pol. Na realidade, é suficiente indicar $\varepsilon_x = 50 \cdot 10^{-6}$. O uso de unidades justifica-se quando se busca suprimir o uso da potência (10^{-6} no caso). Assim pode-se usar $\varepsilon_x = 50$ μm/m, onde μ (lê-se "micro"), é o prefixo do SI para 10^{-6}, ou ainda $\varepsilon = 0,0050$ %.

Quanto às deformações cisalhantes, γ é simplesmente indicado em radianos, por exemplo, $\gamma_{xy} = 0,03$ rad.

4.2.1 Hipóteses cinemáticas

Tanto as deformações de engenharia (4.2)-(4.3) quanto (4.12), são relações entre deformação e deslocamento cuja validade é limitada, i.e., são aproximações de outras relações, não lineares, não mostradas aqui. Os erros nessa aproximação são considerados toleráveis se as seguintes condições são satisfeitas:

1. As componentes de **deformação são pequenas**. Arbitrariamente, são consideradas "pequenas" as deformações normais da ordem de $\varepsilon \lesssim 0,010$ e cisalhantes $\gamma \leq 0,090$ ($\lesssim 5^o$).

2. Os **deslocamentos** numa seção transversal de um elemento estrutural **são pequenos** em relação às dimensões da peça. Arbitrariamente, em corpos delgados, como as vigas, placas e cascas, um deslocamento transversal é considerado adequadamente pequeno se for menor que metade da espessura da peça.

As razões de algumas dessas condições não são claras nesse ponto, e são identificadas apenas quando se analisa a formulação completa da teoria da mecânica do contínuo. Entretanto, no caso da restrição a ε, algumas ideias podem ser facilmente identificadas. **Por exemplo**, considere duas barra de comprimento inicial L_o. Suponhamos que elas tenham sofrido as seguintes deformações de engenharia:

(a) Barra 1: $\overline{\varepsilon} = +1,0$.

(b) Barra 2: $\overline{\varepsilon} = -1,0$.

Quando tentamos usar a relação deformação de engenharia-deslocamento (4.2) para calcular o comprimento final em cada caso obtemos os seguintes resultados:

(a) Barra 1: $\Delta L = L_o\overline{\varepsilon} = +L_o$. Logo, o usando essa medida de deformação, comprimento final seria $L = L_o + \Delta L = 2L_o$, i.e., a barra teria duplicado de comprimento;

(b) Barra 2: $\Delta L = L_o\overline{\varepsilon} = +L_o(-1) = -L_o$. Logo, se teria $L = L_o + \Delta L = L_o - L_o = 0$, i.e., $\overline{\varepsilon} = -1,0$ significaria que a barra teria desaparecido.

Obviamente que de um ponto de vista físico, a barra não pode desaparecer, o que significa que $\overline{\varepsilon} = -1,0$ não possui significado físico. De fato, todas as definições de deformação acima tem validade apenas para pequenos valores de ε, i.e., elas não pretendem ter validade em valores como $\varepsilon = \pm 1,0$. Em estruturas mecânicas ou civis isso não representa um problema, pois nesses projetos as deformações devem ser tipicamente da ordem de $\varepsilon \simeq 0,001$ ou menores, de forma a permitir o desempenho e a integridade do sistema. Entretanto, em diversas situações, como em processos conformação de metais, em que deformações reais podem chegar à ordem de 50 %, ou componentes de borrachas, que podem atingir 300 %, essas definições de deformação são inadequadas, e definições não lineares se tornam necessárias.

4.3 Efeito de Poisson

Considere uma barra reta sob tração como na Figura 4.6, com comprimento inicial L_0. Um primeiro efeito da aplicação da força axial é o aumento do comprimento para L. Um segundo efeito observado é uma redução do diâmetro, de d_o para d, i.e., uma variação Δd no diâmetro. Esse é o chamado **efeito de Poisson:** qualitativamente, sabe-se que se tracionamos a barra, ela contrai-se na direção transversal e, reversamente, uma compressão axial gera uma expansão diametral.

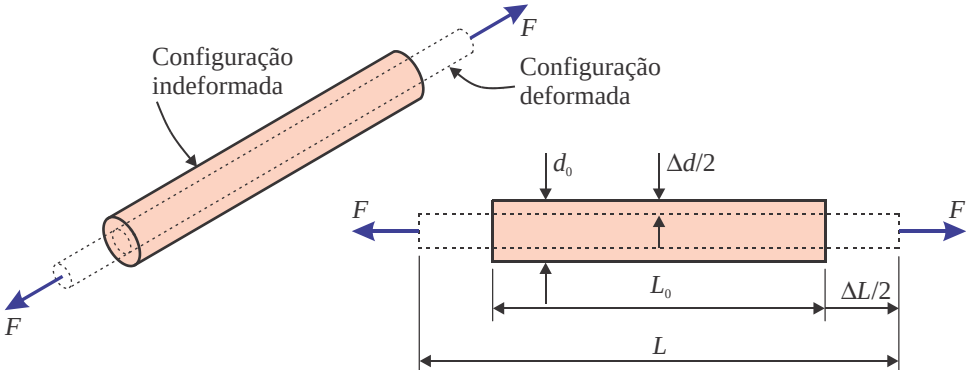


Figura 4.6: Efeito de Poisson numa barra tracionada.

Podemos definir as duas componentes de deformação específica na barra:

$$\varepsilon_{axial} = \frac{\Delta L}{L_o} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{trans} = \frac{\Delta d}{d_o}. \tag{4.14}$$

Em 1828 o cientista francês S. D. Poisson identificou o fenômeno e propôs a hipótese de que, no regime elástico-linear de um material isotrópico-homogêneo, a relação entre essas deformações seria uma constante para o dado material, i.e., a relação $\varepsilon_{trans}/\varepsilon_{axial}$ é uma propriedade de material. Essa constante é definida como o **coeficiente de Poisson**, dado por

$$\nu := -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}. \tag{4.15}$$

Alguns aspectos podem ser apontados sobre essa relação:

(a) ν é sempre um valor positivo para materiais isotrópico-homogêneos, i.e., $\nu > 0$.

(b) O sinal "$-$" é incluído na fórmula porque se busca uma propriedade positiva, porém num ensaio uniaxial, sempre ε_{trans} e ε_{axial} têm sinais distintos, i.e., sempre uma das duas deformações será negativa num ensaio.

(c) No regime elástico em **todos** os materiais homogêneos-isotrópicos, se tem que

$$0 < \nu < 0,5. \tag{4.16}$$

Note que não é possível, nessa classe de materiais, termos $\nu = 0$ ou $\nu = 0,5$. Valores aparentes de coeficiente de Poisson nulos ou negativos ocorrem em diversos materiais, como alguns tipos de materiais porosos. Em qualquer caso, são sempre em materiais heterogêneos e anisotrópicos.

(d) Em materiais tradicionais de engenharia, ν situa-se tipicamente na faixa

$$0,2 \lesssim \nu \lesssim 0,33. \tag{4.17}$$

(e) Por exemplo, alguns valores típicos são

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Aços Carbono} & \rightarrow \nu = 0,292, \\ \bullet \text{ Alumínios} & \rightarrow \nu = 0,334, \\ \bullet \text{ Aço inoxidável} & \rightarrow \nu = 0,305, \\ \bullet \text{ Vidro-fibras} & \rightarrow \nu = 0,25. \end{array} \tag{4.18}$$

Valores para outros materiais são vistos no apêndice.

(f) Uma observação superficial a uma figura como 4.6 frequentemente gera a ilusão que a redução na seção transversal ocorre numa proporção tal que compense o elongamento axial de forma a manter o volume do corpo constante. Isso não é correto. **No regime elástico o volume varia com a deformação**. Isso será mostrado mais a frente através de um exemplo.

(g) Prova-se que o coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$ representa uma deformação a volume constante. **Isso ocorre em processos de escoamento puro do** material.

Exemplo 4.1 Efeito de Poisson e deformação volumétrica específica

Considere a barra da Figura 4.7 sob uma força axial $F = 100$ kN, fabricado em aço com coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, módulo de elasticidade $E = 207$ GPa e tensão limite de escoamento $\sigma_E = 300$ MPa. As dimensões iniciais da barra são $L_o = 1200$ mm, $b_o = 30$ mm, $h_o = 15$ mm. Determine: (a) as componentes de deformação; (b) as variações nas dimensões da barra; (c) a variação volumétrica percentual sofrida pela barra em decorrência do carregamento.

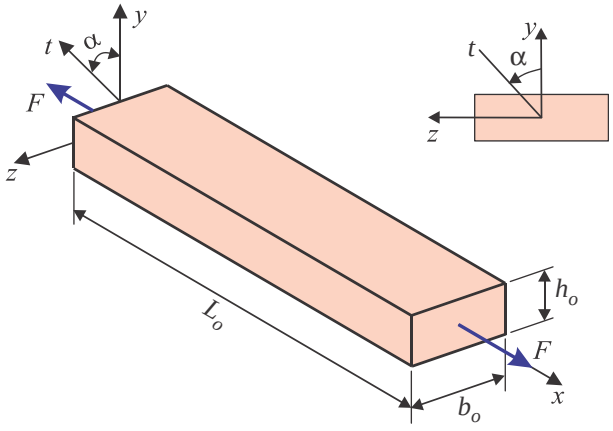


Figura 4.7: Barra do Exemplo 4.1.

Solução:

O esforço normal na barra é uniforme, $N = F$ =100 kN. A tensão normal média em qualquer ponto é

$$\sigma_x = \frac{N}{A_o} = \frac{F}{b_o h_o} = \frac{100 \cdot 10^3}{30 \times 15} = 222,2 \text{ MPa}.$$

As demais componentes de tensão são nulas. Como $\sigma_x < \sigma_E$, a tensão aplicada é menor que a tensão de início de escoamento do material, i.e., a barra encontra-se na faixa elástica-linear do material. Então podemos prosseguir nos cálculos. Da lei de Hooke uniaxial, eq(4.43), a **deformação axial** ε_x é

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{222,2 \text{ MPa}}{207 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 1,07 \cdot 10^{-3}. \tag{4.19}$$

As **deformações normais nas direções transversais,** ε_y e ε_z, são provenientes do efeito de Poisson, conforme (4.15):

$$\begin{aligned} \nu &= -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_y} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_y = -\nu\, \varepsilon_x = -0,3 \times 1,07 \cdot 10^{-3}, \\ \nu &= -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = -\nu\, \varepsilon_x = -3,22 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Como esperado, ε_z é igual a ε_y. De fato, **a deformação é idêntica em qualquer direção transversal**, como a direção t definida por um ângulo arbitrário α em relação ao eixo y, como mostrado na Figura 4.7. As variações dimensionais na barra são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta L}{L_o} \quad \rightarrow \quad \Delta L = \varepsilon_x L_o = (1,07 \cdot 10^{-3}) \times 1200 = 1,29\ \mu\text{m}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta h}{h_o} \quad \rightarrow \quad \Delta h = \varepsilon_y h_o = (-3,22 \cdot 10^{-4}) \times 15 = -4,83\ \mu\text{m}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta b}{b_o} \quad \rightarrow \quad \Delta b = \varepsilon_z b_o = (-3,22 \cdot 10^{-4}) \times 30 = -9,66\ \mu\text{m}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

onde 1 μm $= 10^{-6}$ m $= 10^{-3}$ mm.

O volume inicial da barra é $V_o = L_o h_o b_o = 1200 \times 15 \times 30 = 540.000$ mm^3. O volume deformado é $V = Lbh$. Então, usando a variação nos comprimentos obtidas em (4.21),

$$\begin{aligned} V &= Lbh, \\ &= (L_o + \Delta L)(h_o + \Delta h)(b_o + \Delta b), \\ &= L_o(1+\varepsilon_x) h_o (1+\varepsilon_y) b_o (1+\varepsilon_z) = V_o (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z). \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $V_o = L_o h_o b_o$ é o volume inicial da barra. Pode-se definir a **deformação volumétrica específica do corpo** por

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_o}. \tag{4.23}$$

Então, de (4.22),

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{V - V_o}{V_o} = \frac{V}{V_o} - 1, \\ &= \frac{V_o(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)}{V_o} - 1, \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Essa expressão possui duas partes, uma constituída pela soma das três deformações, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, e a outra é o produto, $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$. Substituindo os valores podemos ter uma avaliação mais exata de suas respectivas ordens de grandeza:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z && + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z, \\ &= (10,7 - 3,22 - 3,22) \times 10^{-4} && + (10,7 \cdot 10^{-4}) \times (-3,22 \cdot 10^{-4}) \times (-3,22 \cdot 10^{-4}) \\ &= 4,26 \cdot 10^{-4} && + 1.109 \cdot 10^{-10}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Nota-se que a parcela do produto entre as deformações resulta numa contribuição ínfima de deformação volumétrica em relação ao valor obtido pela soma, i.e., pode-se dizer que a deformação volumétrica específica pode ser obtida simplesmente por

$$\boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \tag{4.26}$$

Observação 1: No exemplo se tem $\varepsilon_V = 4,26 \cdot 10^{-4}$, i.e., o tracionamento na barra gerou uma variação volumétrica de 0,0426 %. De fato, esse efeito observado no exemplo ocorre em **qualquer outra situação que envolva peças submetidas a um estado de deformações suficientemente pequenas** para poderem ser analisadas pela presente teoria de cinemática linear. Então, quando as deformações são menores que 0,01, por exemplo, a soma das componentes normais tem a mesma ordem de grandeza do limite, ∼0,03, enquanto seu produto é de várias ordens superiores, $\sim 10^{-6}$, que pode ser ignorado em presença da soma, ∼0,03.

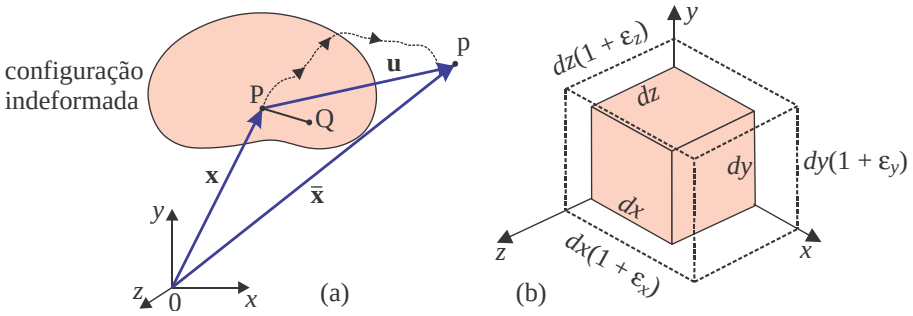


Figura 4.8: Em (a), um corpo arbitrário em sua configuração indeformada, e um ponto P na coordenada **x**. Em (b), o elemento diferencial em **x** em sua configuração deformada.

Observação 2: a dedução de (4.26) foi feita usando o volume finitesimal do exemplo, i.e., as dimensões L_o, h_o e b_o. De fato, a dedução pode ser repetida para um ponto do corpo de dimensões diferenciais $dV_o = dx \times dy \times dz$. Um elemento desse tipo é ilustrado na Figura 4.8, em que se tem as componentes normais de deformação atuando sobre o elemento diferencial. As dimensões do volume deformado são $dx(1+\varepsilon_x)$, $dy(1+\varepsilon_y)$ e $dz(1+\varepsilon_z)$. Nesse caso, a dedução mostrada em (4.24) se repete da mesma forma, apenas que adaptada para um volume inicial diferencial dV_o que se deforma em um volume dV:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V \quad &: \quad = \frac{dV - dV_o}{dV_o} = \frac{dV}{dV_o} - 1, \\ &= \quad \frac{dV_o(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)}{dV_o} - 1, \\ &= \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z \simeq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \end{aligned} \tag{4.27}$$

No exemplo, a deformação volumétrica calculada se aplicava à barra como um todo. Entretanto, num problema arbitrário, em que as deformações possuem um gradiente, i.e., seus valores variam de ponto a ponto, se tem que $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\mathbf{x})$, $\varepsilon_y = \varepsilon_y(\mathbf{x})$,$\varepsilon_z = \varepsilon_z(\mathbf{x})$, então a deformação volumétrica também varia ponto a ponto, i.e., $\varepsilon_V = \varepsilon_V(\mathbf{x})$. Assim, diferentes regiões do corpo desenvolvem diferentes deformações volumétricas específicas.

Observação 3: a dedução da deformação volumétrica em (4.27) foi feita apenas com as componentes normais de deformação. Isso é feito pela consideração que, no regime de pequenas deformações, as **deformações cisalhantes** não causam mudança de volume, **se passam a volume constante**. O cisalhamento causa apenas distorção geométrica, enquanto as deformações normais mudam o volume, sem distorções na geometria.

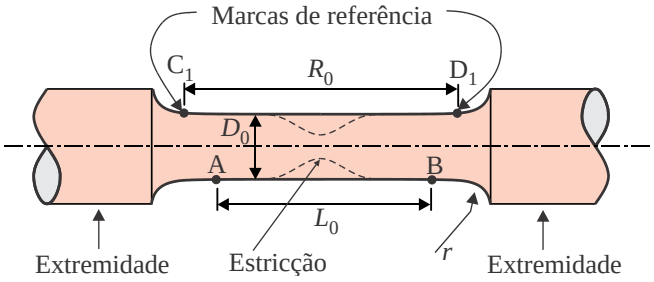


Figura 4.9: Corpo de prova cilíndrico padronizado na norma ASTM-8M-97. $R_o = 75$ mm, $L_o = 62,5 \pm 0,1$ mm, $D_o = 12,5 \pm 0,2$ mm, $r = 10$ mm. Outras dimensões, devem ser vistas na norma.

4.4 Casos clássicos de campos cinemáticos

As relações deformação-deslocamentos (4.12) podem ser usadas para identificar o campo de deformações associado a um campo de deslocamento conhecido. Consideremos um corpo hexaédrico regular, com dimensões $a \times b \times c$ nas direções cartesianas. Esse formato do corpo foi escolhido apenas por conveniência para simplificar a visualização das ilustrações. Consideremos alguns campos de deslocamentos típicos.

Elongamento simples

Este tipo de deformação é definido pelo seguinte campo de deslocamentos

$$u(\mathbf{x}) = kx, \qquad v(\mathbf{x}) = -vky, \qquad w(\mathbf{x}) = -vkz, \tag{4.28}$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é o vetor posição no corpo. k é uma constante real e v o coeficiente de Poisson. Esse campo de deslocamento é ilustrado na Figura 4.10 para um valor real positivo de k.

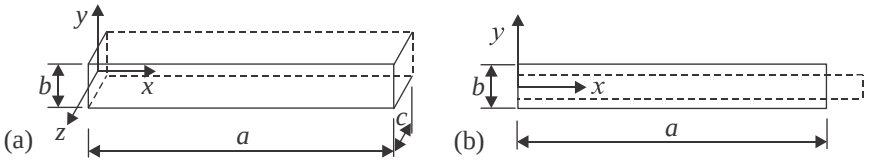


Figura 4.10: (a) Corpo prismático em forma de barra e (b) visualização do campo de deslocamento.

As deformações são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x} = k, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial y} = -vk, \qquad \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial z} = -vk, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Então, o tensor deformação em todos os pontos do corpo é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -vk & 0 \\ 0 & 0 & -vk \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Cisalhamento plano puro

Este é definido pelo campo de deslocamentos

$$u(\mathbf{x}) = ky, \qquad v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.31}$$

que é ilustrado na Figura 4.11. As deformações são dadas por

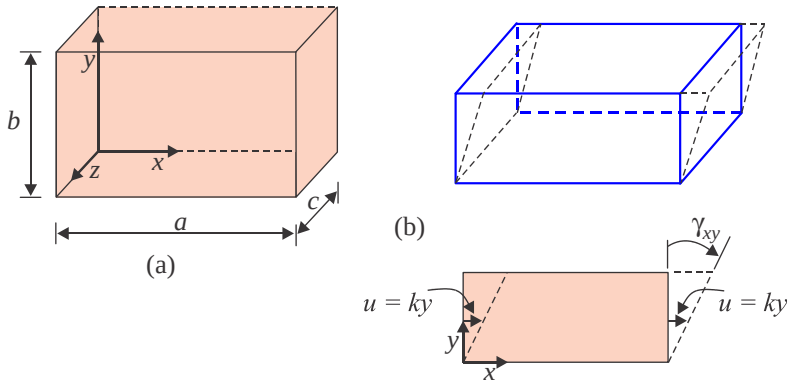


Figura 4.11: Bloco prismático e visualização do campo de cisalhamento plano.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \varepsilon_z(\mathbf{x}) = 0, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = k, \qquad \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

E o tensor deformação correspondente é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.33}$$

uma vez que $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \gamma_{xy}/2 = k/2$. A deformação de engenharia γ_{xy} é ilustrada na Figura 4.11b. **Por exemplo**, se o corpo tiver dimensões $a \times b \times c = 40 \times 30 \times 20$ mm^3, e se a deformação for controlada por $k = 0{,}002$, o campo de deslocamento é $u(\mathbf{x}) = 0{,}002y$ e $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = 0$, e o deslocamento máximo ao longo de x é $u_{\max} = u(x, b, z) = 0{,}060$ mm. O ângulo de deformação cisalhante de engenharia no plano xy é $\gamma_{xy}(\mathbf{x}) = 0{,}002$ rad.

Flexão plana

Considere o seguinte campo de deslocamentos:

$$u(\mathbf{x}) = -2kxy, \qquad v(\mathbf{x}) = kx^2, \qquad w(\mathbf{x}) = 0.$$

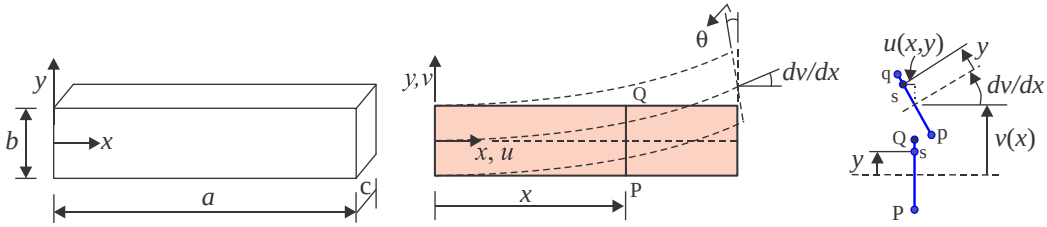


Figura 4.12: Bloco em forma de barra e deslocamentos de flexão plana.

A Figura 4.12 ilustra uma barra longa de seção retangular. Se ela for submetida ao campo de deslocamentos descrito, sua configuração deformada será como na figura (b). Um segmento PQ perpendicular ao eixo x desloca-se como um corpo rígido, sofrendo translação v e rotação θ, mantendo-se reta, assumindo a posição pq. O deslocamento transversal $v(x)$ só depende de x. A rotação θ é igual à tangente da linha axial flexionada, i.e., $\theta = \partial v/\partial x = 2kx$. Então, o deslocamento de um ponto S sobre a linha PQ, de coordenada y, desloca-se axialmente por $u(x, y, z) = -\theta y$, i.e., $u(x, y, z) = -2kxy$.

O campo de deformações associado ao de deslocamento é

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x} = -2ky, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \varepsilon_z(\mathbf{x}) = 0, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2kx + 2kx = 0, \qquad \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Vibrações transversais

O campo de deslocamento de flexão estática visto acima pode ser estendido para um movimento variável no tempo, típico de corpos submetidos a excitações dinâmicas. Por exemplo, a amplitude k no caso estático pode ser variável com o tempo, $k = k(t)$, i.e.,

$$u(\mathbf{x}) = -2k(t)xy, \qquad v(\mathbf{x}) = k(t)x^2, \qquad w(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.35}$$

Por exemplo, uma barra que vibre harmonicamente com frequência ω (em rad/s), tem amplitude de movimentos modificada por

$$k(t) = q\text{sen}\,(\omega t)\,. \tag{4.36}$$

Claramente, qualquer outra função pode ser vir a ser adequada a identificar a variação temporal do deslocamento num corpo, dependendo dos dados específicos do problema. Mas voltando ao exemplo acima, se definimos uma série de instantes $t_0 = 0 < t_1 ... < t_n$, podemos visualizar a configuração deformada dos pontos definidos pela linha $y = 0$. A configuração em cada instante é definida por

$$u(\mathbf{x}, t) = -2q\ \text{sen}\,(\omega t)\ \ xy, \qquad v(\mathbf{x}, t) = q\ \text{sen}\,(\omega t)\ \ x^2, \qquad w(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{4.37}$$

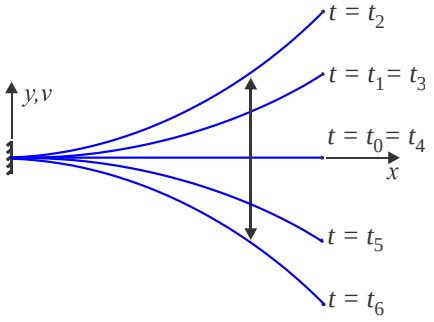


Figura 4.13: Vibração harmônica transversal em uma viga. (Deslocamento exagerado para visualização.)

A Figura 4.13 ilustra as configurações dessa linha $y = 0$ em diversos instantes discretos: t, sendo $t_0 < t_0 <, \cdots, < t_6$. O material ao longo dessa linha oscila para cima e para baixo do eixo x, com frequência ω. O formato assumido pela linha, conhecido como **modo de vibrações**, é idêntico em todos os instantes, definido por x^2. De um instante para outro apenas a amplitude do movimento, $q\text{sen}(\omega t)$, varia.

A variação dos deslocamentos no tempo tem o significado de velocidades e acelerações, dados por

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}. \tag{4.38}$$

No exemplo da barra sob flexão, esses tomam a forma

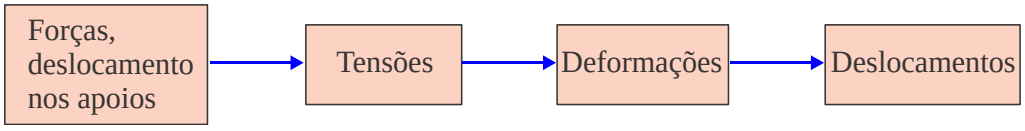
$$\begin{aligned} \dot{u}(\mathbf{x},t) &= -2\omega q\,\cos(\omega t)\;xy, \qquad \dot{v}(\mathbf{x},t) = q\omega\,\cos(\omega t)\;x^2, \qquad \dot{w}(\mathbf{x},t) = 0, \text{ e} \\ \ddot{u}(\mathbf{x},t) &= 2\omega^2 q\,\text{sen}\,(\omega t)\;xy, \qquad \ddot{v}(\mathbf{x},t) = -q\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t)\;x^2, \qquad \ddot{w}(\mathbf{x},t) = 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

As acelerações dão origem às forças de inércia na barra.

Uma vez que o campo de deslocamentos varia no tempo, todos os demais campos, de deformação e de tensões, também variam de maneira coerente. Por exemplo, as deformações se tornam

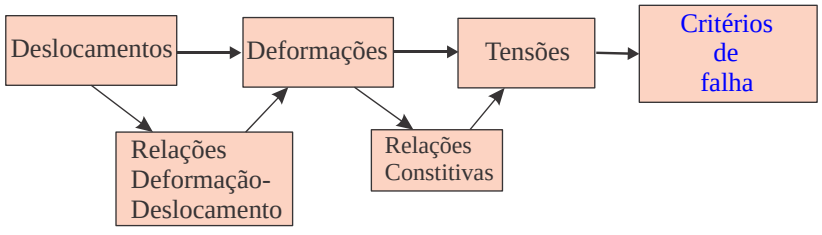
$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial u}{\partial x} = -2q\,\text{sen}\,(\omega t)\,y, \qquad \varepsilon_y(\mathbf{x},t) = \varepsilon_z(\mathbf{x},t) = 0, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \gamma_{xz}(\mathbf{x},t) = \gamma_{yz}(\mathbf{x},t) = 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Observações. Note que, sempre que se tenha um campo de deslocamento dado, o processo de obtenção das deformações é **direto**, i.e., basta efetuar as diferenciações nas relações deformação-deslocamentos. Então, para qualquer função que se possa escrever para um campo de deslocamento, existirá um **único** campo de deformações, facilmente obtenível. Entretanto, na mecânica dos sólidos, a situação quase universal é a inversa: o campo de deslocamentos é consequência dos campos de deformação e de tensão, e estes são associados ao carregamento e às condições de vinculação. Isto pode ser visto no seguinte diagrama:



(4.41)

Uma vez que é bastante complexa essa sequência de operações, existe uma grande quantidade de métodos sofisticados que busca inverter a sequência de cálculo. O mais poderoso e versátil desses métodos, o Método de Elementos Finitos, consegue justamente isso, i.e., consegue obter primeiro uma aproximação dos deslocamentos. Assim, as demais entidades podem ser obtidas de maneira direta, i.e.:



(4.42)

Com o campo de tensões se pode avaliar a segurança do componente quanto a todos os modos de falha dependentes do campo de tensões. Para os modos de falha dependentes dos deslocamentos, como as falhas por baixa rigidez, a avaliação já é feita diretamente do campo de deslocamentos obtido inicialmente.

4.5 Ensaio de tração - diagrama tensão-deformação

O chamado ensaio de tração é a forma mais básica e utilizada para a determinação experimental de propriedades mecânicas de materiais da engenharia. O procedimento consiste em, primeiramente, construir **corpos de provas** do material que se deseja testar. Duas formas são mais comuns aos corpos de prova, os **cilíndricos** e os de **seção retangular**. A Figura 4.9 mostra as dimensões normalizadas do corpo de provas cilíndrico conforme a norma ASTM[2] para teste de materiais

metálicos. Cada classe de materiais, como polímeros, cerâmicos, fibras, materiais compostos, concreto, materiais biológicos e biomecânicos, etc, possui seu próprio conjunto de normas para os diversos tipos de ensaios que sejam necessários para a caracterização de suas propriedades termomecânicas. No caso de ensaios de tração, a ideia geral é conseguir uma situação em que o estado de tensões no corpo de prova seja:

1. o mais simples possível, i.e., **uniaxial**, onde apenas uma componente, σ_x, seja não nula, e
2. **uniforme**, i.e., $\sigma_x = \text{const.}$ ao longo de toda a extensão do corpo de provas, ou pelo menos, ao longo de uma certa região conhecida.

O motivo desses requisitos é permitir que o estado de tensões e de deformações possa ser calculado usando expressões simples, algébricas, a partir da força aplicada e do deslocamento global medido. Isso também permite que o procedimento de ensaio possa ser realizado por pessoal técnico de média qualificação, usando muitas vezes equipamento padrão de ensaio, de custo relativamente baixo, que pode ser usado mesmo em plantas industriais. Isso é distinto de procedimentos sofisticados, que em geral são disponíveis apenas em ambientes de pesquisa científica como universidades.

Os requisitos listados acima para a configuração ideal de um corpo de provas não são simples de serem obtidos, uma vez que o corpo deve ser preso de alguma forma à máquina de ensaio que aplica o carregamento. O processo de prender as extremidades gera um estado triaxial de tensões, o que é indesejável. Além disso, as garras tendem a indentar o material na extremidade. Tudo isso, inviabiliza a ideia de tracionar um corpo que seja um cilindro de seção uniforme em toda sua extensão. Num caso desses, sempre se teria a ruptura ocorrendo na seção próxima à garra, numa situação bastante diferente de uma tração simples.

Então, o que é feito é espessar o corpo de provas nas extremidades, reforçando a região de contato com as garras. O raio de concordância, $r = 10$ mm, provê uma transição suave de com a parte fina. Nessa região delgada, a uma certa distância das cabeças, e estado de tensões é praticamente uniaxial e uniforme ao longo de quase todo o ensaio, dado pelo valor médio $\sigma_x = F/A$.

4.5.1 Procedimento geral do ensaio

O procedimento geral do ensaio pode ser entendido com a ajuda da Figura 4.14, que esboça uma máquina universal de ensaios e os principais dispositivos usados. O corpo de provas é preso por garras ou por rosca por suas extremidades. A garra inferior é fixa, e a superior é conectada a uma célula de carga, e esta, por sua vez, é conectada a um travessão móvel. Esse travessão é movimentado para cima através da rotação de dois parafusos como ilustrado. O movimento ascendente da barra causa a extensão do corpo de prova. A **célula de carga** é um transdutor de força, i.e., é um dispositivo de indicação da força aplicada a cada instante.

Entre os pontos A e B do corpo de provas é instalado um **transdutor de deslocamentos**, que mede, a cada instante, o valor de deslocamento relativo entre A e B, i.e., ΔL.

O deslocamento relativo é incrementado a partir de zero, e a força necessária F é aplicada e medida, de forma que se obtém uma tabela de pares ordenados (ΔL, F). Para um aço comum, dúctil, de baixa resistência (aço doce), o diagrama obtido tem a forma típica da Figura 4.15. Esse diagrama tem quatro regiões mais ou menos distintas. Faremos uma breve descrição do que ocorre em cada região, e em seguida discorreremos sobre cada uma delas em mais detalhes

- Trecho OA - Os aços apresentam uma região de relação força-deslocamento praticamente linear.
- Trecho BC - Região de **escoamento**, em que a deformação cresce sob carga constante. É como se o material se comportasse como um fluído.
- Trecho CD - Região de **encruamento** com **deformação uniforme**. O material sofre **grandes deformações** em relação às deformações do trecho linear OA. Desenvolve-se o chamado fenômeno de **plastificação** do material, em que uma **parcela significativa da deformação**

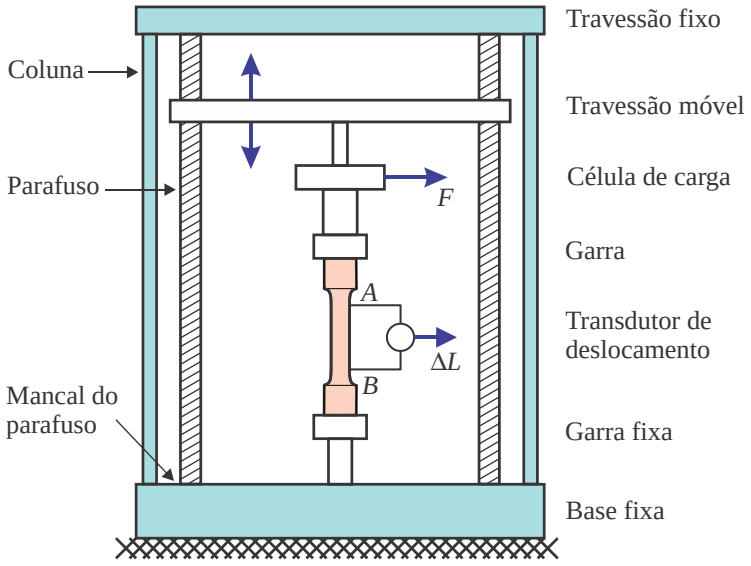


Figura 4.14: Esboço geral de ensaio de tração numa máquina padrão.

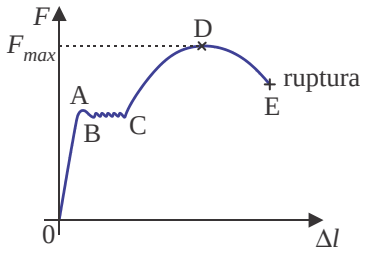


Figura 4.15: Diagrama força x variação de comprimento no ensaio de tração, típico de um aço doce.

aplicada torna-se permanente no corpo de provas, mesmo que a carga seja removida. Essa região termina quando se atinge a máxima carga que o material é capaz de suportar, $F_{\max}$.

- Trecho DE - Região de **estricção** no corpo de prova. Quando a carga atinge $F_{\max}$, qualquer tentativa de incrementar a carga levaria à ruptura do corpo. Entretanto, por um controle de deslocamento do travessão da máquina de ensaio, a carga pode ser gradualmente reduzida de forma a permitir um acréscimo lento da deformação. Entretanto, nessa região, a deformação não mais é uniforme sobre a extensão útil do corpo de provas (segmento AB na Figura 4.9. Em vez disso, ela passa a concentrar-se numa região de pequena extensão, formando uma **zona de estricção**, como indicado nas linhas tracejadas da Figura 4.9. Nessa zona, o estado de tensões é variável de ponto a ponto, e é triaxial. O ponto E do diagrama 4.15 indica o ponto de fratura do corpo de provas em duas partes.

Deve-se observar que **um diagrama $F \times \Delta L$ depende não apenas do material mas também da geometria do corpo de provas, do comprimento útil L_o e da área inicial da seção transversal A_o.** Essas influências podem ser eliminadas, até certo ponto, normalizando o diagrama $F \times \Delta L$ da seguinte forma:

1. Dividindo ΔL por L_o, o que define a deformação de engenharia: $\varepsilon = \Delta L / L_o$;

2. Dividindo a força F por A_o, o que define a tensão normal média de engenharia na região útil da barra: $\sigma = F / A_o$.

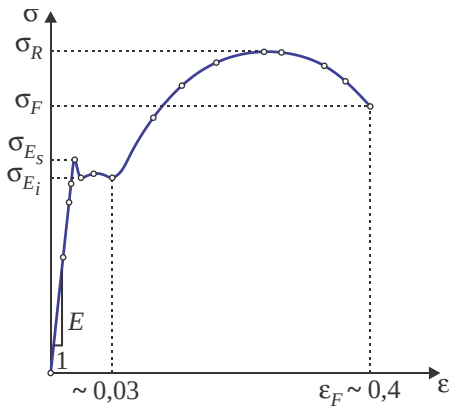


Figura 4.16: Características e propriedades básicas de um material representadas no diagrama tensão-deformação de engenharia.

A plotagem de $\sigma \times \varepsilon$ gera um diagrama exatamente com o mesmo aspecto do diagrama $F \times \Delta L$, uma vez que apenas multiplicamos as coordenadas de cada eixo por uma constante. Um gráfico $\sigma \times \varepsilon$ de engenharia é mostrado na Figura 4.16 para um aço de baixa resistência típico. O primeiro segmento de interesse é a região que se apresenta praticamente linear. Aqui, a relação tensão-deformação é simplesmente

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \tag{4.43}$$

onde E é o chamado **módulo de elasticidade** do material, ou **módulo de Young**. Uma vez que ε é adimensional, as unidades de E são as mesmas de tensão, i.e., Pa, MPa, ou N/mm^2, por exemplo. Como em SI os valores típicos para metais são altos, frequentemente se usa o Giga Pascal (1 GPa $= 10^9$ Pa). Alguns valores típicos são:

- Aços, de $E = 195$ GPa a 207 GPa,
- Alumínio $E = 70$ GPa,
- Epóxi $E = 3,5$ GPa,
- Fibras de vidro $E = 72,4$ GPa, e de carbono, $E = 290$ GPa a 690 GPa.

Valores para outros materiais são vistos no Apêndice. Fisicamente, o módulo quantifica a ideia da **rigidez do material**. (note que E nada indica sobre a resistência do material, que é quantificada de diversas outras formas).

4.5.2 Comportamentos elástico e plástico do material

Dois dos principais tipos de comportamento exibidos por um **material metálico** são os chamados comportamentos elástico e plástico.

Comportamento elástico

Consideremos uma peça em uma **condição inicial** não submetida a qualquer carregamento, em que as tensões e deformações em cada ponto sejam nulas, i.e., são representadas por um ponto localizado na origem do diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do material, o ponto O da Figura 4.17. Em seguida aplicamos carga ao corpo, de forma que a deformação e a tensão em cada ponto crescem gradualmente com a carga. Finalmente interrompemos o crescimento da carga e fazemos o descarregamento, i.e., fazemos a carga retornar a zero. Pode ocorrer que, ao final da descarga, as tensões e deformações em cada ponto tenham retornado a zero. Nesse caso **o corpo, com o descarregamento, retorna perfeitamente a suas formas e dimensões originais**. Isso caracteriza o comportamento elástico

de um material. Entretanto deve-se notar que sempre resultarão modificações permanentes na microestrutura do material, não importando quão pequena seja a deformação. A consideração de que o material possui uma faixa elástica é feita de forma aproximativa, quando as diferenças geradas na microestrutura são tão pequenas a não poderem ser observadas com equipamentos simples nas condições rotineiras de medição dos ensaios padronizados típicos.

Para metais, o comportamento elástico ocorre sempre que a tensão aplicada durante o carregamento, σ, tenha sido inferior a um certo valor limite, denominado **tensão limite de escoamento**, σ_E. Então, se durante o carregamento trativo

$$\sigma \leqslant \sigma_E, \tag{4.44}$$

teremos comportamento elástico. Nota: o diagrama 4.17 apresenta também a curva $\sigma \times \varepsilon$ para compressão. Para aços, essa curva é bastante semelhante à curva de tração, enquanto materiais frágeis como o concreto e o ferro fundido (Figuras 4.20 e 4.21) apresentam curvas bastantes distintas no primeiro e no terceiro quadrantes.

Em materiais que possuem uma região linear no gráfico $\sigma \times \varepsilon$, como os aços, o limite plástico praticamente coincide com o **limite de proporcionalidade** (o final do trecho reto do diagrama), e são frequentemente tomados como um único ponto no diagrama. Entretanto, o comportamento elástico é observado mesmo em materiais cujo comportamento é completamente não-linear, como as borrachas (elastômeros), por exemplo.

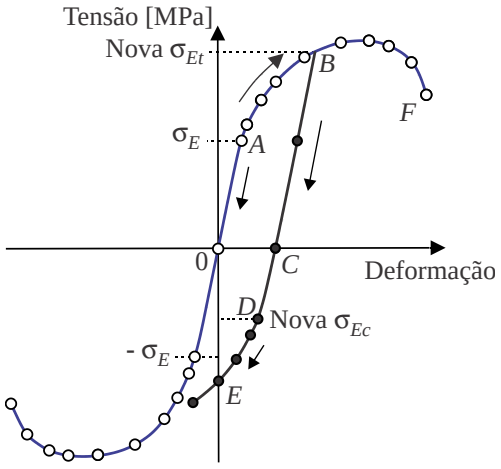


Figura 4.17: Reversão de carga e efeito Baushinger.

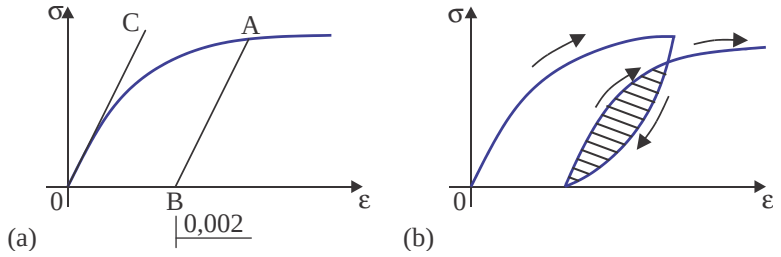


Figura 4.18: (a) Método da deformação 0,2 % para determinação da tensão de escoamento do material; (b) Laço de histerese.

Comportamento plástico

Quando o carregamento no material metálico é tal que

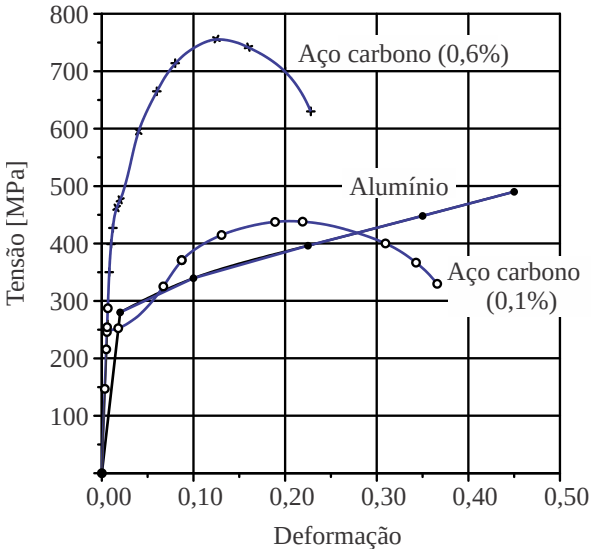


Figura 4.19: Diagramas tensão-deformação de engenharia típicos para aços de baixo e alto teor de carbono e para alumínio. (Os valores de deformação até o limite linear foram multiplicados por 5 para melhor visualização.)

$$\sigma > \sigma_E, \tag{4.45}$$

o descarregamento se processa ao longo da linha BC da Figura 4.17. Assim, quando a tensão cai a zero, o material mantém uma **deformação residual**, de valor $\overrightarrow{OC}$. Note que, após remover toda a tração, podemos continuar a solicitar o material em compressão, seguindo no diagrama ao longo da linha $\overrightarrow{CD}$. Se a compressão progredir, eventualmente chegaremos a uma situação de deformação nula, no ponto E, porém aí a tensão será não nula, de valor $\overrightarrow{OE}$.

O processo de plastificação (ou escoamento do metal), se caracteriza então pelo desenvolvimento de alterações permanentes na estrutura atômica do material.

Tensão limite de escoamento inferior e superior

Quando se observa o diagrama 4.16 notam-se dois níveis característicos de tensão, indicados por σ_{Ei} e σ_{Es}, as chamadas tensão de escoamento inferior e superior. Essa forma de diagrama, com o patamar horizontal de escoamento estendendo-se até deformações da ordem de $\varepsilon \approx 0,03$, é característico dos aços de baixa resistência, chamados **aços doces**, que são aços com conteúdo de carbono baixos, da ordem de 0,2 % ou menos. Aços de mais alta resistência, como os aços carbono de 0,06 %, apresentam curva suave, como ilustrada na Figura 4.19.

4.5.3 Tensão de ruptura, de fratura e elongamento máximo

O ponto máximo do diagrama $\sigma \times \varepsilon$ de engenharia indica a **tensão limite de ruptura** do material, σ_R, que é associada à força máxima no ensaio de tração. A tensão no final da curva indica a tensão de fratura σ_F. A deformação máxima de engenharia, ε_F, é denominada **elongamento máximo** do material, e é obtida no ensaio por

$$\boxed{\varepsilon_F = \frac{\Delta R_{\max}}{R_o}} \tag{4.46}$$

$\Delta R_{\max} = R - R_o$ é a variação de comprimento do corpo de prova rompido. É obtido após a ruptura, tornando as duas partes resultantes do corpo de provas rompido, e medindo a distância final entre os pontos C e D marcados na superfície do corpo de provas, e comparando à distância inicial R_o

(Figura 4.9). Tanto σ_F quanto ε_F geralmente não possuem aplicabilidade prática em problemas estáticos, mas é usada em algumas teorias de fadiga baseadas em ciclos de deformação.

Encruamento e reversão de carga

Observemos o diagrama 4.17, e consideremos a aplicação de um carregamento ao longo do segmento OAB, seguido de um alívio de tensões até o ponto C. Nos aços, experimentalmente observa-se que o percurso de descarga é:

- Praticamente retilíneo;
- Praticamente paralelo ao segmento linear de carga OA.

Quando se analisa um corpo que sofreu esse ciclo de carga-descarga, observa-se que a estrutura microscópica do material encontra-se permanentemente alterada. Isso significa que, se aplicarmos um novo carregamento trativo, seguiremos ao longo do trecho CB do diagrama, de forma elástica e linear, i.e., se descarregarmos de um ponto abaixo de B, retornaremos a C de forma elástica.

Note que agora, à extensão CB do trecho elástico-linear é maior que a extensão original OA. Isso significa que, no primeiro carregamento, OAB, plastificamos e **encruamos** o material, i.e., elevamos sua tensão de escoamento de σ_E para σ_{Et} (ponto B da Figura). Então, se recarregamos a partir de C, o material exibe uma nova tensão de escoamento σ_{Et} em tração.

O ponto C passa a atuar agora como uma nova origem para o diagrama. Para entender isso imagine que se a peça for vendida, o comprador nada saberá sobre a posição O que um dia o material teve. Qualquer ensaio que ele realizar identificará apenas C, B e F. Assim, a faixa de deformação BF tornou-se menor como resultado do encruamento. Note que o encruamento é um processo usual para elevar o limite elástico de um aço.

Consideremos agora o aço encruado, e a partir da condição C aplicamos compressão. Num ponto D (Figura 4.17) inicia-se nova plastificação, agora em compressão, e o diagrama torna-se não linear. Experimentalmente, observa-se que a extensão CD é diferente, menor que BC e menor que a tensão de escoamento original OA (σ_E). Essa diferença é conhecida por **efeito Bauschinger**.

Método "0,2 %" para determinação de σ_E

Nota-se que os aços doces (Figura 4.16) apresentam um patamar de escoamento, enquanto os diagramas de aços de alta resistência (Figura 4.19) tem uma transição suave entre a região linear e a não linear. Em qualquer dos casos, a identificação precisa da tensão de escoamento não é tarefa fácil: seriam necessários dezenas de ensaios de carga e descarga até identificar o ponto que resulta deformações residuais nulas.

Em lugar disso usa-se um procedimento prático, o chamado **método do "offset"**, que aqui denominamos **método do 0,2 %,** para determinar o valor aproximado de σ_E:

- Considerando a Figura 4.18a, primeiramente obtém-se a linha OC tangente à curva de carga;
- Traça-se uma reta AB paralela à curva OC, numa posição de deformação arbitrária ε_o. Tipicamente, esse é um valor pequeno de deformação, usualmente $\varepsilon_o = 0,002$, ou 0,2 %;
- A reta AB intercepta a curva $\sigma \times \varepsilon$ no ponto A. Finalmente a tensão em A é tomada como valor aproximado da **tensão de escoamento** σ_E do material.

Note que, entre outras vantagens, esse método pode ser usado em materiais que não apresentam uma região linear nitidamente definida, como diversos polímeros.

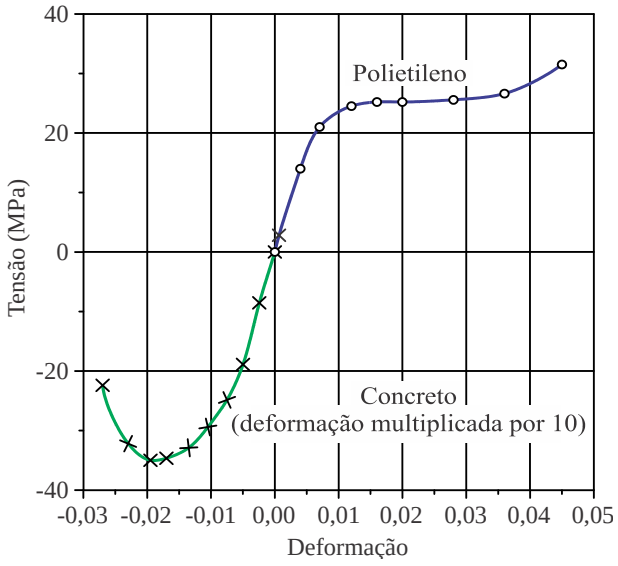


Figura 4.20: Curvas tensão-deformação de engenharia típicas para polietileno e para concreto (preparado com 36 litros de água por saco de 50 kg de cimento, ensaiado com 28 dias de idade). Os valores de deformação para o concreto foram multiplicados por 10 para melhor visualização.

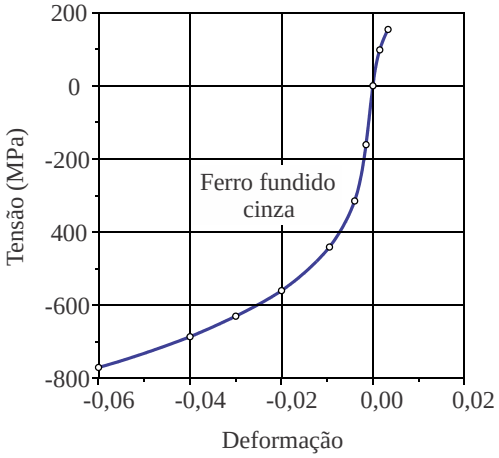


Figura 4.21: Diagrama tensão-deformação de engenharia típico para o ferro fundido cinzento.

4.5.4 Materiais frágeis e dúcteis

De forma não muito rigorosa, materiais são ditos **dúcteis** se são capazes de desenvolver deformações relativamente grandes até a ruptura final. Do lado oposto, os **materiais frágeis** atingem sua tensão final de ruptura com pequenas deformações.

Observando os diagramas 4.19, 4.20 e 4.21, se tem uma visão mais clara desse conceito. Um aço de baixo carbono, (0,1 % de C), desenvolve uma larga faixa de deformações plásticas, enquanto o aço de alto carbono, mais resistente, deforma-se menos até a fratura. Então pode-se dizer que o segundo material é mais frágil que o primeiro.

Materiais de engenharia tipicamente **frágeis** são, por exemplo, os seguintes:

- ▷ concreto
- ▷ ferro fundido
- ▷ aços de alta resistência
- ▷ alguns polímeros
- ▷ rochas
- ▷ vidro
- ▷ cerâmicas

Materiais dúcteis típicos são:

▷ aços de média e baixa resistência
▷ cobre, chumbo, ouro
▷ espumas poliméricas
▷ alguns polímeros
▷ elastômeros (borrachas)

Por exemplo, do diagrama 4.20, vemos que a faixa de deformação máxima do concreto é 0,007, enquanto os aços da Figura 4.19 chegam a pelo menos 0,25 de deformação. **Os materiais frágeis são tipicamente bastante mais frágeis a tração que à compressão**.

Deve-se notar que a classificação "materiais frágeis/dúcteis" não é completamente adequada, sendo mais rigoroso referir-se a **comportamento frágil/dúctil**. Isso por que, um mesmo material pode comportar-se de uma forma ou de outra dependendo de algumas condições. Basicamente, a forma do diagrama tensão-deformação é dependente de fatores como:

- velocidade do carregamento;
- temperatura do ensaio;
- presença de entalhes e trincas;

Para entender isso basta lembrar, por exemplo, que uma barra de borracha, que à temperatura ambiente pode elongar-se em 300 %, a uma temperatura criogênica comporta-se como um tijolo, rompendo de forma frágil. Todos os diagramas apresentados são para temperatura ambiente e baixa velocidade de carga.

4.6 Princípio de Sobreposição dos Efeitos

Os **problemas lineares**, por sua própria característica, permitem que se possa realizar o processo denominado *sobreposição de efeitos*. Isso corresponde ao chamado princípio de sobreposição dos efeitos, que é ilustrado a seguir. Consideremos um problema ilustrativo, de uma viga bi-apoiada como na Figura 4.22. O ponto crítico inicial é que consideramos que ela tenha **comportamento linear**. Sendo assim, o seguinte fenômeno ocorre. Considere-se a viga submetida a uma força transversal de valor F_1 aplicada numa seção B, como na Figura 4.22a. Esse é um problema cuja solução é desenvolvida no Capítulo 8, mas nesse ponto basta que consideremos a força F_1 como uma *causa*, que gera um conjunto de *efeitos*, i.e., reações nos apoios, esforços em cada seção, deslocamento transversal e tensões em cada seção. Por exemplo, nas seções B e C os deslocamentos transversais são u_{B1} e u_{C1}. Considere-se em seguida, um segundo problema, em que a estrutura seja a mesma, i.e., a mesma geometria, (comprimento, seção transversa), mesmo material e mesmos apoios do problema 1, porém, o carregamento é uma força F_2 aplicada na seção C, como na Figura 4.22b. Essa força é uma segunda *causa*, que gera um segundo conjunto de *efeitos*. Assim, os deslocamentos transversais gerados por F_2 nas seções B e C são u_{B2} e u_{C2}.

Finalmente, considere-se a mesma viga, agora submetida simultaneamente aos dois carregamentos, F_1 e F_2, aplicados nas seções C e D respectivamente, como na Figura 4.22c. **Se o problema for linear**, então sabe-se que a solução do deslocamento nas seções B e C para o carregamento conjunto será a soma dos deslocamentos dos carregamentos individuais, i.e., será $u_{B1} + u_{B2}$ em B e $u_{C1} + u_{C2}$ em C. Não apenas o deslocamento nessas seções, mas qualquer grandeza da solução do problema conjunto (reação num apoio, esforço cortante numa seção, deslocamento transversal numa seção arbitrária, etc.), será a soma dos valores de cada problema individual na mesma seção. Um sumário do princípio pode ser visto da seguinte forma: para um problema linear qualquer, considerando-se três problemas definidos para a mesma geometria, apoios e material, as soluções se relacionam da seguinte forma:

Problema 1:	Carregamento 1	$\Longrightarrow$	Solução 1
Problema 2:	Carregamento 2	$\Longrightarrow$	Solução 2
Problema 3:	Carregamento 1 + 2	$\Longrightarrow$	Solução 1 + 2

(4.47)

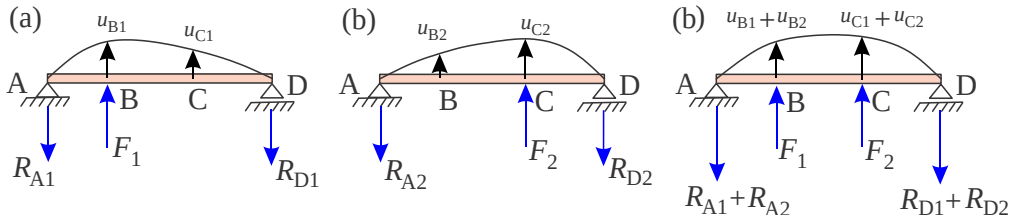


Figura 4.22: Ilustração do princípio de sobreposição dos efeitos em um problema de flexão de vigas.

Observe que esse princípio depende apenas da linearidade do problema - não é restrito a problemas de flexão de vigas como na presente ilustração, mas a todo problema de formulação matemática.

Que esse princípio funciona apenas em problemas lineares pode ser visto rapidamente com um exemplo simples. Considere-se inicialmente um problema linear, como uma equação de uma variável, $f(x) = ax$. Então o dado de entrada, o "carregamento", é x, e a solução é o valor resultante, $f(x)$. Assim, tem-se que:

- Problema 1: $f(x_1) = ax_1$;
- Problema 2: $f(x_2) = ax_2$;
- Problema 3: $f(x_2 + x_1) = ax_1 + ax_2$. Então, $f(x_2 + x_1) = f(x_1) + f(x_2)$, o que confirma o princípio.

Agora consideremos o problema não linear mais simples possível, $f(x) = ax^2$. Agora temos:

- Problema 1: $f(x_1) = ax_1^2$;
- Problema 2: $f(x_2) = ax_2^2$;
- Problema 3: $f(x_2 + x_1) = a\,(x_1 + x_2)^2 = ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2$. Então, $f(x_2 + x_1) = f(x_1) + f(x_2) + 2ax_1x_2$, o que é diferente de $f(x_1) + f(x_2)$, e o princípio não é aplicável.

4.7 Relação tensão-deformação triaxial - Lei de Hooke

No Capítulo 3 definimos o vetor tensão e suas componentes, que formam o **tensor tensão**. Independentemente, no presente capítulo, definimos as componentes do **tensor deformação** e suas relações com o gradiente do vetor deslocamento. Temos então duas entidades, tensão e deformação. Ambas definidas de forma independente uma da outra. De fato, cada uma, é definida de forma puramente abstrata, matemática. Nenhuma delas tem relação com o comportamento de um dado material. Por exemplo, se tomamos uma barra de 100 mm de comprimento, e aplicamos uma variação de comprimento de $0,1$ mm, pode-se calcular uma deformação média de 0,1%. Nota-se que isso é apenas uma relação geométrica entre dimensões antes e depois de aplicado o campo de deslocamento. Não há nenhuma relação física com o carregamento aplicado ou com as características do material. Da mesma forma, se uma força de 20 kN for aplicada axialmente numa barra de seção transversal de área 100 mm^2, se tem uma tensão média de 200 MPa. Isso seria assim tanto para uma barra de aço quanto de papelão. Esse valor não leva em conta as características do material, e não implica que, de fato, seria possível essa tensão ser aplicada.

Dessa forma, na ciência geral denominada **Mecânica do Contínuo**, dentro da qual se insere a **mecânica dos sólidos** e a **mecânica dos fluidos**, existe um terceiro grupo de relações gerais além das equações de equilíbrio e das relações cinemáticas: são as denominadas **relações constitutivas**. Essas são relações entre o campo de tensão e o de deformação, i.e., entre os tensores tensão e deformação. Podem ser representadas por relações do tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{4.48}$$

Tratam-se de teorias que se propõe a fornecer relações entre cada uma das 6 componentes de tensão e cada uma das 6 componentes de deformação. Um ponto crucial a ser entendido aqui é que o relacionamento entre essas duas entidades, tensão e deformação, não pode ser deduzido, mas sempre deve ser obtido a partir de experimentos, embora os resultados devam sempre ser tratados de forma matemática. Outra maneira de observar o assunto é notando que, embora tensão e deformação sejam definições matemáticas artificiais, criadas a partir de entidades mais fundamentais como forças e deslocamentos, a relação entre elas não pode ser arbitrada, mas deve sempre ser definida pelas características de comportamento da estrutura atômica de cada material, o que significa que precisam ser obtidas experimentalmente.

Existem milhares de formulações propostas, em que cada uma tenta representar adequadamente o comportamento de um material, de um grupo de materiais, ou a seu comportamento quanto a um conjunto de situações físicas. Na presente seção apresentaremos a denominada **lei de Hooke**. É a relação tensão-deformação adequada a problemas com as seguintes características: pequenas deformações e rotações, em materiais homogêneos-isotrópicos, solicitados dentro de sua faixa elástico-linear.

Essa relação é a mais simples possível para um material sólido. Para fluidos existem relações mais simples que esta. Entretanto, a lei de Hooke é aquela mais versátil para um material sólido, que atende à maior quantidade de situações encontradas em todas as áreas da engenharia. Por exemplo, elementos de máquinas devem ser dimensionadas de forma tal que apresente deslocamentos bastante pequenos, para não afetar os ajustes de montagem, não gerarem vibrações, etc. Como consequência, as deformações são pequenas. Uma vez que são construídas de aço ou outro metal de alto desempenho, que possuem uma faixa elástica bem definida, com relação linear entre tensão e deformação, todos os requisitos para o uso da lei de Hooke são atendidos, o que faz com que essa relação seja aquela quase sempre utilizada. Ao longo do texto, também será apresentada uma segunda família de relações constitutivas, as **relações elasto-plásticas**, em que efeitos de plastificação do material são incorporados nas análises.

Iniciaremos a dedução da forma tridimensional da lei de Hooke usando como inspiração os conceitos uniaxiais do ensaio de tração, em que obtivemos a relação tensão-deformação na forma mais simples possível, através de ensaios com uma única componente de tensão normal:

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x \tag{4.49}$$

conforme (4.43). Essa relação é observada experimentalmente na região linear que se desenvolve no diagrama $\sigma \times \varepsilon$ (Figura 4.23a) quando um corpo de provas é tracionado ou combinado. Analogamente ao ensaio de tração, pode-se considerar um ensaio de cisalhamento puro como na Figura 4.23b, onde aplicamos um carregamento tal que resulte num campo uniforme de tensões cisalhantes num bloco de material. Medindo a deformação cisalhante, pode-se construir um diagrama tensão-deformação cisalhante como o da figura. Aspectos práticos dificultam a aplicação das forças e a fixação do corpo de provas, de forma que o ensaio de cisalhamento nunca é feito diretamente nessa forma. Entretanto, nesse ponto, basta que consideremos a possibilidade conceitual de tal ensaio. O aspecto mais relevante, observado experimentalmente para grande número de materiais, como os aços, é que ambos os diagramas da Figura 4.23 terão aspectos semelhantes para um dado material. Em particular, caso o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ tenha uma região linear bem definida, em diversos tipos de materiais, como os aços, também o diagrama de cisalhamento $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$ apresentará uma região linear. Então, da mesma forma que para as tensões normais, para o cisalhamento temos uma relação linear na forma

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tag{4.50}$$

onde G = módulo de elasticidade cisalhante, análogo ao módulo de elasticidade E.

A característica comum entre as relações (4.49) e (4.50) é a de relacionarem estados uniaxiais

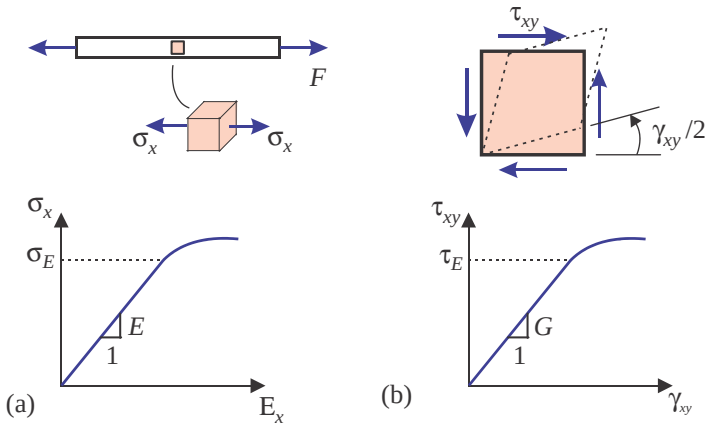


Figura 4.23: Ensaios uniaxiais de tração e cisalhamento.

de tensão e deformação. Entretanto, as situações reais de peças em engenharia envolvem estados triaxiais de tensão e deformação. Assim, o grande desafio é definir relações entre as componentes de ambos os tensores, i.e., entre

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \text{sim.} & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

num dado ponto de um corpo. A forma como tensões e deformações se relacionam depende de uma grande quantidade de aspectos e condições como:

- **material**;
- **velocidade** de carga, se lenta, oscilante, de impacto ou outra;
- **temperatura** de trabalho;
- **faixa de deformação**, se "pequenas", "médias" ou "grandes" deformações;
- **tipos de comportamento**: elástico, plástico, viscoelasticidade, viscoplasticidade, etc.
- **tipo do material**, se homogêneo ou heterogêneo (composto, poroso, granulado como concreto, ...), se isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico.

Para cada uma dessas situações, ou combinação de situações, a relação constitutiva é expressa de forma apropriada: via equações algébricas, via equações diferenciais envolvendo taxas de deformação e de tensão, ou via equações integrais. Como estamos apresentando um primeiro curso em mecânica dos sólidos, trataremos do caso mais simples e tradicional em engenharia, que, de resto, mostra-se adequado ao tratamento da quase totalidade das estruturas mecânicas e civis tratadas rotineiramente. A relação constitutiva desenvolvida a seguir terá validade apenas dentro das seguintes condições:

- materiais homogêneos;
- materiais isotrópicos;
- materiais que possuem faixa linear nos diagramas $\sigma \times \varepsilon$ e $\tau \times \gamma$;
- materiais que possuem uma faixa elástica no diagramas $\sigma \times \varepsilon$ e $\tau \times \gamma$;

Mesmo quando se considera uma relação entre duas grandezas quaisquer obtidas experimentalmente, e se deseja realizar um ajuste de curvas para estimar uma equação entre elas, a relação mais simples entre elas é uma relação linear. Para relacionar as seis componentes de tensão às seis de deformação, de forma linear, teríamos a seguinte relação geral:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{4.52}$$

Temos então ε_x relacionado de forma linear com cada uma das componentes de tensão. Cada uma das 42 constantes são propriedades de material e, caso não haja nenhuma simplificação de ordem matemática ou física, cada uma delas deveria ser obtida por um ensaio adequado. Felizmente muitas simplificações podem ser feitas.

(a) As constantes C_j devem ser nulas. Isso por que desejamos que um ponto de corpo com todas as tensões nulas deveria estar também indeformado. Note que isso só será verdadeiro se não tivermos deformações de origem térmica.

(b) Prova-se [5] que a matriz é simétrica, $C_{ij} = C_{ji}$. Isso reduz o número de propriedades de material a 21. Essa é a forma mais geral, de relação linear, e de fato é adequada a materiais anisotrópicos, como os laminados de materiais compostos de lâminas reformadas por fibras.

Caso o material seja **homogêneo e isotrópico**, a relação (4.52) é simplificada drasticamente, como veremos a seguir. Para chegarmos às relações finais usaremos um procedimento intuitivo, com o auxílio da Figura 4.24. Temos na Figura 4.24a um elemento diferencial de volume com dimensões $dx \times dy \times dz$. Se aplicamos **apenas a tensão** σ_x, como na figura (b), a variação de comprimento do elemento na direção x é $\varepsilon_x^{(1)} dx$, e usando a relação tensão-deformação uniaxial (4.43), $\varepsilon_x^{(1)} = \sigma_x / E$, se tem

$$\left\| \varepsilon_x^{(1)} dx = \frac{\sigma_x}{E} dx. \right. \tag{4.53}$$

Agora, consideramos a aplicação **apenas da tensão** σ_y no elemento diferencial. A variação de comprimento na direção x é proveniente do **efeito de Poisson** como na Figura 4.24c. Usamos (4.15) em que a deformação na direção longitudinal é ε_y, que é colinear com a tensão aplicada σ_y. E a deformação transversal que buscamos é na direção x. Assim, (4.15) toma a forma $\varepsilon_x^{(2)} = -\nu \varepsilon_y$. Para um ensaio uniaxial na direção y temos $\varepsilon_y = \sigma_y / E$ na faixa linear. Então

$$\varepsilon_x^{(2)} = -\nu \varepsilon_y \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon_x^{(2)} = -\frac{\nu}{E}\, \sigma_y. \tag{4.54}$$

A variação de comprimento na direção x devido à σ_y é $\varepsilon_x^{(2)} dx$. Substituindo $\varepsilon_x^{(2)}$ tem-se

$$\left\| \varepsilon_x^{(2)} dx = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \; dx. \right. \tag{4.55}$$

Finalmente, se aplicamos no elemento da Figura 4.24 **apenas a tensão** σ_z, usando o mesmo argumento usado acima para σ_y, temos que σ_z provoca uma deformação em x devido no efeito de Poisson dado por $\varepsilon_x^{(3)} = -\nu \varepsilon_z$ (ver Figura 4.24d). Como $\varepsilon_z = \sigma_z / E$, a variação de comprimento em x é

$$\left\| \varepsilon_x^{(3)} \; dx = -\frac{\nu}{E} \sigma_y \; dx. \right. \tag{4.56}$$

Agora consideremos o que ocorre se aplicamos sobre o elemento diferencial **simultaneamente as tensões** σ_x**,** σ_y **e** σ_z. Como o problema é linear, podemos usar o *princípio de sobreposição dos*

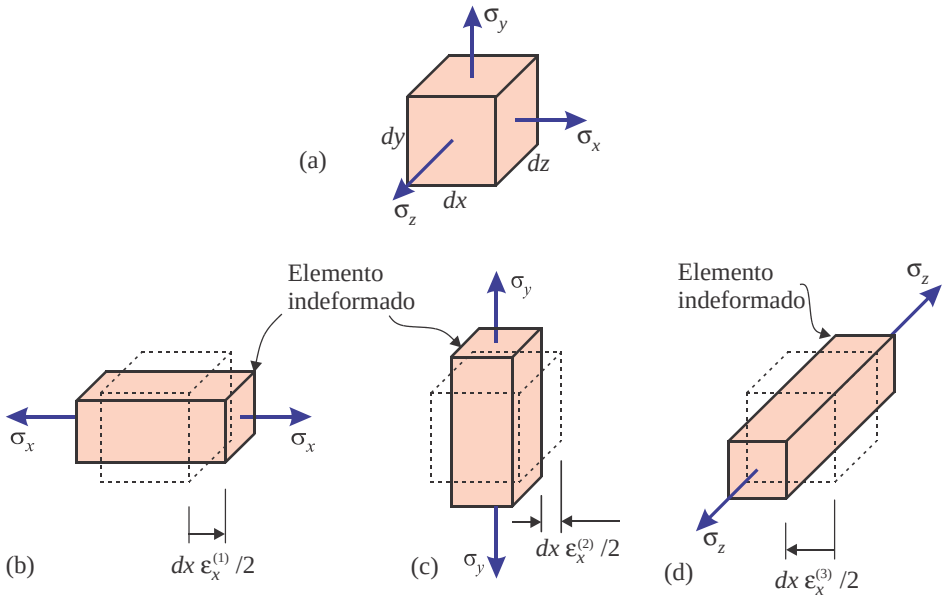


Figura 4.24: Parcela de deformação ϵ_x proveniente das tensões σ_x, σ_y e σ_z.

efeitos. Isso significa que a variação de comprimento do elemento na direção x é a soma das variações obtidas quando as tensões eram aplicadas uma por vez, i.e., somando (4.53), (4.55) e (4.56) temos

$$\varepsilon_x \, dx = \varepsilon_x^{(1)} \, dx + \varepsilon_x^{(2)} \, dx + \varepsilon_x^{(3)} \, dx,$$

i.e.,

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \, \sigma_y - \frac{\nu}{E} \, \sigma_z.} \tag{4.57}$$

Note que, implicitamente, estamos usando o resultado de uma observação experimental:

> Em materiais isotrópicos, tensões cisalhantes não provocam deformações normais, da mesma forma que tensões normais não provocam deformações cisalhantes.

A equação (4.57) produz então a deformação em x proveniente da aplicação simultânea das três tensões normais. De forma semelhantes, as deformações ε_y e ε_z podem ser obtidas, gerando mais duas equações constitutivas.

Para as tensões e deformações cisalhantes, usamos uma outra observação experimental:

> Num material isotrópico, a tensão cisalhante num plano, por exemplo τ_{xy}, provoca apenas deformações cisalhantes no mesmo plano, no caso γ_{xy}, i.e., $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. (4.58)

Então, γ_{xy} se relaciona apenas a τ_{xy}, γ_{xz} a τ_{xz} e γ_{yz} a τ_{yz}. O relacionamento entre tensão e deformação na faixa elástico-linear do material é dada pela equação (4.17):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \tag{4.59}$$

Com isso, coletando (4.57) e (4.59), temos o conjunto completo de equações tensão-deformação para o material elástico-linear:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{aligned}} \tag{4.60}$$

Esse conjunto forma a chamada **lei de Hooke generalizada,** ou **lei de Hooke 3D** para materiais homogêneos-isotrópicos.

Comparando com a equação (4.52), podemos colocar a relação numa forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}, \tag{4.61}$$

Anteriormente usamos a notação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ para indicar as matrizes de componentes tensoriais. Entretanto, aqui usamos a mesma notação para indicar as componentes do tensor organizadas na forma de um arranjo uniaxial. Em forma expandida temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{4.62}$$

A matriz é a **matriz de flexibilidade elástica do material.** É sempre uma *matriz positiva definida* (todos os autovalores são positivos), de forma que é não singular. Então ela é invertível, e se pode escrever a relação inversa $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, que toma a forma expandida

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{4.63}$$

e $\mathbf{D}$ é a **matriz de rigidez elástica do material**. λ é conhecido como um dos **parâmetros de Lamé.** Como $G = E/2(1+\nu)$, pode-se definir

$$c = 2G + \lambda, \text{ tal que } c = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ e } \lambda = \frac{\nu c}{(1-\nu)}. \tag{4.64}$$

Observação. Enfatiza-se novamente que todas essas relações são válidas apenas para materiais em sua faixa elástico-linear, caso a possuam. Se o material possuir essa faixa, pode-se verificar se um estado triaxial de tensões encontra-se na faixa linear se $\sigma_{eq} < \sigma_E$, onde σ_{eq} é a **tensão equivalente** obtida por algum dos critérios de início de escoamento, como, por exemplo, o critério de von Mises ou o de Tresca. Esses critérios são tratados no Capítulo 6.

4.7.1 Deformações térmicas

É uma observação experimental bastante comum que se um corpo for submetidos a **incrementos moderados** de temperatura, ΔT, desenvolverá uma **dilatação térmica**, i.e., sofrerá deformações, mesmo em ausência de forças externas, desde que se encontre totalmente livre de vínculos que impeçam sua deformação. Por exemplo num **problema uniaxial**, consideremos uma barra reta

de comprimento inicial L_o a uma temperatura de referência T_o. Se a barra estiver desvinculada e sua temperatura for aumentada para uma temperatura T, observa-se experimentalmente que seu comprimento será modificado para L. Ela sofre então uma deformação engenharia de origem puramente térmica, $\varepsilon_x^t = \Delta L/L_o$. Observa-se experimentalmente que essa deformação na direção axial é proporcional ao incremento de temperatura sofrida pela barra, $\Delta T = T - T_o$, dado pela seguinte relação

$$\varepsilon_x^t = \alpha \Delta T \tag{4.65}$$

A constante α é uma propriedade do material, denominada **coeficiente de dilatação térmica linear**, em unidades 1/°C ou 1/K. Para os materiais em geral, essa relação só é válida para incrementos moderados de temperatura. Para variações grandes de temperatura, os materiais apresentam uma relação não linear entre a deformação e ΔT, que normalmente é modelada através de uma função $\alpha = \alpha(T)$ do material, obtida também experimentalmente. Então, no exemplo do problema uniaxial, dado o valor do incremento de temperatura aplicada à barra, se observaria um elongamento dado por

$$\Delta L = \alpha \Delta T L_o. \tag{4.66}$$

Note que, claramente, esse elongamento só se produzirá se a barra estiver desvinculada, livre para se deformar.

Outro aspecto sobre a deformação térmica é que, **em materiais isotrópicos, a deformação térmica é a mesma em todas as direções**. No problema da barra, a deformação térmica axial é $\varepsilon_x^t = \alpha \Delta T$, e também em qualquer direção transversal, por exemplo, $\varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha \Delta T$.

Consideremos o **problema geral tridimensional**. No presente texto nos restringimos a materiais homogêneos, isotrópicos. Então consideramos o corpo 3D em duas configurações: uma configuração indeformada, onde a temperatura é uma temperatura de referência T_o, e uma segunda configuração, em que a temperatura é $T \neq T_o$, i.e., sob a ação de um incremento $\Delta T = T - T_o$ de temperatura. Nesse caso, um elemento diferencial de volume do material apresenta o seguinte campo de deformações, ditas **deformações térmicas**:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{array} \right\}^t = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}^t = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{4.67}$$

se ele estiver livre para se deformar. Observa-se que as deformações extensionais são idênticas em todas as direções e que **o cisalhamento gerado por um incremento de temperatura é nulo**. Essas duas observações são restritas aos materiais homogêneo-isotrópicos. De fato, em materiais anisotrópicos, o incremento de temperatura pode gerar deformações cisalhantes, e as componentes térmicas de deformação extensionais podem ser distintas em cada direção.

Note que o fato das componentes extensionais serem idênticas não significa que o corpo terá elongamentos idênticos nas dimensões cartesianas. Por exemplo, um bloco retangular de dimensões $a \times b \times c$ nas direções x, y, z, quando submetido a uma variação de temperatura apresentará elongamentos $a\alpha\Delta T$, $b\alpha\Delta T$ e $c\alpha\Delta T$, nas três direções, respectivamente, (desde que o bloco esteja livre para se deformar). Por exemplo, se o bloco estiver impedido de se elongar na direção x, claramente a deformação e o elongamento naquela direção serão nulos. Nesse caso, desenvolve-se uma tensão σ_x, de origem térmica, dada por $\sigma_x = E\alpha\Delta T$.

Se considerarmos ambas as contribuições de deformações, devidas às tensões mecânicas e à temperatura, a lei de Hooke 3D, eq.(4.62), fica modificada para a seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.68}$$

Isso pode ser compactado na forma simbólica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^t. \tag{4.69}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \{\alpha\Delta T, \alpha\Delta T, \alpha\Delta T, 0, 0, 0\}^T$ é o vetor de deformações térmicas. A forma inversa pode ser obtida pela inversa da matriz de flexibilidade:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t\right). \tag{4.70}$$

Exemplo 4.1.1 – bloco sob compressão

Considere um bloco ortogonal de material elástico linear, de dimensões $A \times B \times C$ nas direções cartesianas, respectivamente. Ele é montado numa cavidade que consideraremos infinitamente rígida, como na Figura 4.25. O bloco é ajustado à cavidade de forma a manter contato em 5 de suas faces, podendo se deformar sem atrito. Na face superior, uma pressão p é aplicada na direção x. Qual o valor das tensões transversais σ_y e σ_y em termos de p?

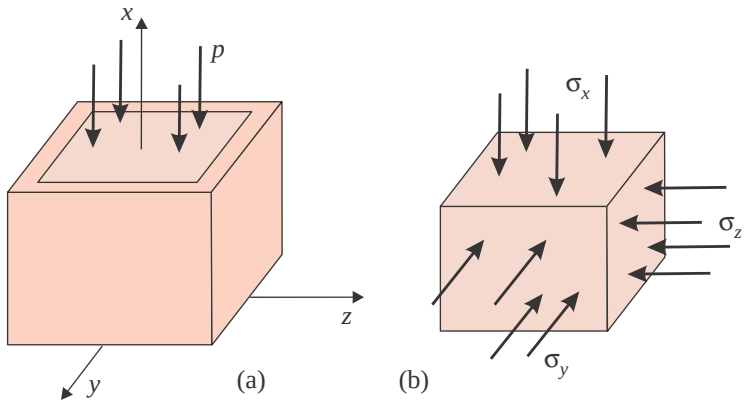


Figura 4.25: Bloco sob compressão ajustado numa cavidade absolutamente rígida.

Solução:

O estado de deformação do bloco é uniaxial, com apenas a componente vertical ε_x não nula. As tensões são determinadas pela Lei de Hooke triaxial (4.63), que resulta em todas as tensões cisalhantes nulas, e as tensões normais dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \sigma_z = \lambda\varepsilon_x. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Como $\sigma_x = -p$, temos na primeira equação a deformação axial

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{-p}{(2G+\lambda)}} \tag{4.72}$$

que levada à segunda equação e simplificando usando as definições de G e λ em (4.63),gera

$$\boxed{\sigma_y = \sigma_z = -\frac{\nu p}{(1-v)}}. \tag{4.73}$$

Considerando as deformações uniformes, $\varepsilon_x = \Delta A/A$. Então, $\Delta A = -pA/(2G+\lambda)$. A rigidez do bloco restringido é $c = \sigma_x/\varepsilon_x = (2G+\lambda)$. Esse fator c é dependente apenas do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson v dado em (4.64):

$$c = 2G + \lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{4.74}$$

Para $E = 200$ GPa, c varia com o coeficiente de Poisson conforme a Figura 4.26. Quando $\nu = 0$, a rigidez do bloco é igual a E conforme $\nu \to \infty$, a rigidez também tende ao infinito pois o termo $(1-2\nu)$ tende a zero.

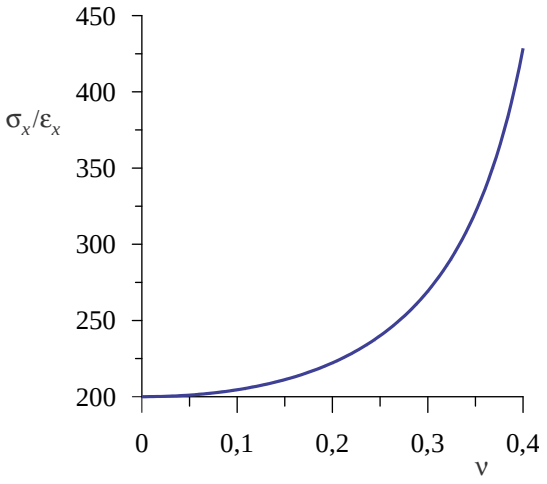


Figura 4.26: Variação da rigidez do bloco do Exemplo 1.1 em relação ao coeficiente de Poisson.

Exemplo 4.2 – Barra sob incremento de temperatura

Consideremos uma barra de dimensões iniciais $L_0 \times b_0 \times h_0$ nas direções cartesianas xyz, como na Figura 4.27. (a) Se a temperatura na barra foi incrementada em ΔT, quais as deformações sofridas pela barra, se ela se encontra desvinculada e livre para se deformar? (b) Se a barra estiver com as extremidades fixadas de forma a não poderem se deformarem axialmente, qual a tensão de origem térmica? Use os valores $E = 200$ GPa, $b_0 = h_0 = 10$ mm, $L_0 = 3$ m, com coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°\text{C}$ e $\Delta T = 100$ °C.

Solução:

(a) Se a barra estiver desvinculada, uma variação de temperatura gera as deformações

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha \Delta T = 11,7 \cdot 10^{-6} \times 100 = 11,7 \cdot 10^{-4}. \tag{4.75}$$

As variações nas dimensões são

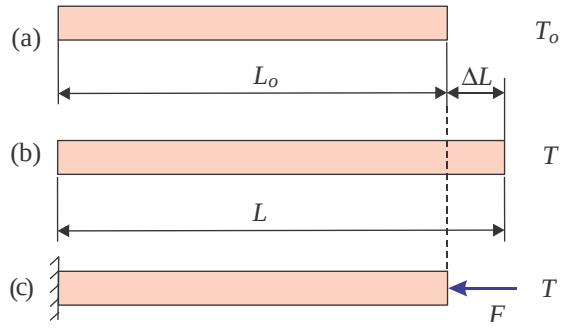


Figura 4.27: (a) Barra indeformada, (b) sob o efeito térmico, desvinculada, (c) com as extremidades fixas.

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_0\varepsilon_x^t = 3.000 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 3,51 \text{ mm}, \\ \Delta b &= b_0\varepsilon_y^t = 10 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{mm}, \\ \Delta h &= h_0\varepsilon_z^t = 10 \times 11,7 \cdot 10^{-4} = 11,7 \cdot 10^{-3}\text{mm}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

(b) A situação em que a barra se encontra biengastada sob o efeito térmico pode ser simulada considerando como ponto de partida a solução do item (a) acima. O comprimento final ali é $L = L_0 + \Delta L = 3.003,51$ mm. Consideramos que, se aplicarmos uma força F de valor adequado nas extremidades, compressiva, essa força vai reduzir o comprimento a partir de $3.003,51$ mm até que a barra retorne ao seu comprimento original. Com isso, a barra desvinculada assume a configuração de uma barra biengastada, em que a tendência de dilatação do ΔT é compensada pela força F, pelo menos axialmente. A força F é interna, e é aplicada pelos apoios para reprimir a tendência de deslocamento axial. Os cálculos são os seguintes.

Para o caso da barra, podemos considerar que uma força axial F gere uma distribuição uniforme de tensões e de deformações dados por

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \tag{4.77}$$

Usando a lei de Hooke uniaxial, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, temos a **relação entre a força e o elongamento** ΔL:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x, \\ \frac{F}{A} &= E\frac{\Delta L}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta L = \frac{FL}{EA}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Então, a força necessária para anular o ΔL gerado termicamente no item (a) é

$$-\Delta L = \frac{FL}{EA} \qquad \Rightarrow \qquad -3,51 = \frac{F\ 3.003,51}{200.000 \times 100}, \tag{4.79}$$

o que resulta em $F = -23.373$ N. Essa força é sustentada pelos apoios, e gera uma tensão $\sigma_x = F/A = -233,73$ MPa.

Exemplo 4.3 – Barra sob tração e temperatura

Considere uma barra de aço está engastada numa extremidade, sob a ação de uma força F na outra extremidade, como na Figura 4.28, e sob a ação de um incremento de temperatura ΔT. Qual a variação do comprimento da barra? Obtenha expressões analíticas e aplique os valores: $A = 100$ mm^2, $L_0 = 3$ m, $F = 1$ kN, $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°\text{C}$, $\Delta T = 100$ °C.

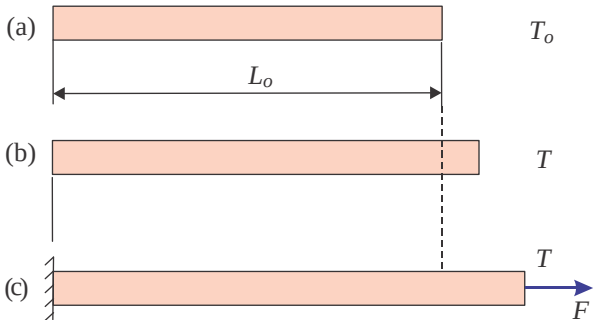


Figura 4.28: Barra sob a ação de carga concentrada e incremento de temperatura.

Solução:

Temos duas parcelas de deformação axial, uma devida à força aplicada, que gera uma tensão σ_x, e outra devida ao incremento de temperatura, como indicado na Figura 4.28:

$$\varepsilon_{xF} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x^t = \alpha \Delta T. \tag{4.80}$$

Então, a deformação total fica

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T} \tag{4.81}$$

Para o caso de barras, podemos considerar a tensão e a deformação axial uniformemente distribuídas, de forma que

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}. \tag{4.82}$$

Usando (4.81), temos a **relação entre a força, a temperatura e o elongamento** ΔL:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T, \\ \frac{\Delta L}{L_0} &= \frac{F}{EA} + \alpha \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta L = \frac{F L_0}{EA} + \alpha \Delta T L_0} \end{aligned} \tag{4.83}$$

Nota-se que o primeiro termo à direita da igualdade, F/EA, é o mesmo do elongamento d barra no caso não térmico. O segundo termo incorpora mais uma parcela de elongamento devido ao incremento de temperatura. Para os numéricos do exemplo,

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{F L_0}{EA} + \alpha \Delta T L_0, \\ &= \frac{10^3 \times 3.000}{200 \cdot 10^3 \times 100} + 11,7 \cdot 10^{-6} \times 100 \times 10^3, \\ &= 0,15 + 3,51 = 3,66 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

A deformação axial final vem de (4.83), ou mais simplesmente de $\varepsilon_x = \Delta L / L_0 = 0{,}366$ %.

4.7.2 Experimentação das propriedades elásticas

As relações (4.62) são definidas por apenas **três constantes de material**, E, G e ν, em lugar das 21 da forma (4.52). Entretanto, prova-se que **apenas duas dessas constantes são independentes** num material homogêneo, isotrópico elástico linear. Existe uma relação fixa entre elas, dada por

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \tag{4.85}$$

Por exemplo, para aços-carbono, valores típicos são: $E = 207$ GPa e $\nu = 0,3$, o que resulta $G = 79,6$ GPa. Assim, um único tipo de **ensaio** é suficiente para caracterizar o material. Consideremos novamente o corpo de provas cilíndrico da Figura 4.9. Se, durante o ensaio de tração, forem registradas as seguintes três informações:

- a força F,
- a variação de comprimento ΔL entre os pontos de referência A e B,
- e a variação de diâmetro ΔD, durante a faixa linear do ensaio, pode-se calcular, em cada ponto do ensaio, os seguintes valores para cada valor de F:

$$\sigma_x = \frac{F}{A_o}, \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_o} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta D}{D_o}. \tag{4.86}$$

Fazendo medições e cálculos para vários valores de força F, podem-se calcular as propriedades elásticas do material por

$$\boxed{E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}, \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \tag{4.87}$$

4.7.3 Estado Plano de Tensões

Em diversos tipos de problemas em engenharia, o estado de tensões é caracterizado por:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{4.88}$$

em todos os pontos do corpo. Nesses casos, (4.62) define as deformações

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right), & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}, & \gamma_{xz} = 0, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right), & \varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), & \gamma_{yz} = 0. \end{cases} \tag{4.89}$$

As duas primeiras equações formam um sistema algébrico de duas equações envolvendo σ_x, σ_y e ε_x, ε_y, que pode ser invertido, resultando a relação das tensões em termos das deformações:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-\nu^2} & \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}} \tag{4.90}$$

O sistema pode ser posto na forma matricial $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}$, onde $\mathbf{Q}$ é a **matriz de rigidez reduzida do material**. É também uma matriz simétrica e invertível.

Na quarta das equações (4.89), ε_z pode ser posto em termos de ε_x e ε_y substituindo (4.90), o que resulta:

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \tag{4.91}$$

Então, embora um estado plano de tensões não resulte num estado plano de deformações, pois $\varepsilon_z \neq 0$, ocorre que ε_z não é uma quantidade independente. Existem apenas três deformações independentes no EPT, aquelas mostradas na equação (4.90).

Exemplo 4.4 – Determinação experimental de propriedades elásticas

Considere um ensaio de tração para determinar as propriedades elásticas de uma certa liga de aço. O corpo de prova é do tipo cilíndrico padrão como na figura 4.9, com comprimento útil $L_o = 62,5$ mm, diâmetro inicial $D_o = 12,5$ mm. As medições indicaram que, para uma carga axial $F = 40$ kN, a variação no comprimento útil foi $\Delta L = 0,101$ mm e houve uma redução no diâmetro de $\Delta D = -5,94$ μm. Determine os módulos de elasticidade E e G, e o coeficiente de Poisson ν.
Solução:

Nesse problema usamos diretamente as equações (4.86) e (4.87). A tensão axial σ_x e as deformações axial ε_x e transversal ε_{trans} são

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_x = \dfrac{F}{A} = \dfrac{40\cdot 10^3}{\pi\ D_o^2/4} = \dfrac{40\cdot 10^3}{122,7} = 326 \text{ MPa}, \\ \varepsilon_x = \dfrac{\Delta L}{L_o} = \dfrac{0,101}{62,5} = 1,62\cdot 10^{-3}, \\ \varepsilon_{trans} = \dfrac{\Delta D}{D_o} = \dfrac{-5,94\cdot 10^{-3}}{12,5} = -4,75\cdot 10^{-4}. \end{array}\right.$$

As propriedades elásticas vêm de (4.87):

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{326 \text{ MPa}}{1,62\cdot 10^{-3}} = 201 \text{ GPa}, \\ \nu &= -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_x} = -\frac{-4,75\cdot 10^{-4}}{1,62\cdot 10^{-3}} = 0,293, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{201}{2(1+0,293)} = 77,7 \text{ GPa}. \end{aligned}$$

Observe que a validade desses valores depende de que um descarregamento seja realizado no ensaio, de forma a verificar se o material, sob aquele nível de tensão ($\sigma_x = 326$ MPa), encontra-se em sua faixa elástico-linear. Além disso, como em qualquer experimentação, é necessária a realização de diversos ensaios nas mesmas condições devido à dispersão estatística de valores. Usualmente, pelo menos três corpos de provas devem ser testados.

Exemplo 4.5 – Caso de Estado Plano de Tensões.

Considere uma placa de aço retangular de dimensões $a \times b \times h$ nas direções x, y, z, submetida a forças estáticas coplanares q_x e q_y, em (N/m^2), uniformemente distribuídas sobre suas bordas, como na Figura 4.29. Num certo ponto foram colocados dois extensômetros, A e B, para medirem as deformações nas direções x e y, respectivamente. Os valores obtidos foram $\varepsilon_x = 5,0\cdot 10^{-4}$ e $\varepsilon_y = 1,0\cdot 10^{-4}$. Determine: (a) as tensões σ_x e σ_y, e os carregamentos q_x e q_y; (b) a deformação transversal ε_z na placa. O aço usado tem $E = 204$ GPa e $\nu = 0,25$.

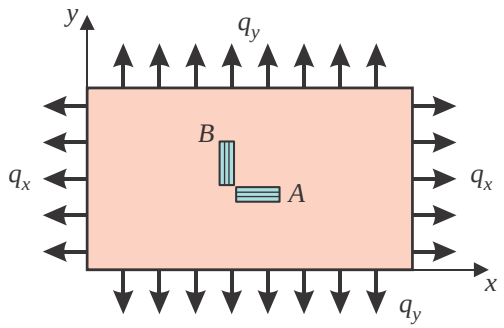


Figura 4.29: Placa bi tracionada do Exemplo 4.5.

Solução:

(a) Como a placa é delgada e o carregamento é coplanar, uniforme através da espessura, consideraremos que a placa se encontra em um estado plano de tensões, i.e., com $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, de forma que as tensões podem ser obtidas diretamente da Lei de Hooke reduzida (4.90). A matriz de rigidez tem valores $Q_{11} = E/(1-\nu^2) = 204/(1-0,25^2) = 217,6$ GPa e $Q_{12} = \nu Q_{11} = 0,25 \times 217,6 = 54,4$ GPa. Logo, (4.90) fica

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 217,6 & 54,4 & 0 \\ 54,4 & 217,6 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{array} \right] \text{GPa} \times \left\{ \begin{array}{c} 5,0 \cdot 10^{-4} \\ 1,0 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 114,2 \\ 49,0 \\ 0 \end{array} \right\} \text{MPa} \tag{4.92}$$

Note que o valor do módulo elástico cisalhante, G, não é necessário nesse problema. Como as tensões são uniformes, elas devem ser válidas também ao longo das bordas da placa. Devemos ter $q_x = \sigma_x$ e $q_y = \sigma_y$. Essa equivalência é decorrente da condição de equilíbrio de um elemento diferencial situado na borda da placa, como ilustrado na Figura 4.29b. Para um elemento na borda $x = a$, o somatório de forças na direção x produz $q_x = \sigma_x$. Essa é uma relação de equilíbrio entre a componente de tensão, que atua na parte do material que se localiza internamente ao corpo, e o carregamento q_x, que atua na superfície externa do corpo. Uma situação similar ocorre com o equilíbrio de um elemento diferencial na borda superior ou inferior, como mostrada na figura. Então, o carregamento aplicado na placa que gerou as deformações medidas foram $q_x = \sigma_x = 114,2$ MPa e $q_y = \sigma_y = 49,0$ MPa.

(b) A deformação ao longo da espessura é dada por (4.91):

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{0,25}{1-0,25}(5,0+1,0) \cdot 10^{-4} = -2,0 \cdot 10^{-4}. \tag{4.93}$$

Exemplo 4.6 – Barra sob tração e temperatura - deformação transversal

Considerando os dados do Exemplo 4.3, buscamos determinar a variação das dimensões da seção transversal da barra da Figura 4.28, devido à ação da força axial e do incremento de temperatura ΔT.

Solução:

Devemos notar que a deformação transversal possui duas origens distintas nesse problema: **(1)** o efeito de F através do efeito de Poisson, e **(2)** o efeito da dilatação térmica nas direções transversais. Em (4.81) podemos identificar as duas deformações à direita da igualdade $\varepsilon_x = \sigma_x E + \alpha \Delta T$:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{xF} = \dfrac{\sigma_x}{E} & \text{- devida a } F, \\ \varepsilon_x^t = \alpha \Delta T & \text{- devida a } \Delta T. \end{array} \tag{4.94}$$

As deformações transversais produzidas por F e ΔT são:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{yF} = -v\varepsilon_{xF} = -v\dfrac{\sigma_x}{E} & \text{- devida a } F, \\ \varepsilon_y^t = \alpha \Delta T & \text{- devida a } \Delta T. \end{array} \tag{4.95}$$

Na direção z as deformações são iguais a y mostradas acima, pois ambos os efeitos, térmico e de Poisson, são independentes da orientação no material isotrópico. Então, a deformação total em qualquer direção transversal é

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{yF} + \varepsilon_y^t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varepsilon_y = -v\frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T} \tag{4.96}$$

Para os dados numéricos do Exemplo 4.3, temos $\sigma_x = F/A = 10^3/100 = 10$ MPa. Então, de (4.96),

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= -0,25\frac{10}{200\cdot 10^3} + 11,7\cdot 10^{-6}\times 100, \\ &= -1,25\cdot 10^{-5} + 1,17\cdot 10^{-3} = 1,16\cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Nota-se que o efeito térmico foi mais importante que o efeito de Poisson na deformação transversal.

4.8 Equações gerais de mecânica dos sólidos

Nesse ponto do texto já temos apresentados quase todas os grandes conjuntos de **equações gerais da mecânica dos sólidos**. Esses grandes conjuntos são os seguintes:

- **Equações de equilíbrio**. Elas podem tomar diversas formas. Podem envolver apenas as **forças externas** quando buscamos reações, podem envolver **forças externas e internas** quando buscamos esforços no método das seções, ou podem envolver **tensões** quando aplicamos a condição de equilíbrio num elemento diferencial de material. Nesse último caso as equações de equilíbrio dinâmico foram deduzidas na seção 3.3, e tem a forma do sistema de equações diferenciais (3.23):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{cx} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{cy} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{cz} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}} \tag{4.98}$$

  No caso estático o lado direito é nulo e se tem as equações locais de equilíbrio mostradas em (3.24).

- **Relação cinemáticas**, ou relações deformações-deslocamento. No caso da teoria linearizada, essas são as equações diferenciais (4.12) que definem as componentes do tensor deformação num ponto em relação ao campo de deslocamentos

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}} \tag{4.99}$$

  Note que essas são apenas as relações da teoria linearizada, que forma um caso especial das relações cinemáticas não lineares.

- **Relações constitutivas**, ou relações tensão-deformação. No caso de materiais homogêneos, isotrópicos elástico-lineares, essas relações são a Lei de Hooke 3D, equações (4.68), ou (4.70):

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} \tag{4.100}$$

Note que a essa relação, lei de Hooke, é apenas uma dentre milhares de outras formulações, sendo que cada uma tenta representar adequadamente o comportamento de um material, de um grupo de materiais, ou a seu comportamento quanto a um conjunto de situações físicas. Essa relação, entretanto, é aquela mais versátil, que atende à maior quantidade de situações comuns em engenharia.

- **Condições de contorno**. Como o sistema de equações acima envolve equações diferenciais, a determinação de uma solução só pode ser feita se, **em cada ponto do contorno do corpo se conheça, ou o valor do vetor deslocamento ou o valor do vetor tensão**. Ao longo do texto será desenvolvido o entendimento dos requisitos das equações diferenciais acima quanto às condições de contorno.

A solução desse sistema de equações e condições de contorno representa a solução do problema, dentro das hipóteses inerentes às equações acima e também das hipóteses usadas pelo analista na modelagem do problema. A solução completa, quando viável, provê o conhecimento do valor dos seguintes campos em cada ponto $\mathbf{x}$ do corpo:

Entidade	**Função incógnita**	**quantidade de componentes**
deslocamentos	$u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$	3
deformações	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$	6
tensões	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$	6
Total		15

(4.101)

Logo, o problema em sua forma tridimensional genérica possui 15 funções incógnitas. O número de equações gerais disponível também é 15, como pode ser visto da contabilidade das equações (4.98)-(4.100):

Relações	**Função incógnita**	**quantidade de equações**
de equilíbrio	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$	3
cinemáticas	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$	6
constitutivas	$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$	6
Total		15

(4.102)

Conhecidos os valores de tensão, surge finalmente a questão: o material escolhido para o componente suportará as cargas? Isso torna necessária um outro conjunto de equações:

- **Critérios de falha de material**. São literalmente centenas de teorias, cada uma adaptada a uma diferente classe de materiais e situações, tentando prever se o material suporta um certo estado de tensões, representado pelo valor das componentes de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ aplicado num dado ponto, sem apresentar determinado tipo de falha. Esse é o assunto dos dois capítulos seguintes, onde abordaremos três das teorias mais utilizadas em engenharia.

4.9 O problema de barras sob carga axial

O primeiro problema em que aplicaremos os grupos de equações gerais da mecânica dos sólidos é o de **barras sob carga axial**, por sua simplicidade e sua enorme aplicabilidade em sistemas de engenharia. As estruturas de barras são as mais clássicas em engenharia moderna, em que se usa tradicionalmente o aço, mas também madeira e, em alguns casos, materiais compostos de alto desempenho.

A Figura 4.30 ilustra uma torre de transmissão elétrica típica. As barras tracionadas são dimensionadas por critério de falha de inicio de escoamento, enquanto as barras comprimidas tendem a falhar antes do escoamento através do fenômeno de flambagem, que é um tipo de instabilidade considerado no Capítulo 13. Na presente seção nos concentraremos na identificação do estado de tensão e de deformação de uma única barra da estrutura. Como se verá a seguir, esses valores serão primariamente determinados pelo valor do **esforço normal** atuando na barra. Os esforço nas

Figura 4.30: Vistas de uma torre de transmissão elétrica típica.

barras da estrutura como um todo podem ser determinados, por exemplo, pelo método das seções, no caso de uma estrutura simples, como detalhado no Capítulo 2. Para estruturas mais complexas, se pode usar métodos de energia, como no Capítulo 14, ou o Método de Elementos Finitos, como no Capítulo 15. Em geral, o processo de análise de uma estrutura de barras segue, aproximadamente, os passos ilustrados no diagrama da Figura 4.31.

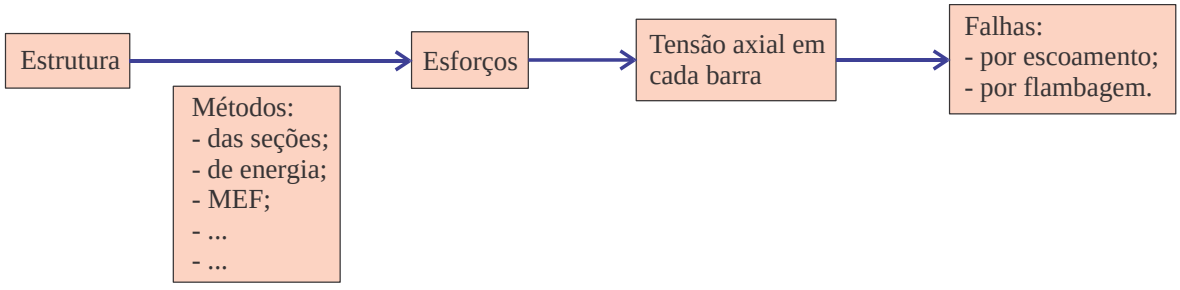


Figura 4.31: Fluxograma aproximado para análise de uma estrutura de barras.

Um tipo ainda mais simples que uma barra do tipo que constitui estruturas como as torres de transmissão ilustradas acima, são os cabos de aço, que suportam apenas esforços trativos. A Figura 4.32 ilustra um cabo usado como pendural de sustentação do viaduto central da Ponte Hercílio Luz em Florianópolis. Também a análise de cabos se insere no escopo da formulação vista nessa seção.

Consideremos um segmento de barra reta, com **área de seção transversal** dada por uma função de x, $A = A(x)$, como na Figura 4.33a. Para um problema tridimensional, as forças de corpo nas equações diferenciais de equilíbrio, (4.98), tem as componentes f_{cx}, f_{cy} e f_{cz} em unidades [N/m^3]. No problema de barra, buscamos uma idealização em que todo o carregamento seja axial. Assim, começamos por limitar o carregamento apenas à componente axial da força de corpo, f_{cx}. Também, buscamos uma situação em que todos os campos (deslocamentos, tensões, deformações), sejam uniformes ao longo de cada seção, i.e., todos os campos devem depender apenas da coordenada axial x. Assim, admite-se na formulação de barra apenas forças de corpo uniformes em cada seção, de forma que $f_{cx} = f_{cx}(x)$. Nesse caso, é usual definir uma carga distribuída por unidade de comprimento, dada por

$$p_x(x) = A(x) f_{cx}(x). \tag{4.103}$$

Esse é um **carregamento distribuído** p_x na direção axial, de força por unidade de comprimento axial. O valor da carga é uma função conhecida $p_x = p_x(x)$ como na figura 4.33b. Adicionalmente,

Figura 4.32: Detalhe do cabo de aço de um pendural de sustentação do vão central da Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis.

sabe-se que cada seção transversal suporta um certo valor de **esforço normal** N_x, i.e., temos a função $N_x = N_x(x)$ do esforço como na Figura 4.33c.

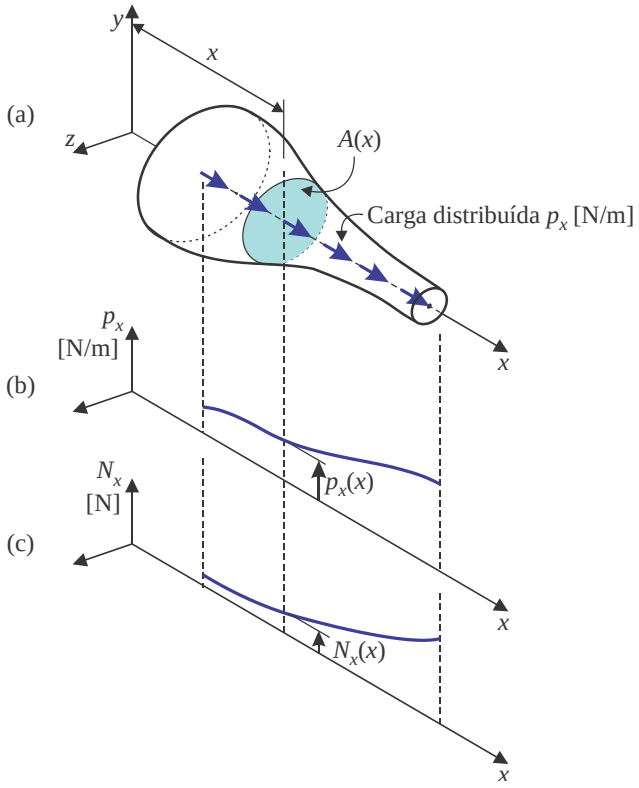


Figura 4.33: Segmento de barra de seção variável, sob carga axial distribuída q_x.

Desejamos obter uma relação que nos dê o deslocamento axial de uma seção x na direção axial, $u = u(x)$, em termos de funções conhecidas: $p_x(x)$, do módulo de elasticidade do material E e das condições de vinculação da barra. Isso será feito usando os três grandes conjuntos de equações gerais da mecânica dos sólidos. Primeiramente consideramos as três equações diferenciais de equilíbrio estático, eqs.(4.98), para acelerações nulas. Consideramos que no problema de barras retas sob carga axial, todas as componentes de tensão são nulas, exceto σ_x, i.e.,

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} \ = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{4.104}$$

Além disso, considera-se que σ_x seja uniforme em cada seção, de forma que $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Assim, das três equações de equilíbrio (4.98), as duas últimas se tornam identicamente nulas, e a primeira reduz-se a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_{cx} = 0. \tag{4.105}$$

Uma vez que todos os termos dependem apenas de x, podemos integra-los sobre a área da seção transversal:

$$\int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA + \int_A f_{cx} dA = 0. \tag{4.106}$$

A integral à esquerda pode ser trocada de ordem com a derivada, resultando

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x \, dA + f_{cx} \int_A dA = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x} = -p_x(x)} \tag{4.107}$$

Como a carga p_x é suposta conhecida, o esforço $N_x(x)$ pode ser determinado em qualquer seção. Essa é a forma da equação de equilíbrio da barra em sua forma diferencial, em termos do carregamento local e do gradiente do esforço normal.

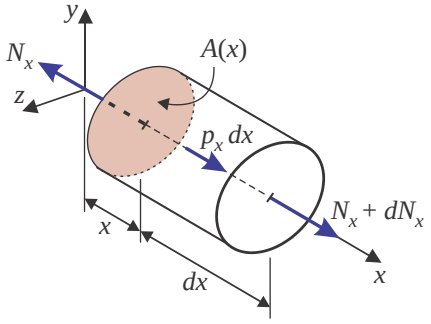


Figura 4.34: Segmento de barra de comprimento diferencial dx.

2a dedução. Uma outra forma de deduzir (4.107) é a seguinte. Primeiro nos concentraremos não na barra inteira, mas num pequeno segmento de comprimento diferencial dx, localizado na seção de coordenadas x, como na Figura 4.34, que mostra um diagrama de corpo livre. A força externa atuando no segmento é $p_x dx$, e nas seções transversais atuam N_x e $(N_x + dN_x)$ como indicado. Então, a **equação de equilíbrio** de forças na direção axial é

$$\sum F_x \rightarrow \qquad -N_x + (N_x + dN_x) + p_x dx = 0,$$

o que gera (4.107).

A hipótese que as tensões se distribuem uniformemente em cada seção significa que a tensão em cada ponto é igual ao valor médio

$$\sigma_x(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)}. \tag{4.108}$$

Sendo as demais componentes nulas. Em seguida, consideramos as seis **relações deformações-deslocamentos** (4.12). As **hipóteses simplificativas** do modelo indicam **que cada seção transversal da barra permanece plana e se desloca apenas axialmente**. Então, a componente de deformação axial u é uma função apenas de x, i.e., $u = u(x)$. Como consequência, a componente axial da deformação se se torna

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx}, \tag{4.109}$$

e todas as componentes de deformação cisalhantes são nulas:

$$\gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.110}$$

Por último, usamos a relação constitutiva, a Lei de Hooke. Se a componente não nula de tensão (4.108) for levada à lei de Hooke (4.100), obtemos as deformações normais

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x) &= \frac{\sigma_x(x)}{E}, \\ \varepsilon_y(x) &= -\nu\frac{\sigma_x(x)}{E} = -\nu\varepsilon_x(x), \\ \varepsilon_z(x) &= \frac{\sigma_x(x)}{E} = -\nu\varepsilon_x(x), \end{aligned} \tag{4.111}$$

e as três deformações cisalhantes nulas, coerentes com as hipótese cinemáticas (4.110). Note que usando essa equação estamos implicitamente limitando a aplicabilidade dos resultados obtidos a seguir ao caso elástico linear.

Nesse ponto, os três grupos de equações gerais da mecânica dos sólidos, as 15 eqs. (4.98)-(4.100), foram submetidos às hipóteses do modelo de barra e ficaram reduzidos a quatro equações: (4.107), (4.108), (4.109) e $(4.111)_1$, em termos de quatro funções incógnitas dependentes de x: u, N_x, σ_x e ε_x. Poderíamos incluir as deformações ε_y e ε_z, porém (4.111) mostra que elas são dependentes de ε_x. Essas quatro equações podem ser colapsadas da seguinte forma. Substituindo (4.108) em $(4.111)_1$ temos

$$\varepsilon_x(x) = \frac{N_x(x)}{EA(x)}, \tag{4.112}$$

e igualando a (4.109) temos

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{N_x(x)}{EA(x)}} \tag{4.113}$$

Se diferenciamos em x, temos

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{N_x(x)}{A}\frac{dA}{dx}. \tag{4.114}$$

Para os casos barras com seção uniforme, ou quando a variação da seção transversal é suave, é aceitável desprezar o último termo à direita, de forma que

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dN_x}{dx}.$$

Igualando essa expressão à equação de equilíbrio (4.107) temos finalmente

$$\boxed{EA\frac{d^2u}{dx^2} = -p_x} \tag{4.115}$$

As equações (4.113) e (4.115) são equivalentes. Dado o carregamento $p_x(x)$, integrando (4.115) e aplicando condições de contorno adequadas, temos a solução $u(x)$. Caso tenhamos feito o trabalho prévio de determinar a função do esforço normal $N_x(x)$, basta integrar (4.113) uma única vez para obter o deslocamento axial $u(x)$. Entretanto, (4.115) pode ser usado mesmo em **problemas hiperestáticos**, onde não temos como determinar diretamente as reações e os esforços, quando então o uso de (4.113) de é inviável.

A integração de (4.113) entre duas seções de coordenadas x_B e x produz o deslocamento em x em relação ao deslocamento da seção x_B.

$$u(x) = u(x_{\mathrm{B}}) + \int_{\bar{x}=x_{\mathrm{B}}}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA(\bar{x})}\, d\bar{x} \tag{4.116}$$

onde $u(x_{\mathrm{B}})$ é o deslocamento na seção de coordenadas $x = x_{\mathrm{B}}$. Essa é a **condição de contorno do problema diferencial**, que indica como a barra está vinculada. Essa expressão pode ser posta como

$$\boxed{\underbrace{u(x) - u(x_{\mathrm{B}})}_{\Delta u} = \int_{\bar{x}=x_{\mathrm{B}}}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA(\bar{x})}\, d\bar{x}} \tag{4.117}$$

Então o resultado da integral produz a diferença de deslocamento entre as duas seções, x e x_{B}, i.e., a **variação do comprimento** Δu sofrida pelo trecho integrado.

Nesse ponto podemos fazer um sumário das manipulações realizadas nos três grandes conjuntos de equações gerais da mecânica dos sólidos em decorrência das hipóteses usadas no modelo uniaxial.

- **Hipóteses do modelo uniaxial**: apenas carregamento axial, seção permanece plana, estado uniaxial de tensões:

$$u = u(x), \qquad \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{apenas } \sigma_x \neq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_x = \sigma_x(x). \tag{4.118}$$

- **Relação cinemáticas**,

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{array} \tag{4.119}$$

- **Relações constitutivas**,

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array}\right\} \tag{4.120}$$

- **Equilíbrio local**

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \underbrace{\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_{=0} + f_{cx} = 0, \\ \underbrace{\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}}_{=0} + \underbrace{f_{cy}}_{=0} = 0, \\ \underbrace{\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}}_{=0} + \underbrace{f_{cz}}_{=0} = 0. \end{array} \tag{4.121}$$

Note que as componentes de deslocamento transversal, v e w, não são nulas, mas são dependentes de ε_y e ε_z, que são provenientes de ε_x a partir do efeito de Poisson.

4.9.1 Barra uniforme sob carga concentrada

O caso mais simples de problema de barra consiste numa barra de seção uniforme de área uniforme A, fixa numa extremidade e tracionada na outra por uma carga concentrada F, como na Figura 4.35a.

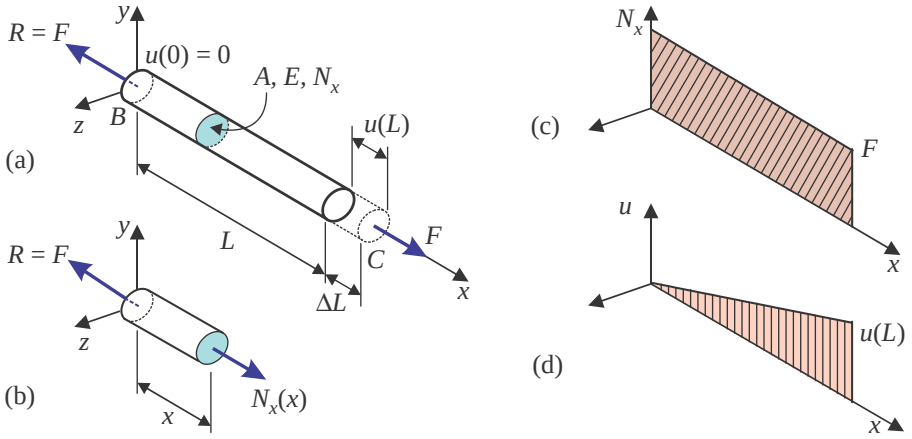


Figura 4.35: (a) Barra uniforme; (b) Diagrama de corpo livre; (c) Diagrama de esforços normais; (d) Diagrama de deslocamento axial.

A **reação** no apoio é obtida pela condição de equilíbrio global $\sum F_x = 0$, i.e., $R - F = 0$, tal que a reação é $R = F$, como na Figura 4.35a.
O **esforço normal** em cada seção é obtido pelo método das seções, como na Figura 4.35b. Por equilíbrio, $N_x(x) = F,\ \forall x \in (0; L)$. O diagrama de esforço normal é uniforme como na figura (c).
O **deslocamento** numa seção arbitrária, $u(x)$, vem de (4.117). Como a barra está fixa na extremidade, a condição de contorno é $u(0) = 0$. Como N_x, E e A independem de x, eles podem ser postos fora da integral resultando

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \frac{F}{EA}\int_{\overline{x}=0}^{x} d\overline{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{u(x) = \frac{Fx}{EA}, \qquad \forall x \in [0; L]} \tag{4.122}$$

Trata-se então de uma variação linear em x, como ilustrado na Figura 4.35d. A deformação é uniforme, $\varepsilon_x := du/dx = F/EA$. A variação total do comprimento da barra é obtida para $x = L$:

$$\boxed{\Delta L = u(L) = \frac{FL}{EA}} \tag{4.123}$$

Dedução alternativa

Em lugar de obter a expressão para o esforço normal e usarmos (4.117), podemos integrar (4.115). Como a carga no problema é concentrada na extremidade C (Figura 4.35a), a carga distribuída é nula, $q_x(x) = 0,\ \forall x \in [0; L]$. Então, integrando (4.115) duas vezes temos

$$\frac{du}{dx} = C_1 \quad \text{e} \quad u(x) = C_1 x + C_2, \tag{4.124}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração a serem determinadas pelas **condições de contorno do problema**, que são:

$$\left\| \begin{array}{ll} u(0) = 0, & \text{na extremidade do apoio B,} \\ N_x(L) = F, & \text{na extremidade carregada C.} \end{array} \right. \tag{4.125}$$

A segunda condição pode ser posta em termos do deslocamento, substituindo $N_x = EAdu/dx$ de (4.113). Então as duas **condições de contorno do problema diferencial** ficam

$$\left\| \begin{array}{l} u(0) = 0, \\ EA\dfrac{du}{dx}\bigg|_{x=L} = F. \end{array} \right. \tag{4.126}$$

A primeira condição, $u(0) = 0$ em (4.124) resulta $C_2 = 0$, e a segunda condição produz $EAC_1 = F$,

i.e., $C_1 = F/EA$. Usando as constantes a (4.124) temos a solução do problema, $u(x) = Fx/EA$, que é a mesma já obtida pelo outro método em (4.122).

Exemplo 4.6.1 – Elongamento de barras em paralelo

Considere uma plataforma AB inicialmente horizontal, suportada por barras verticais 1 e 2, como ilustrado na Figura 4.36. A barra AB suporta uma força F a uma distância a do ponto A. Considere que as barras 1 e 2 possuem as seguintes características: L_1, A_1, E_1 e σ_{E1}, e L_2, A_2, E_2 e σ_{E2} respectivamente, para comprimento, seção transversal, módulo de elasticidade e tensão de início de escoamento. Considere a plataforma AB absolutamente rígida. (a) Identifique a posição a da força que faz com que o sistema se deforme mantendo a plataforma AB na horizontal. (b) Qual o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento? Considere os valores numéricos: $L_1 = L_2 = L = 1$ m, $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 70$ GPa, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = \sigma_E = 350$ MPa, $D = 1,5$ m, $F = 1$ kN. Considere que as barras verticais são suficientemente longas para que se possa ignorar os efeitos dos momentos fletores devidos à junção rígida entre a plataforma e as barras. Então, a análise pode ser feita como se as uniões fossem rotuladas.

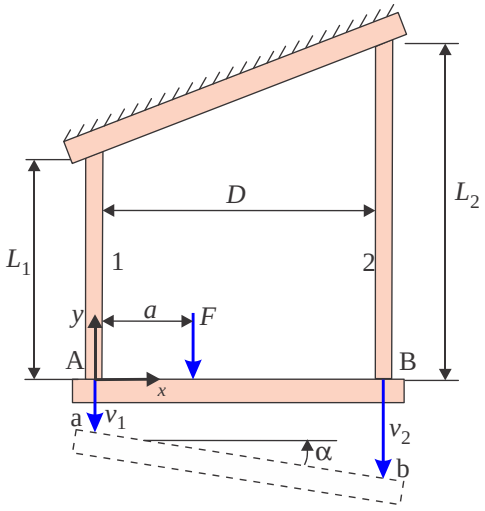


Figura 4.36: Barra horizontal AB suspensa por duas barras verticais 1 e 2.

Solução:

O problema é isostático, como pode ser visto no diagrama de corpo livre da Figura 4.37. As condições de equilíbrio global são

$$\begin{aligned} \sum F_y \quad &\rightarrow \quad R_1 + R_2 = F, \\ \sum M_z^A \quad &\rightarrow \quad R_2 D = Fa. \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad R_1 = F(1 - a/D) \quad \text{e} \quad R_2 = Fa/D. \tag{4.127}$$

As condições de compatibilidade geométricas da configuração deformada é a relação entre os elongamentos v_1 e v_2 das barras. A relação imposta é:

$$v_1 = v_2. \tag{4.128}$$

Os esforços normais nas barras são obtidas pelo método das seções, que resultam $N_1 = R_1$ e $N_2 = R_2$. A relação entre os elongamentos e as reações é

$$v_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2}. \tag{4.129}$$

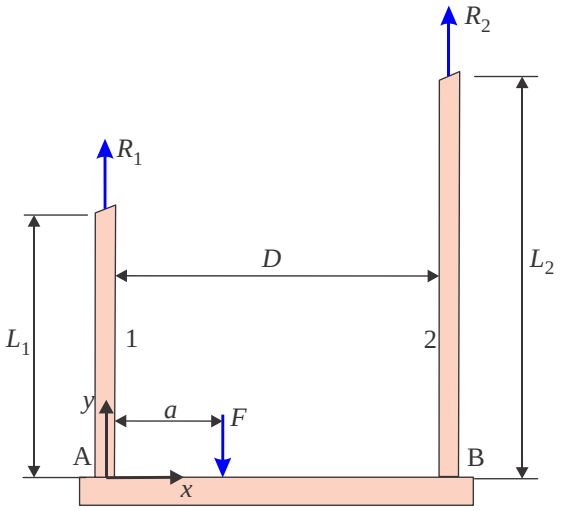


Figura 4.37: Diagrama de corpo livre do sistema, com indicação das reações.

Igualando ambos os termos tem-se

$$\frac{R_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{R_2 L_2}{E_2 A_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \underbrace{\frac{E_1 A_1 L_2}{E_2 A_2 L_1}}_{c} R_2. \tag{4.130}$$

Substituindo as reações de (4.127), obtemos a posição de F que garante a horizontalidade da barra AB:

$$\frac{F}{D}(D-a) = c\frac{Fa}{D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{D-a}{a}} \tag{4.131}$$

Para os valores numéricos do exemplo, temos

$$\begin{array}{ll} c = 0,952, & a = 0,768 \text{ m}, \\ R_1 = 488 \text{ N} & R_2 = 512 \text{ N}, \\ \sigma_1 = R_1/A_1 = 97,6 \text{ MPa}, & \sigma_2 = R_2/A_2 = 34,1 \text{ MPa}, \\ n_1 = 3,58, & n_2 = 7,32. \end{array} \tag{4.132}$$

Logo, o coeficiente de segurança global é o menor dos valores obtidos, $n = 3,58$, com a previsão que, em caso de sobre carga eventual, a barra 1 deve entrar em escoamento primeiro.

Exemplo 4.7 – Campo de deslocamentos transversais em barra sob carga uniaxial

Consideremos como exemplo o caso de uma barra de seção uniforme, submetida a um esforço normal uniforme. Então, de (4.112), temos $\varepsilon_x(x) = N_x/EA = const.$ As demais deformações transversais vêm de (4.119):

$$\varepsilon_y(x,y,z) = \frac{\partial v}{\partial y} = -v\frac{N_x}{EA} = const. \quad \text{e} \quad \varepsilon_z(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial z} = -v\frac{N_x}{EA} = const. \tag{4.133}$$

Podemos integrar cada uma

$$v(x,y,z) = -v\frac{N_x}{EA}y + C_1(x,z), \quad \text{e} \quad w(x,y,z) = -v\frac{N_x}{EA}z + C_2(x,y). \tag{4.134}$$

Como integramos (4.133) em y, a constante de integração, de fato, pode ser dependente das outras duas coordenadas, i.e., $C_1 = C_1(x,z)$, e similarmente para $C_2(x,y)$. Consideramos em seguida as

deformações cisalhantes em (4.119):

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ &= 0+\frac{\partial C_1(x,z)}{\partial x}=0 \qquad \rightarrow C_1(x,z)=C_1(z).\end{aligned} \tag{4.135}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\\ &= 0+\frac{\partial C_2(x,y)}{\partial x}=0 \qquad \rightarrow C_2(x,y)=C_2(y).\end{aligned} \tag{4.136}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\\ &= \frac{dC_1(z)}{dz}+\frac{dC_2(y)}{dy}=0 \qquad \rightarrow C_1=const.,\ C_2=const.\end{aligned} \tag{4.137}$$

Então a solução é o campo de deslocamentos (4.133) na forma

$$\boxed{v(y)=-v\frac{N_x}{EA}y+C_1 \qquad \text{e} \qquad w(z)=-v\frac{N_x}{EA}z+C_2} \tag{4.138}$$

As constantes C_1 e C_2 devem ser identificadas pelas condições de contorno da barra. Por exemplo, se a barra for vinculada com um ponto fixado, por exemplo $v(0)=w(0)=0$, se teria $C_1=C_2=0$.

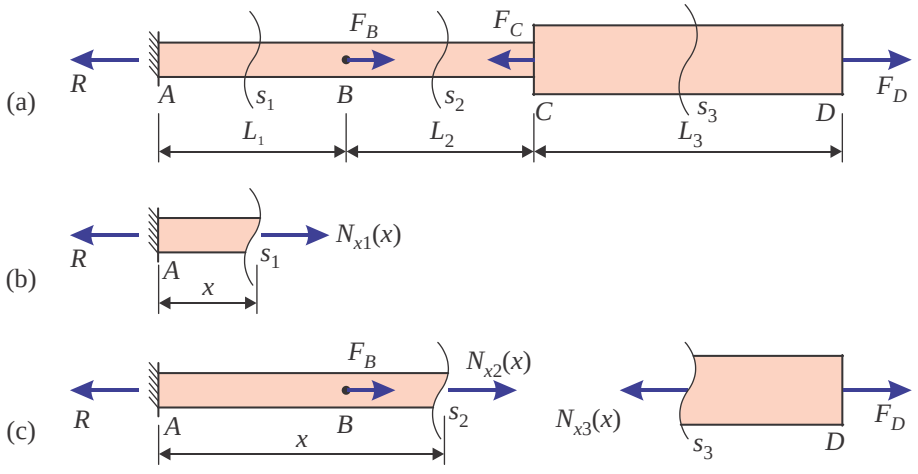


Figura 4.38: Dados e diagramas de corpo livre do Exemplo 4.7. Forças em kN.

Exemplo 4.8 – Variação de comprimento de barra escalonada

Considere uma barra escalonada como na Figura 4.38a, com três segmentos, AB, BC e CD, de comprimentos $L_1=L_2=100$ mm e $L_3=150$ mm. As áreas de seção transversal são $A_1=A_2=800$ mm^2 e $A_3=1200$ mm^2 respectivamente. As forças axiais são concentradas, aplicadas nas seções B, C e D, de valores F_B =20kN, $F_C=30$ kN e $F_D=55$ kN. O material é alumínio, com $E=70$ GPa. Determinar o deslocamento das seções C, D e E.

Solução:

A **reação** R no apoio é determinada por equilíbrio global, $\sum F_x = 0 \rightarrow\ R - F_B - F_C + F_D = 0$, o que produz $R = 45$ kN, com a orientação mostrada na Figura 4.38a.

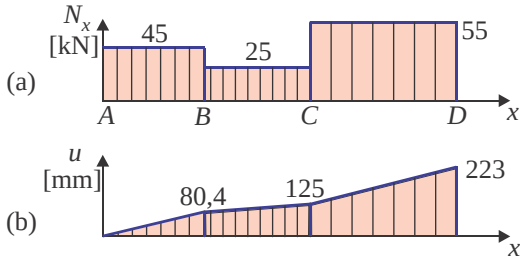


Figura 4.39: Diagrama de esforços normais e deslocamentos no Exemplo 4.7.

Os **esforços normais** são obtidos pelo método das seções. Como as cargas são concentradas, a equação de equilíbrio (4.107) mostra que o esforço normal é uniforme, já que a carga distribuída $p_x = 0$. Então o esforço é uniforme em cada segmento, AB, BC e CD. As Figuras 4.38b e (c) mostram os diagramas de corpo livre para os cortes s_1, s_2 e s_3 em cada um desses segmentos. As equações de equilíbrio produzem os esforços

$$\left\| \begin{array}{lll} N_{x_1} = 45 \text{ kN} & , & \forall x \in (0;100) \text{ mm}, \\ N_{x_2} = 25 \text{ kN} & , & \forall x \in (100;200) \text{ mm}, \\ N_{x_3} = 55 \text{ kN} & , & \forall x \in (200;350) \text{ mm}. \end{array} \right. \tag{4.139}$$

O diagrama de esforço é visto na Figura 4.39a.

A **variação de comprimento** de cada segmento vem de (4.123):

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta L_1 = \dfrac{N_{x_1} L_1}{EA_1} = \dfrac{45 \cdot 10^3 \times 100}{70 \cdot 10^3 \times 800} = 80,4 \ \mu\text{m}, \\ \Delta L_2 = \dfrac{N_{x2} L_2}{EA_2} = \dfrac{25 \cdot 10^3 \times 100}{70 \cdot 10^3 \times 800} = 44,6 \ \mu\text{m}, \\ \Delta L_3 = \dfrac{N_{x3} L_3}{EA_3} = \dfrac{55 \cdot 10^3 \times 150}{70 \cdot 10^3 \times 1200} = 98,2 \ \mu\text{m}. \end{array} \right. \tag{4.140}$$

Então, os deslocamentos das seções A, B, C e D são

$$\left\| \begin{array}{l} u_A = 0, \\ u_B = u_A + \Delta L_1 = 80,4 \ \mu\text{m}, \\ u_C = u_B + \Delta L_2 = 80,4 + 44,6 = 125,0 \ \mu\text{m}, \\ u_D = u_C + \Delta L_3 = 125,0 + 98,2 = 223,2 \ \mu\text{m}. \end{array} \right. \tag{4.141}$$

i.e., o deslocamento na extremidade é $u_D = 0,223$ μm, que é a variação do comprimento total da barra. Como todos os parâmetros são uniformes em cada segmento, a deformação é constante e a variação de deslocamento varia linearmente em cada trecho, como ilustrado na Figura 4.39b.

Exemplo 4.9 – Elongamento de barra de seção variável

Considere a barra de seção retangular ilustrada na Figura 4.40, engastada na seção A e sob uma força trativa F em B. A espessura b é uniforme, e a meia altura da seção tem variação conforme uma função exponencial na forma $d(x) = ae^{cx}$. Determine a função do deslocamento axial da barra, $u = u(x)$. Determine o elongamento total ΔL e a função da tensão nominal axial $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Qual a constante de mola da barra ($k = F/\Delta L$)? Use os valores $F = 5$ kN, $L = 300$ mm, $b = H = 10$ mm, $h = 5$ mm. O material é alumínio com $E = 70$ GPa.

Solução:

O deslocamento numa seção arbitrária x é dado por (4.116), de forma que precisamos identificar as funções do esforço normal e da variação da seção transversal com x. Começamos com o esforço

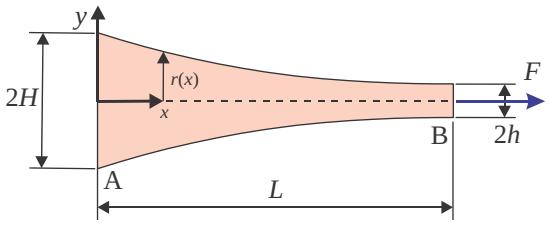


Figura 4.40: Barra de seção retangular variável sob tração.

normal, que em qualquer seção é $N_x = F$. A meia altura da seção, $r(x)$, numa seção de coordenada x, é obtida da função ae^{cx} a partir dos dados geométricos dados. As constantes a e c são obtidas de forma a satisfazerem as condições $r(0) = H$ e $r(L) = h$. Isso produz $a = H$ e $c = (1/L)\ln(h/H)$. Então, a função a meia altura fica

$$r(x) = H\ \text{Exp}\left(\frac{x}{L}\ln(h/H)\right), \quad \forall x \in [0; L]. \tag{4.142}$$

A área da seção transversal é $A(x) = 2br(x)$. O deslocamento numa seção arbitrária x é dado por (4.116)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA(\bar{x})}\, d\bar{x} = \frac{F}{2HEb}\int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{d\bar{x}}{e^{c\bar{x}}}, \\ u(x) &= \frac{F(1-e^{-c\bar{x}})}{2HEbc}. \end{aligned} \tag{4.143}$$

O elongamento total é

$$\Delta L = u(L) = \frac{FL(1-e^{-cL})}{2HEb\ln(h/H)}. \tag{4.144}$$

Usando os valores numéricos do exemplo, temos $c = -2,31 \cdot 10^{-3}$/mm, $a = 10$ mm, obtemos $\Delta L = 0,155$ mm. A deformação axial e a tensão normal variam por

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{Fe^{-c\bar{x}}}{2HEb} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \frac{Fe^{-c\bar{x}}}{2Hb}. \tag{4.145}$$

Como a seção transversal diminui com x, a deformação máxima ocorre na seção B, em $x = L$:

$$\varepsilon_{x\,\max} = \frac{Fe^{-cL}}{2HEb} = \frac{5.000e^{-cL}}{2 \times 10 \times 70.000 \times 10} = 7,14 \cdot 10^{-4}. \tag{4.146}$$

Então, a tensão normal máxima também ocorre na seção B: $\sigma_{x\,\max} = \sigma_x(Lx) = E\varepsilon_{x\,\max} = 70.000 \times 7,14 \cdot 10^{-4} = 50$ MPa. A constante de mola da barra é dada por $k = F/\Delta L = 5.000/0{,}155 = 32{,}3$ kN/mm.

Exemplo 4.10 – Elongamento de barra sob carga distribuída

Consideremos uma barra de comprimento L, de seção uniforme, montada num furo executado num outro corpo, como ilustrado na Figura 4.41. A montagem é tal que existe contato com entre ambas as superfícies. Uma força axial F é aplicada na extremidade livre A. Essa força é resistida por uma força de atrito distribuída sobre toda a superfície lateral da barra. Estimar o deslocamento sofrido pela extremidade A. Usar as hipóteses que a força de atrito p_x, em N/m, seja uniforme em toda a extensão. Usar os valores $F = 1$ kN, $L = 200$ mm, $E = 207$ GPa, $v = 0,25$, e seção transversal circular de diâmetro uniforme $d = 10$ mm.

Solução:

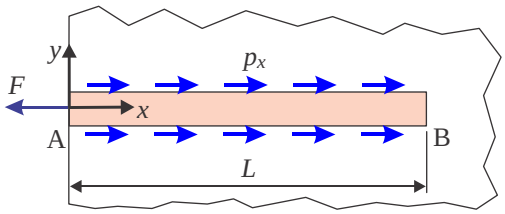


Figura 4.41: Barra inserida em contato com meio contínuo, sob atrito lateral.

O campo de deslocamento da barra pode ser obtido de (4.116), $EAdu/dx = N_x(x)$. Então, primeiramente precisamos obter a expressão do esforço normal N_x. Antes disso, é necessário obter uma relação entre F e p_x. Essa relação é o equilíbrio global da barra:

$$F - p_x L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_x = \frac{F}{L}. \tag{4.147}$$

O esforço pode ser obtido pelo método das seções, com um corte s numa coordenada x, como na Figura 4.42. Então, o equilíbrio resulta em

$$F - p_x x - N_x(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_x(x) = F - p_x x. \tag{4.148}$$

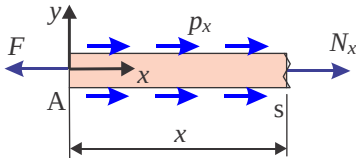


Figura 4.42: Diagrama de corpo livre para o Exemplo10.

A equação diferencial de equilíbrio (4.116) gera

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{N_x(\bar{x})}{EA}\, d\bar{x} = \int_{\bar{x}=0}^{x} \frac{(F - p_x \bar{x})}{EA}\, d\bar{x}, \\ \Rightarrow \qquad & u(x) = u(0) + \frac{Fx}{EA}\left(1 - \frac{x}{2L}\right). \end{aligned} \tag{4.149}$$

O deslocamento na seção A, $u_A = u(0)$, é desconhecido, mas consideramos que seja nulo em B, i.e.,

$$\underbrace{u(L)}_{0} = \underbrace{u(0)}_{u_A} + \frac{FL}{EA}\left(1 - \frac{L}{2L}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u_A = -\frac{FL}{2EA}. \tag{4.150}$$

Levando de volta a (4.149), temos a função de deslocamento axial na barra:

$$u(x) = \frac{F}{EA}\left(x - \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{2}\right), \qquad \forall x \in (0; L). \tag{4.151}$$

A variação da deformação e da tensão axial média são obtidas da relação deformação-deslocamento e da lei de Hooke uniaxial:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{F(1-x)}{EA} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = \frac{F(1-x)}{A}. \tag{4.152}$$

Substituindo os valores numéricos do exemplo obtemos $p_x = 5$ N/mm, $u_A = -6,15$ μm, $\sigma_{xA} = 12,7$ MPa. σ_{xA} é a tensão na seção A. É o valor máximo na barra, como pode ser visto nos diagramas da Figura 4.43. Nota-se que a região crítica é a seção de aplicação da força, a seção

A, independentemente do comprimento da barra. Uma situação distinta, porém de alguma forma análoga, ocorre em uniões parafusadas, em que a tendência de falha é sempre no primeiro filete de rosca próximo à cabeça do parafuso.

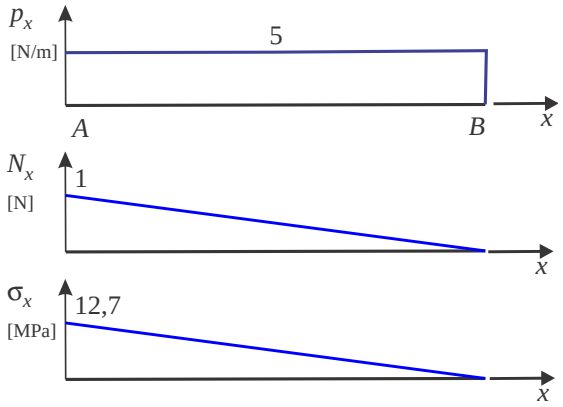


Figura 4.43: Diagramas de força distribuída, esforços normal e de tensão na barra do Exemplo 10.

Exemplo 4.11 – Treliça simples de duas barras

A treliça mostrada na Figura 4.44a tem duas barras e está submetida a uma força horizontal no nó A, de valor $F = 30$ kN. Calcular as componentes de deslocamento horizontal e vertical da rótula A. Os dados são: $b = 1,5$ m, $L = 8$ m, $E = 210.000$ MPa e a área da seção transversal das barras é $A = 2.500$ mm^2.

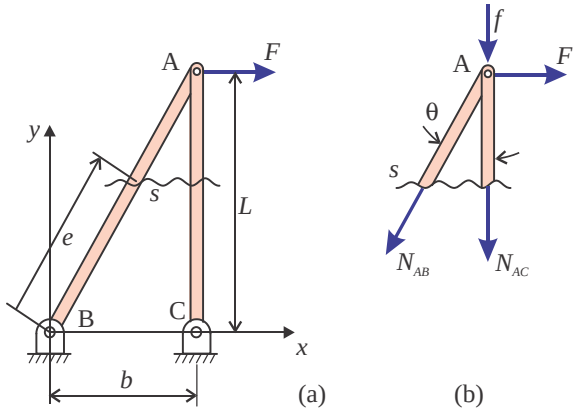


Figura 4.44: Dados do Exemplo 11 e indicação dos esforços.

Solução:
O problema é isostático, e os **esforços** nas barras podem ser obtidos com a ajuda do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.44b. Eles são dados por:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \Longrightarrow N_{AB} \text{ sen } \theta - F = 0, \\ \sum F_y &= 0 \quad \Longrightarrow N_{AC} + N_{AB} \cos\theta = 0, \end{aligned} \tag{4.153}$$

cuja solução é:

$$N_{AB} = \frac{Fl}{b} = 16,26 \text{ kN} \quad \text{e} \quad N_{AC} = -\frac{FL}{b} = -16,0 \text{ kN}. \tag{4.154}$$

onde definiu-se $l = \sqrt{b^2 + L^2} = 8{,}139$ m como o comprimento da barra AB. A variação de comprimento de cada barra é

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= \frac{N_{AB} l}{EA} = \frac{162.800 \times 8.139}{252 \cdot 10^6} = 2,5238 \text{ mm}, \\ \delta_{AC} &= \frac{N_{AC} L}{EA} = \frac{-160.000 \times 8.000}{252 \cdot 10^6} = -2,438 \text{ mm}, \end{aligned} \tag{4.155}$$

onde $EA = 210.000 \times 2.500 = 252 \cdot 10^6$ N. A Figura 4.45 ilustra a configuração deformada, sem escala. Consideremos a posição deformada P da rótula A, que fica localizada na coordenada (x_p, y_p). As coordenadas de P podem ser obtidas por cálculo vetorial. Assim definimos os vetores posição dos pontos A, B, C e P com coordenadas $\mathbf{A} = (b, L)$, $\mathbf{B} = (0, 0)$, $\mathbf{C} = (b, 0)$ e $\mathbf{P} = (x_p, y_p)$. Então, os vetores entre os pontos B e P e entre C e P possuem componentes

$$\begin{aligned} \text{vetor } \overrightarrow{\text{BP}} &= \mathbf{P} - \mathbf{B} = (x_p, y_p) - (0, 0), \\ \text{vetor } \overrightarrow{\text{CP}} &= \mathbf{P} - \mathbf{C} = (x_p, y_p) - (b, 0). \end{aligned} \tag{4.156}$$

Os comprimentos de cada barra deformada são os módulos desses vetores:

$$\begin{aligned} d_{PB} &= \left\| \overrightarrow{\text{BP}} \right\| = l + \delta_{AB} = 8.139 + 2,5238 = 8.141.93 \text{ mm}, \\ d_{PC} &= \left\| \overrightarrow{\text{CP}} \right\| = L + \delta_{AC} = 8.000 - 2,438 = 7.997,56 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.157}$$

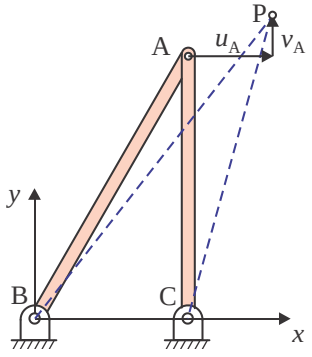


Figura 4.45: Configuração deformada da estrutura do Exemplo 12.

Ao mesmo tempo, os comprimentos deformados são relacionados com as coordenadas dos vetores:

$$\begin{aligned} d_{PB} &= \left\| \overrightarrow{\text{BP}} \right\| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = l + \delta_{AB} = 8.141,93 \text{ mm}, \\ d_{PC} &= \left\| \overrightarrow{\text{CP}} \right\| = \sqrt{(x_p - b)^2 + y_p^2} = L + \delta_{AC} = 7.997,56 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.158}$$

Esse é um sistema de duas equações e duas incógnitas, as coordenadas (x_p, y_p), cuja solução é

$$x_p = \frac{b^2 + d_{PB}^2 - d_{PC}^2}{2b} = 1.526,7 \text{ mm} \qquad \text{e} \qquad y_p = \sqrt{d_{PB}^2 - x_p^2} = 7.997,52 \text{ mm}. \tag{4.159}$$

As componentes do deslocamento do ponto A são obtidas determinando o vetor deslocamento $\mathbf{u}_A = \mathbf{P} - \mathbf{A}$:

$$u_A = x_p - b = 26,698 \text{ mm} \qquad \text{e} \qquad v_A = y_p - L = -2,438 \text{ mm}. \tag{4.160}$$

Observamos que o procedimento usado é viável em estruturas muito simples como aquela ilustrada no exemplo, entretanto seria inviável em qualquer situação mais complexa. Esse mesmo problema é resolvido no Capítulo 14, página 525 de forma muito mais elegante e versátil, usando Mecânica Lagrangeana (métodos de energia). Finalmente, o Método de Elementos Finitos é o que possui toda a flexibilidade para tratar de problemas de geometria arbitrária e complexa, e sua aplicação em treliças é detalhada no Capítulo 15.

4.9.2 Problemas hiperestáticos

Até esse ponto nos restringimos apenas a **problemas isostáticos**. São problemas em que o número de reações do problema é igual ao número de equações globais de equilíbrio não triviais. Essa situação permite o uso da sequência de cálculo usada até esse ponto, que consiste nas seguintes etapas em **problemas isostáticos**:

1. Determinação das reações nos apoios usando as equações globais de equilíbrio;
2. Determinação dos esforços internos em cada região, usando o método das seções e aplicando as condições e equilíbrio de uma parte do corpo;
3. Determinação das tensões em cada ponto de interesse;
4. Determinação dos deslocamentos em pontos de interesse.

Entretanto, a maioria quase total das estruturas em engenharia possuem mais apoios que o mínimo necessário para a imobilização de todos os seus possíveis **movimentos de corpo rígido**. Como cada apoio oferece uma força de reação, tem-se que o número de reações a serem determinadas é sempre superior ao número de equações globais de equilíbrio. Lembremos que um corpo possui, no máximo, 6 equações de equilíbrio global (3 equações de equilíbrio de forças e 3 de momentos), que correspondem aos 6 possíveis movimentos de corpo rígido (três componentes de deslocamento de translação e 3 de rotação). Assim, a regra é que quase todos os problemas reais são hiperestáticos. Como existem mais incógnitas que equações estáticas disponíveis, a solução dos problemas exige o ajuntamento dos demais grupos gerais de equações da Mecânica dos Sólidos, i.e., as **relações cinemáticas e constitutivas**, formando um sistema de equações maior, com mais incógnitas, que deve ser resolvido simultaneamente para determinar o comportamento da estrutura.

A sequência de cálculo para **problemas hiperestáticos** de elementos estruturais como barras e vigas é a seguinte:

1. Identificar o número de vínculos redundantes r, que é a diferença entre o número de reações incógnitas e o de equações globais de equilíbrio não triviais;
2. **Gerar um problema auxiliar isostático**. Nesse problema, todos os dados são idênticos aos do problema original (mesma geometria, material e carregamento), porém uma quantidade r de apoios é removido, e cada um é substituído por uma força distinta f_j, $j = 1, ..., r$, a ser determinada. O problema auxiliar se torna isostático. Note que aqui, um denominamos **um apoio** a uma vinculação que restringe o movimento em uma única direção. Um engaste, por exemplo, contém 6 apoios, um em cada direção de translação e rotação.
3. Determinar as reações nos apoios remanescentes do problema auxiliar em termos das forças f_j.
4. Determinar os esforços internos em cada trecho, usando o método das seções da maneira usual. Esses esforços são obtidos em termos das forças f_j.

5. Determinar as expressões dos deslocamentos nos apoios eliminados na etapa 1. Esses deslocamentos estarão em termos das forças f_j.

6. Determinar os valores de f_j que tornam os deslocamentos da etapa 5 nulos. Esses serão os valores das reações no problema original.

7. Determinar as demais reações do problema original usando as equações globais de equilíbrio;

8. Determinar as tensões e deslocamentos da maneira usual.

Exemplo 4.12 – Barra biengastada - problema hiperestático

Consideremos uma barra engastada nas duas extremidades, sob uma força concentrada na seção B como na Figura 4.46a. Determinar as reações e o deslocamento sofrido pela seção B. Os trechos AB e BC tem comprimentos $L_1 = 100$ mm e $L_2 = 150$ mm. A área de seção transversal é uniforme $A = 800$ mm^2. A força aplicada é F_B =20kN. O material é alumínio, com $E = 70$ GPa.

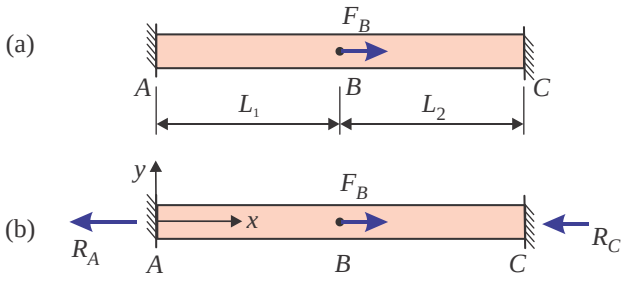


Figura 4.46: Barra bi engastada de seção uniforme do Exemplo 13.

Solução:
Como visto na Figura 4.46b, temos duas reações nos apoios, de forma que o problema é hiperestático. Assim, não é possível a análise mecânica usando apenas as equações de equilíbrio. Torna-se necessária a incorporação de equações adicionais provenientes dos demais grupos gerais de equações da Mecânica dos Sólidos, i.e., as relações cinemáticas e constitutivas, formando um sistema de equações maior, com mais incógnitas, que deve ser resolvido simultaneamente para determinar o comportamento da estrutura.

Inicialmente, identificamos a única equação de equilíbrio global não trivial:

$$\sum F_x \rightarrow \qquad R_A - F_B + R_C = 0. \tag{4.161}$$

O procedimento para determinar as reações consiste em **gerar um problema auxiliar isostático**. Nesse problema, todos os dados são idênticos aos do problema original, porém um dos apoios é removido, e substituído por uma força. Essa força é considerada momentaneamente conhecida. Dessa forma, o problema auxiliar se torna aparentemente isostático, e a reação no apoio remanescente pode ser determinada. Esse procedimento é geral, e pode ser usado em problemas com maior quantidade de reações. Por exemplo, se o problema possui 3 reações de apoios e apenas uma equação não trivial de equilíbrio global, geramos o problema auxiliar removendo dois dos apoios e aplicamos nas respectivas posições forças consideradas como conhecidas.

No presente caso, temos na Figura 4.47 o problema auxiliar, em que o apoio C foi eliminado, sendo aplicado ali uma força f. Dessa forma, a barra passa a estar submetida às forças F_B e f, e haverá uma reação f_A. A reação é

$$f_A = F_B - f. \tag{4.162}$$

Os esforços em cada trecho são constantes, e podem ser obtidos em termos de f através do método das seções, o que resulta em:

$$N_{AB} = f_A = F_B - f \qquad \text{e} \qquad N_{BC} = -f. \tag{4.163}$$

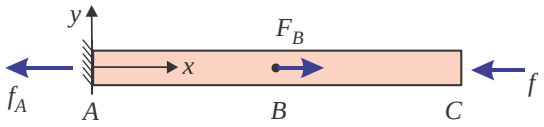


Figura 4.47: Barra com a extremidade C liberada.

Agora usamos as relações cinemáticas na forma da relação entre as variações de deslocamentos e os esforços. O deslocamento da seção C em relação ao da seção A é dado pela soma das variações de comprimentos dos trechos AB e BC, obtidas aplicando (4.123):

$$\begin{aligned} u_C - u_A &= u_{BA} - u_{CB}, \\ u_C &= u_A + \frac{N_{AB}L_1}{EA} + \frac{N_{BC}L_2}{EA}, \\ &= 0 + \frac{(F_B - f)L_1}{EA} + \frac{(-f)L_2}{EA}. \end{aligned} \tag{4.164}$$

A terceira relação a ser usada é uma **condição de compatibilidade geométrica**, entre o problema auxiliar e o original. A relação (4.164) produz o deslocamento na seção C para qualquer valor de f. Entretanto, desejamos identificar o particular valor de f que faz $u_C = 0$. Esse valor de f corresponde exatamente à reação R_C do problema original. Assim,

$$u_C = \frac{(F_B - f)L_1}{EA} + \frac{(-f)L_2}{EA} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f = \frac{F_B L_1}{L} = R_C} \tag{4.165}$$

onde $L = L_1 + L_2$ é o comprimento total da barra. Obtida essa reação, a outra vem do equilíbrio global (4.161): $R_A = F_B L_2/L$. Uma vez determinadas as reações, os esforços ficam totalmente determinados, $N_{AB} = F_B L_2/L$ e $N_{BC} = -F_B L_1/L$. Assim o deslocamento da seção B é simplesmente a variação de comprimento do trecho AB, uma vez que a seção A está engastada:

$$\begin{aligned} u_B - u_A &= u_{BA}, \\ u_B &= u_A + \frac{N_{AB}L_1}{EA} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad u_B = \frac{F_B L_2}{EA}. \tag{4.166}$$

Exemplo 4.13 – Barra suportada por três colunas

Considere o bloco ABC apoiado por três colunas, 1, 2 e 3, e suportando uma carga distribuída uniforme q, como na Figura 4.48**.** O bloco pode ser considerado absolutamente rígido e sem peso. Determine as reações em cada apoio das colunas e as tensões normais médias. As colunas tem módulos de elasticidade E_1, E_2 e E_3 respectivamente, áreas de seção transversal A_1, A_2 e A_3, tensões de início de escoamento σ_{E1}, σ_{E2} e σ_{E3} e idênticos comprimentos L. As colunas encontram-se igualmente espaçadas com distância a.

Obtenha as equações de forma analítica e calcule os valores para $A_1 = A_2 = 2.500$ mm^2, $A_3 = 1.000$ mm^2, $L = 4$ m, $a = 5$ m, $E_1 = E_2 = E_3 = 200$ GPa, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = \sigma_{E3} = 350$ GPa, $q = 100$ N/m.

Solução:

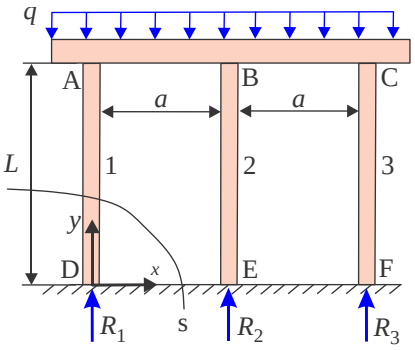


Figura 4.48: Estrutura hiperestática do Exemplo 13.

Esse é um problema hiperestático, como pode ser visto pelo número de reações na Figura 4.48. As equações globais de equilíbrio são

$$\begin{aligned} \sum F_y \quad &\rightarrow \quad R_1 + R_2 + R_3 = F, \\ \sum M_z^A \quad &\rightarrow \quad R2a + R_3 2a = Fa, \end{aligned} \tag{4.167}$$

onde $F = 2qa$ é força resultante da carga distribuída. Como são três reações e apenas duas equações de equilíbrio não triviais, precisamos de uma equação adicional, que será construída para garantir a compatibilidade geométrica na configuração deformada. Essa relação de compatibilidade, no presente caso, é a condição que as reações devem ser tais que as deformações em cada coluna permitam a barra ABC deslocar-se verticalmente, porem mantendo-se reta, como ilustrado na Figura 4.49.

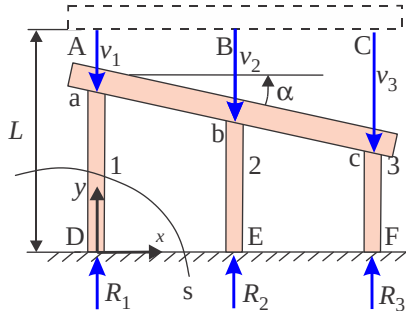


Figura 4.49: Deslocamentos nas barras e configuração deformada.

Essa condição pode ser representada, para pequenos deslocamentos e rotações, por

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{v_3 - v_1}{2a}. \tag{4.168}$$

Os esforços internos em cada coluna podem ser obtidos pelo método das seções. Por exemplo, fazendo um corte s_1 na coluna 1, como na Figura 4.49a, temos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.49b. Por equilíbrio temos $N_1 = R_1$. De forma similar, $N_2 = R_2$ e $N_3 = R_3$.

Podemos usar o valor absoluto dos elongamentos em cada coluna, pois no problema sabemos que o deslocamento das extremidades A, B e C serão no sentido negativo de y. Então, os valores absolutos dos elongamentos são dados em termos dos esforços por

$$v_1 = \frac{|N_1|\, L}{E_1 A_1}, \qquad v_2 = \frac{|N_2|\, L}{E_2 A_2}, \qquad v_3 = \frac{|N_3|\, L}{E_3 A_3}. \tag{4.169}$$

Isto significa que

$$v_1 = \frac{R_1 L}{E_1 A_1}, \qquad v_2 = \frac{R_2 L}{E_2 A_2}, \qquad v_3 = \frac{R_3 L}{E_3 A_3}. \tag{4.170}$$

Levando essas expressões à segunda igualdade de (4.168), temos a equação adicional às duas (4.167):

$$v_2 - v_1 = \frac{v_3 - v_1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{2v_2 = v_1 + v_3} \tag{4.171}$$

Substituindo os deslocamentos de (4.170), temos

$$2\frac{R_2 L}{E_2 A_2} = \frac{R_1 L}{E_1 A_1} + \frac{R_3 L}{E_3 A_3}, \tag{4.172}$$

que junto às equações de equilíbrio (4.167), permitem determinar as três reações:

$$R_1 = R_3 = \frac{2F}{c_1 + c_3 + 4}, \quad R_2 = \frac{(c_1 + c_3)R_1}{2}, \quad \text{onde } c_1 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \text{ e } c_3 = \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}. \tag{4.173}$$

Substituindo os valores numéricos do exemplo, obtemos $F = 2qa = 10^8$ N, $c_1 = 1$, $c_3 = 2{,}5$, e

$$R_1 = R_3 = 2,67 \cdot 10^5 \text{ N}, \quad R_2 = 1.000 \text{ kN}. \tag{4.174}$$

Note que, como as três colunas não possuem a mesma rigidez, as reações nos apoios são distintos de $F/3$. As tensões normais médias nas colunas e os coeficientes de segurança quanto ao início de escoamento são:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = -106,7 \text{ MPa}, & \sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = -186,7 \text{ MPa}, & \sigma_3 = \dfrac{N_3}{A_3} = -267 \text{ MPa} \\ n_1 = \dfrac{\sigma_{E1}}{|\sigma_1|} = 3,28, & n_2 = \dfrac{\sigma_{E2}}{|\sigma_2|} = 1,88, & n_3 = \dfrac{\sigma_{E3}}{|\sigma_3|} = 1,31. \end{array} \tag{4.175}$$

Logo, o coeficiente de segurança da estrutura é $n = 1,31$, definido pela coluna 3. Os valores absolutos dos elongamentos nas colunas são

$$v_1 = \frac{R_1 L}{E_1 A_1} = 2,13 \text{ mm}, \qquad v_2 = \frac{R_2 L}{E_2 A_2} = 3,73 \text{ mm}, \qquad v_3 = \frac{R_3 L}{E_3 A_3} = 5,33 \text{ mm}. \tag{4.176}$$

Note que as condições de compatibilidade geométrica, eqs.(4.168), são satisfeitas, com $\alpha = 32 \cdot 10^{-5}$rad.

Exemplo 4.13.1 – Modelo simplificado de caminhão

Consider o modelo estilizado de um caminhão de três eixos, como mostrado na Figura 4.50. Ali aparecem apenas um chassi, considerado absolutamente rígido em flexão, uma cabine com a unidade motríz, e uma carroceria. As cargas P_1, P_2 e P_3 indicadas são aplicadas nos respectivos centróides. Da suspensão, consideramos nesse ponto apenas as molas, de tipo linear, de constantes k_A, k_B e k_C. Estime as reações nos apoios A, B e C, e os deslocamentos verticais do chassi nos pontos de montagem das molas. Considere duas situações:

1. O caminhão descarregado, i.e., sem a carga útil P_2.
2. O caminhão com carga útil P_2.

Utilize os valores: $P_1 = 8$ kN, $P_2 = 30$ kN e $P_3 = 8$ kN, $a = 4$ m, $b = d = g = i = 1$ m, $c = 3$ m, $k_A = 1,533$ kN/mm, $k_B = k_C = 0,8k_A$.

Solução:

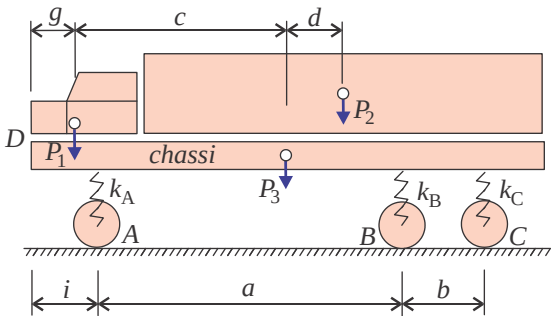


Figura 4.50: Modelo estilizado de caminhão de três eixos.

Consideramos o diagrama de corpo livre do chassi na Figura 4.51, com a indicação das reações nas rodas, R_A, R_B e R_C. O deslocamento dos pontos do chassi em contato com cada uma das molas são v_A, v_B e v_C. Nota-se que esses deslocamentos são convencionados positivos se forem para baixo. Essas são as seis incógnitas do problema, que é hiperestático. As seis equações governantes do problema são:

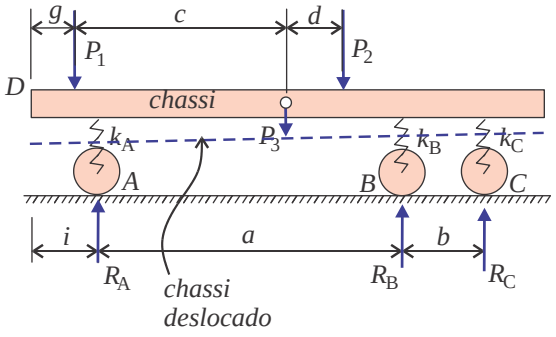


Figura 4.51: Diagrama de corpo livre do chassi.

1. Equilíbrio de forças verticais:
$$R_A + R_B + R_C = P_T; \tag{4.177}$$
onde $P_T = P_1 + P_2 + P_3$ é a carga total aplicada.

2. Equilíbrio de momentos em relação ao ponto D na extremidade esquerda do chassi:
$$R_A i + R_B(i+a) + R_C(i+a+b) = \underbrace{P_1 g + P_2(g+c+d) + P_3(g+c)}_{m}; \tag{4.178}$$

3. Compatibilidade geométrica, com a condição que o chassi é indeformavel (permanece reto). Sua inclinação α é tal que:
$$\tan\alpha = \frac{v_B - v_A,}{a} = \frac{v_C - v_A,}{a}; \tag{4.179}$$

4. Relações constitutivas, em que as relações força $\times$ deflexão em cada mola são:
$$R_A = k_A v_A, \qquad R_B = k_B v_B, \qquad R_C = k_C v_C; \tag{4.180}$$

Esse sistema de seis equações pode ser resolvido de forma mais facil reescrevendo as equações num sistema algébrico na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & i+a & i+a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{a+b} & 1 & \frac{-a}{a+b} \\ 1 & 0 & 0 & -k_A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k_B & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_T \\ m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.181}$$

A solução do sistema algébrico gera diretamente a solução do problema. Para os dois enunciados se obtém:

- Caso sem carga útil, se tem $\alpha = -0,170°$ e (em kN e mm):

$$R_A = 10,5, R_B = 3,37,\ R_C = 2,11, \qquad v_A = 19,7,\ v_B = 7,89\ ,\ v_C = 4,93.$$

- Caso com carga útil, se tem $\alpha = 0,0483°$ e (em kN e mm):

$$R_A = 14,1, R_B = 15,4,\ R_C = 16,5, \qquad v_A = 9,21,\ v_B = 12,6\ ,\ v_C = 13,4.$$

Exemplo 4.14 – Barra bimetal - problema hiperestático

Consideremos uma barra constituída por três camadas de seção retangular, como na Figura 4.52 duas externas de alumínio e uma interna de aço. Elas são engastadas numa extremidade e unidas entre si na outra, de forma que, quando o conjunto é submetido a uma força axial F, as três camadas se elongam no mesmo valor. (a) Determine uma relação analítica entre F e o elongamento da barra. (b) Determine o valor da força F_E que leva a barra ao início do escoamento, e identifique em qual camada ela ocorreria. (c) Determine as tensões em cada camada para F_E. Construa um diagrama tensão-deformação para ambas as camadas. Use os valores: $L = 1$ m, $E_{aco} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa, $A_{aco} = 100$ mm^2, $A_{al} = 40$ mm^2.

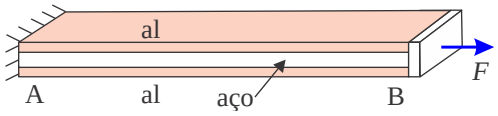


Figura 4.52: Barra bimetal - deformação axial elastoplástica.

Solução:
(a) Esse é um problema hiperelástico, como pode ser visto pelas duas reações no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.53a. A equação global de equilíbrio é

$$\sum F_x \ \rightarrow \ \ 2R_{al} + R_{aco} = F. \tag{4.182}$$

Como etapa da solução de problemas hiperestáticos, removemos o apoio em uma das camadas, por exemplo na parte de aço. Assim, temos a reação na parte de alumínio:

$$R_{al} = \frac{F - R_{aco}}{2}. \tag{4.183}$$

Os esforços em cada camada são obtidos do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 4.53b:

$$N_{aco} = R_{aco} \qquad \text{e} \qquad N_{al} = R_{al}. \tag{4.184}$$

As variações de comprimento de cada camada são:

$$\delta_{aco} = \frac{N_{aco}L}{E_{aco}A_{aco}} = \frac{R_{aco}L}{E_{aco}A_{aco}}, \qquad \delta_{al} = \frac{N_{al}L}{E_{al}A_{al}} = \frac{(F - R_{aco})L}{E_{al}A_{al}}. \tag{4.185}$$

Em seguida usamos uma condição de compatibilidade geométrica, que no presente problema é a condição que todas as camadas devem sofrer os mesmos elongamentos. Incorporando também a condição de equilíbrio

$$\delta_{aco} = \delta_{al} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_{aco}L}{E_{aco}A_{aco}} = \frac{(F - R_{aco})L}{2E_{al}A_{al}} \tag{4.186}$$

Essa é uma equação que pode ser usada para determinar a única incógnita, a reação R_{aco}:

$$\boxed{R_{aco} = \frac{F}{1+c} \qquad \text{e} \qquad R_{al} = \frac{F - R_{aco}}{2} = \frac{cF}{2(1+c)} \qquad \text{onde} \qquad c = \frac{2E_{al}A_{al}}{E_{aco}A_{aco}}} \tag{4.187}$$

Os elongamentos e deformações são idênticas em ambas as camadas:

$$\delta = \delta_{aco} = \delta_{al} = \frac{R_{aco}L}{E_{aco}A_{aco}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{R_{aco}}{E_{aco}A_{aco}} = \frac{R_{al}}{E_{al}A_{al}}. \tag{4.188}$$

As tensões normais em cada camada são:

$$\sigma_{xaco} = E_{aco}\varepsilon_x = \frac{R_{aco}}{A_{aco}} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{xal} = E_{al}\varepsilon_x = \frac{R_{al}}{A_{al}}. \tag{4.189}$$

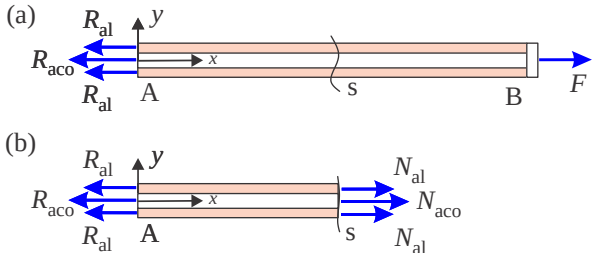


Figura 4.53: (a) Diagrama de corpo livre com as reações em cada camada; (b) esforços em cada camada.

(b) Entretanto, deve-se notar que o cálculo foi realizado com o uso de equações que pressupõem ambos os materiais solicitados dentro de suas faixas elástico-lineares, i.e., utilizaram a lei de Hooke. Assim, buscaremos o valor da força axial F_E que leva a barra ao início do escoamento. Deve-se ter em cada camada as tensões limitadas da seguinte forma:

$$\sigma_{xaco} = \frac{R_{aco}}{A_{aco}} \leq \sigma_{Eaco} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{xal} = \frac{R_{al}}{A_{al}} \leq \sigma_{Eal}. \tag{4.190}$$

Tomando as reações em (4.187),

$$\begin{aligned} R_{aco} \leq A_{aco}\sigma_{Eaco} \quad &\rightarrow \frac{F_E}{1+c} \leq A_{aco}\sigma_{Eaco}, \\ R_{al} \leq A_{al}\sigma_{Eal} \quad &\rightarrow \frac{cF_E}{2(1+c)} \leq A_{al}\sigma_{Eal} \end{aligned} \tag{4.191}$$

Então, a máxima força F_E possível de ser aplicada mantendo todas as camadas elásticas é o valor que satisfaz ambas as desigualdades, i.e.:

$$F_E \leq (1+c)A_{aco}\sigma_{Eaco} = c_{aco} \qquad \text{e} \qquad F_E \leq \frac{2(1+c)A_{al}\sigma_{Eal}}{c} = c_{al}. \tag{4.192}$$

Para os valores numéricos do exemplo, obtemos

$$c = \frac{2E_{al}A_{al}}{E_{aco}A_{aco}} = \frac{2 \times 70 \times 40}{200 \times 100} = 0,280, \\ c_{aco} = 44.800 \text{ N} \quad \text{e} \quad c_{al} = 91.400 \text{ N}. \tag{4.193}$$

Logo, o valor que leva ao início da plastificação na barra é $F_E = 44,8$ kN, sendo que a camada de aço começa a escoar antes das de alumínio. Nessa carga, cada camada suporta os esforços internos:

$$R_{aco} = \frac{F_E}{1+c} = 35 \text{ kN} \qquad \text{e} \qquad R_{al} = \frac{F_E - R_{aco}}{2} = 4,9 \text{ kN}. \tag{4.194}$$

(c) As tensões são $\sigma_{xaco} = 350$ MPa e $\sigma_{xal} = 122,5$ MPa. Nota-se que a parte de aço suporta a maior parte da carga, devido ao seu maior módulo de elasticidade em relação ao alumínio, e à sua maior área de seção transversal.

As deformações em cada camada são idênticas,

$$\varepsilon_{xaco} = \frac{\sigma_{xaco}}{E_{aco}} = \frac{350}{200.000} = 0,175 \ \%, \\ \varepsilon_{xal} = \frac{\sigma_{xal}}{E_{al}} = \frac{122,5}{70.000} = 0,175 \ \%, \tag{4.195}$$

tanto quanto os elongamentos: $\delta_{aco} = \delta_{al} = L\varepsilon_{xaco} = 1,75$ mm. Nota-se que essa deformação é pequena o suficiente para justificar o uso das teoria cinemática usada (teoria de pequenas deformações).

As deformações de início de escoamento para cada material são

$$\varepsilon_{Eaco} = \frac{\sigma_{Eaco}}{E_{aco}} = 0,175 \ \% \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_{Eal} = \frac{\sigma_{Eal}}{E_{al}} = 0,0,357 \ \%. \tag{4.196}$$

A Figura 4.54 mostra o diagrama tensão-deformação de ambos os materiais e tensões para a força $F_E = 44,8$ kN aplicada na barra, que inicia a plastificação na camada de aço.

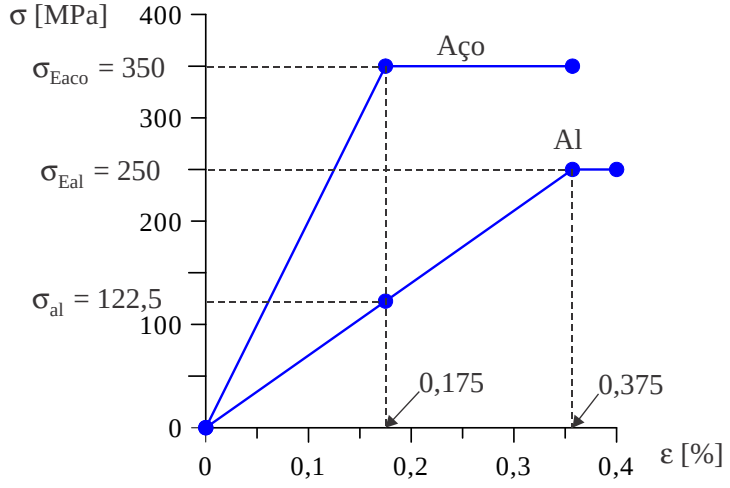


Figura 4.54: Diagrama tensão-deformação de ambos os materiais e tensões para a força $F_E = 44,8$ kN no Exemplo 14.

Exemplo 4.15 – Barra bimetal - problema não linear elastoplástico

Considere a barra bimetal de aço-alumínio do Exemplo 14, mostrada na Figura 4.52. Considere os diagramas tensão-deformação de cada material, idealizados com **materiais elastoplásticos ideais**,

como na Figura 4.54, i.e., idealizações em que se desconsidera o encruamento do material após o início do escoamento. Determine a deformação da barra, seu elongamento e as tensões em cada camada, para uma força axial $F = 50$ kN. Note que essa força é superior à força $F_E = 44,8$ kN que inicia a plastificação na camada de aço, deixando ainda a camada de alumínio elástica. Elabore o diagrama força-deslocamento da barra.

Solução:

Uma vez que a força aplicada é superior àquela de início do escoamento na camada de aço, o problema como um todo se torna **não linear**. Problemas não lineares, como regra geral, não podem ser resolvidos em uma única etapa; em vez disso, usam-se *métodos incrementais* e, frequentemente, *iterativos*. No presente problema, devido à sua simplicidade, não precisaremos utilizar iterações, mas apenas separando a carga total $F = 50$ kN em incrementos menores, definidos de tal forma, que a solução seja linear em cada incremento. Isso será detalhado a seguir.

Incremento 2.Quando observamos os resultados do Exemplo 14, vemos que, para $F = F_E = 44,8$ kN, a camada de aço inicia o escoamento, porém as de alumínio ainda estão elásticas. Como estamos usando modelos de materiais considerados sem encruamento, se aumentarmos a carga em um incremento ΔF acima de F_E, a camada de aço não poderá aumentar sua tensão, que permanece igual a $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa. Então, a parcela de força suportada pela camada de aço permanece constante, igual a $R_{aco} = 35$ MPa, com deformação do conjunto $\varepsilon_{Eaco} = \varepsilon_{Eal} = 0,175$ % e elongamento $\delta_{aco} = \delta_{al} = 1,75$ mm. Então, o diagrama força-deslocamento possui o primeiro trecho definido, uma reta da origem ao ponto 1, de coordenadas $(F_1; \delta_1) = (44.8$ kN;1,75 mm), mostrado na Figura 4.55.

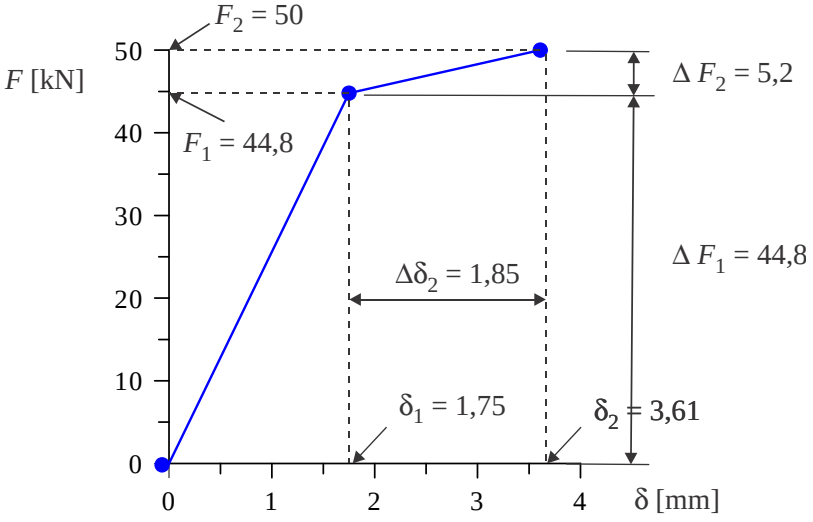


Figura 4.55: Diagrama força-deslocamento do Exemplo 15.

Incremento 2. Buscamos em seguida o segundo trecho do carregamento, do ponto 1 ao 2, de coordenadas $(F_2; \delta_2)$, sendo $F_2 = F = 50$ kN. Assim, o segundo incremento de Exemplo força é $\Delta F_2 = F_2 - F_1 = 50 - 44.8 = 5,2$ kN, e buscamos $\Delta\delta_2 = \delta_2 - \delta_1$. Esse incremento deve ser linear.

O incremento ΔF_2 deve ser suportado completamente pelas duas camadas de alumínio, gerando incrementos de tensão e de deformação dados por

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{al} &= \frac{\Delta F_2}{2A_{al}} = \frac{5.200}{2 \times 40} = 65 \text{ MPa}, \\ \Delta\varepsilon_{al} &= \frac{\Delta\sigma_{al}}{E_{al}} = 9,286 \cdot 10^{-4} \qquad \text{e} \qquad \Delta\delta_{al} = L\Delta\varepsilon_{al} = 1,857 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.197}$$

Os incrementos de deformação e do elongamento para a camada de aço são os mesmos da camada de alumínio. Então, para a barra como um todo, temos: $(\Delta F_2; \Delta\delta_2) = (5,2$ kN; 1,857 mm). Os valores das coordenadas do ponto 2 são

$$\begin{aligned} F_2 &= F_E + \Delta F_2 = 44,8 + 5,2 = 50 \text{ kN}, \\ \delta_2 &= \delta_1 + \Delta\delta_2 = 1,75 + 0,927 = 2,679 \text{ mm}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_{al} = 0,175 + 0,0929 = 0,268 \text{ \%}, \\ \sigma_{al2} &= \sigma_{al}1 + \Delta\sigma_{al} = 122,5 + 65 = 187,5 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{4.198}$$

Nota-se que a tensão final no alumínio, $\sigma_{al2} = 187,5$ MPa, é inferior à tensão no início do escoamento, de forma que os cálculos lineares no segundo incremento são válidas. O diagrama tensão-deformação para cada material é mostrado na Figura 4.56. Nota-se claramente o comportamento não linear. As parcelas de força suportadas por cada camada são:

$$\begin{aligned} F_{aco} &= F_{aco1} = A_{aco}\sigma_{Eaco} = 350 \times 100 = 35 \text{ kN}, \\ F_{al} &= F_{al1} + \Delta F_2 = 4,9 + 5,2/2 = 7,5 \text{ kN}. \end{aligned} \tag{4.199}$$

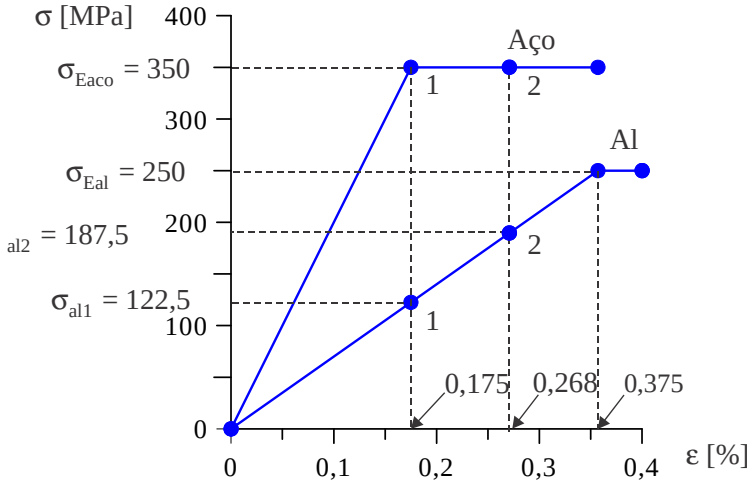


Figura 4.56: Diagramas tensão-deformação para o bimetal do exemplo.

A Figura 4.55 mostra o diagrama força-elongamento da barra até a carga máxima aplicada, F = 50 MPa.

Exemplo 4.16 – Problema térmico hiperestático

Considere uma barra reta de comprimento inicial L_0 e seção transversal retangular com dimensões $b_0 \times h_0$, com as extremidades montadas em suportes considerados absolutamente rígidos, como na Figura 4.57. A montagem é feita a uma temperatura ambiente de $T_0 = 20°$C. O material é aço, com coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11{,}7{\cdot}10^{-6}/°$C. (**a**) Determine a tensão axial na barra quando a temperatura é modificada para $T = 50\ °C$. (**b**) quais as forças aplicadas nos apoios? (**c**) Qual a variação das dimensões transversais? Use os valores $L_0 = 200$ mm, $b_0 \times h_0 = 10{\times}20$ mm^2, $E = 200$ GPa.

Solução:

Um incremento de temperatura acima de T_0 como na Figura 4.57b gera tensões axiais de resultante R, e deformações nas direções transversais. Uma vez que o problema é linear, obteremos a solução decompondo o campo de deformações em duas partes: uma devida à temperatura e outra devida à restrição mecânica do apoio.

(**a**) Como o incremento de temperatura, $\Delta T = T - T_0 = 30°$C, é positivo, a barra tenderia a se expandir se estivesse desvinculada. Uma vez que os vínculos impedem essa deformação, se prevê o

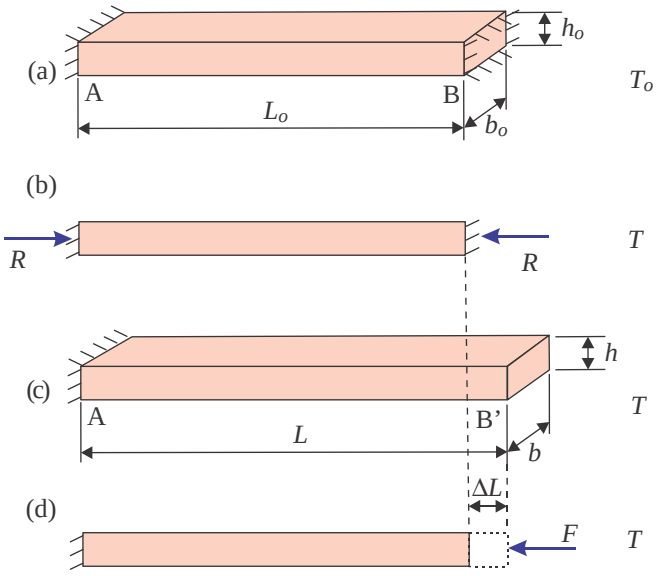


Figura 4.57: (a) Barra bimetal biengastada; (b) reações devido ao efeito térmico; (c) dilatação térmica; (d) separação das deformações mecânica e térmica.

surgimento de forças de reação nos apoios, como na Figura 4.57b. Nota-se que esse é um **problema hiperestático**, de forma que precisamos equações adicionais, as constitutivas e as cinemáticas. O procedimento comum em problemas desse tipo, termomecânicos lineares, é dividir o problema em duas etapas.

Na **primeira etapa** definimos um problema auxiliar, removendo um dos apoios, como na Figura 4.57c. Se aplicarmos o incremento de temperatura, a deformação média e o elongamento podem ser obtidos por (4.65) e (4.66):

$$\varepsilon_x^t = \alpha\Delta T = 3,51\cdot 10^{-4}, \qquad \text{e} \qquad \Delta L = \varepsilon_x^t L_0 = 0,0702 \text{ mm}. \tag{4.200}$$

A **segunda etapa** do procedimento de cálculo consiste em aplicar uma força compressiva na extremidade B, como na Figura 4.57d. O deslocamento sofrido pela extremidade B, devido a F, em módulo, é

$$v_B = \frac{FL_0}{EA}, \tag{4.201}$$

onde A_0 é a área da seção transversal, $A_0 = b_0 h_0$. Se o valor de F for ajustado de forma que a barra retorne ao seu comprimento original, esse valor de F será a reação R do problema térmico original. Temos então a relação

$$\Delta L = v_B \quad \rightarrow \quad \alpha\Delta T L_0 = \frac{RL_0}{EA_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{R = \alpha\Delta T E A_0}. \tag{4.202}$$

Logo, se tem o valor numérico $R = 14$ kN.

(**b**) A tensão normal média devida à temperatura pode ser obtida por $\sigma^t = R/A_0 = \alpha\Delta T E = 70{,}2$ MPa. Observe que a tensão nesse tipo de problema, uniaxial, independe do comprimento e da seção transversal, mesmo que a reação dependa de A_0.

(**c**) Para o cálculo da variação das dimensões transversais da barra, consideramos também as duas etapas de cálculo. Primeiro, a barra sem vínculo na extremidade B, sujeita apenas à variação de temperatura. As deformações transversais são devidas apenas à dilatação térmica:

$$\varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \varepsilon_x^t = \alpha\Delta T = 3,51\cdot 10^{-4}. \tag{4.203}$$

Então, as variações das seções transversais no problema desvinculado são

$$\begin{aligned} \Delta b^t &= \varepsilon_z^t b_0 = 3,51 \cdot 10^{-4} \times 10 = 3,51 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \\ \Delta h^t &= \varepsilon_y^t h_0 = 3,51 \cdot 10^{-4} \times 20 = 7,02 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.204}$$

Na segunda parte do problema, adicionamos os efeitos da força axial $R = -14$ kN. Como o problema é linear, podemos determinar os efeitos de R independentemente da temperatura. A variação na seção transversal depende apenas do efeito de Poisson, para R compressivo:

$$\varepsilon_y^R = \varepsilon_z^R = -v\varepsilon_x^R = -0,25 \times 3,51 \cdot 10^{-4} = 8,78 \cdot 10^{-5}. \tag{4.205}$$

Então, a variação da seção transversal puramente devida a R é

$$\Delta b^R = \varepsilon_z^R b_0 = 8,78 \cdot 10^{-4} \text{ mm}, \quad \text{e} \quad \Delta h^R = \varepsilon_y^R h_0 = 17,6 \cdot 10^{-4} \text{ mm}. \tag{4.206}$$

Com a **sobreposição dos efeitos** de temperatura e de R, temos as variações na seção transversal

$$\begin{aligned} \Delta b &= \Delta b^R + \Delta b^t = 8,78 \cdot 10^{-4} + 3,51 \cdot 10^{-3} = 4,39 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \\ \Delta h &= \Delta h^R + \Delta h^t = 17,6 \cdot 10^{-4} + 7,02 \cdot 10^{-3} = 8,78 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4.207}$$

4.10 Princípio de Saint-Venant e concentração de tensões

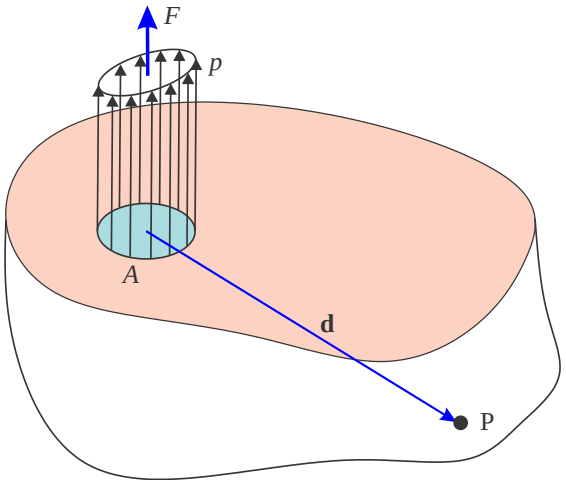


Figura 4.58: Ilustração do Princípio de St.-Venant. Carga distribuída p sobre a área A e sua resultante F.

Consideremos um corpo de geometria arbitrária, e uma carga distribuída p aplicada de forma distribuída sobre uma região de superfície de área A. Essa carga gera um estado de tensões em todos os pontos do corpo. Consideremos um ponto P situado a uma certa distância do centro da área A definido pelo vetor distância $\mathbf{d}$. O que se observa experimentalmente em soluções exatas do problema, mostra que

> o estado de tensões num ponto P se torna progressivamente mais insensível à forma como a carga p se distribui sobre a área A, conforme a distância $|\mathbf{d}|$ cresce, desde que a resultante F da carga seja a mesma, $F = \int_A p \, dA$.

Esse é o **Princípio de Saint-Venant** para estados de tensões em corpos sólidos. Por exemplo, a

carga uniforme p sobre a área A pode ser aplicada em diversas formas como na Figura 4.59 com a mesma resultante, $F = pA$. Nesse caso, o estado de tensões em pontos distantes de A no corpo serão aproximadamente os mesmos, para distâncias $|\mathbf{d}|$ suficientemente grandes. A diferença de valores cai assintoticamente com a distância.

Em termos práticos, diferenças no estado de tensões da ordem de 1% são obtidas para distâncias $|\mathbf{d}| > 10\sqrt{A}$. Praticamente, todas as análises de tensões realizadas em engenharia levam esse princípio em conta, de alguma forma, mesmo que não seja explicitamente mencionado.

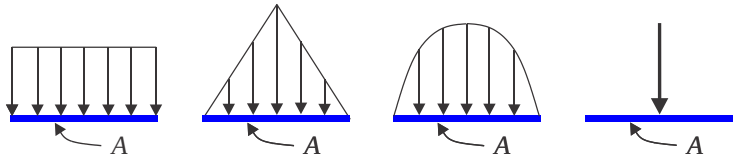


Figura 4.59: Diferentes formas que a carga distribuída pode assumir, com a mesma resultante.

4.10.1 Concentradores de tensão

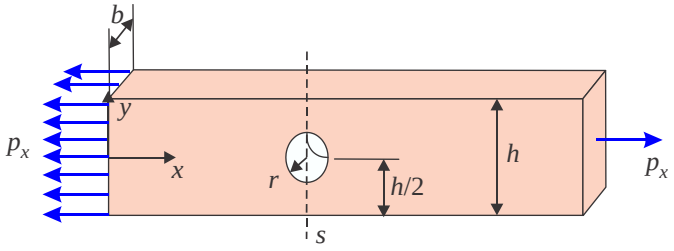


Figura 4.60: Barra de seção retangular com um furo centrado, sob tração.

Em todos os exemplos mostrados no livro até esse ponto, consideramos apenas elementos estruturais simples, como barras retas sob carga axial. Esses são os poucos casos em que o estado de tensão é tão simples que pode ser obtido por uma fórmula elementar do tipo $\sigma = F/A$, i.e., a tensão em cada ponto da barra é muito bem aproximada pelo valor médio da tensão na seção transversal.

Entretanto, na quase totalidade das geometrias de componentes estruturais, o estado de tensões não é uniforme ao longo de um dado segmento, o que inviabiliza o cálculo da tensão através de expressões simples. Consideremos o exemplo de uma barra de seção retangular com um furo centrado, sob tração, como na Figura 4.60. Podemos considerar que o carregamento seja p_x uniformemente distribuído nas extremidades, com resultante $R = p_x A$, onde $A = bh$ é a chamada **área plena**. Numa região da barra distante do furo, o estado de tensões é bem aproximado pelo valor médio $\bar{\sigma} = R/A \simeq p_x$. Entretanto, em pontos próximos ao furo, os valores de tensão são distintos ponto a ponto. Na seção transversal que contém o centro do furo, podemos fazer um corte s e construir um diagrama de corpo livre do lado esquerdo, como na Figura 4.61. Podemos calcular uma tensão média na **seção líquida** de área $A_0 = b(h - d)$, usando a resultante das forças internas $N_x = R$:

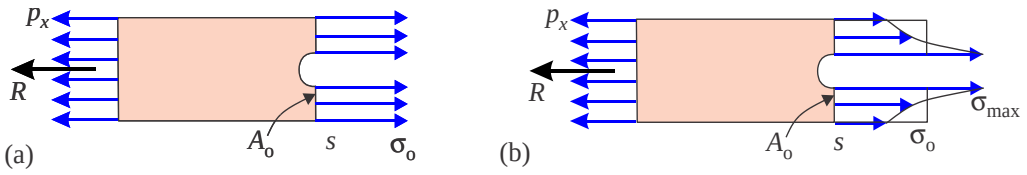


Figura 4.61: (a) tensões médias na seção transversal que passa pelo centro do furo; (b) distribuição real de tensões, com gradiente.

$$\sigma_0 = \frac{R}{A_0} = \frac{R}{b(h-d)}. \tag{4.208}$$

Note-se que, como $A_0 < A$, então a tensão média na seção líquida é maior que nas seções distantes do furo:

$$\sigma_0 = \frac{R}{A_0} > \frac{R}{A} = \bar{\sigma}. \tag{4.209}$$

Entretanto, a situação real é mais complexa que isso. De fato, a verdadeira distribuição de tensões σ_x na seção líquida não é uniforme, mas varia, i.e., é definida como uma função $\sigma_x = \sigma_x(y)$, sendo y o eixo a direção vertical da figura. A tensão σ_x varia de tal forma que seu valor máximo, $\sigma_{\max}$, ocorre na borda do furo, como ilustrado na Figura 4.61b. A função de σ_x sobre a superfície do corte s é tal que sua resultante é igual ao esforço resultante interno, i.e.:

$$\int_{A_0} \sigma_x dA = R. \tag{4.210}$$

Essa expressão não é suficiente para determinar a função $\sigma_x(y)$, e não há método simples de fazer sua determinação. Entretanto, em problemas elástico-lineares em materiais homogêneo-isotrópicos, diversos métodos analíticos e experimentais foram usados desde o final do século 19, que foram capazes de determinar a relação entre a tensão máxima $\sigma_{\max}$ e a tensão nominal σ_0. Essa relação é o **fator de concentração de tensões** K_t, que é definido por

$$\boxed{K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}} \tag{4.211}$$

σ_0 é a **tensão nominal**, e é calculada de forma a ignorar o efeito da concentração de tensões. As soluções exatas e experimentos mostram que, no regime elástico-linear, o valor de K_t tem as seguintes características:

1. $K_t \geq 1$, sendo que $K_t = 1$ ocorre apenas em ausência de entalhes.

2. Independe do valor do carregamento, depende apenas do tipo de carregamento atuando no componente, por exemplo se de tração, de flexão ou de torção.

3. Independe dos valores das propriedades elásticas.

4. Independe das dimensões do componente. Por exemplo, no caso da barra tracionada com furo centrado, da Figura 4.60 o valor de K_t não depende dos valores individuais de L, h e d. Entretanto, K_t depende das relações entre esses parâmetros geométricos. Por exemplo, para

   $$\frac{r}{d} = 0,5, \quad \text{onde } d = h - 2r,$$

   é provado que $K_t = 1,4$, não importando os valores individuais de r e de h, desde que sejam tais que $r/d = 0,5$.

Ao longo de décadas um grande conjunto de soluções de K_t foram desenvolvidas para diversos tipos dos componentes mais usados em engenharia, como barras com diversos tipos de **irregularidades geométricas** (furos, ranhuras, etc.) sob diversos tipos de carregamento (tração, flexão, torção). Em geral os resultados são apresentados na forma de gráficos como o da Figura 4.62. O Apêndice mostra um conjunto desses gráficos para as situações mais comuns em componentes de máquinas.

Uma vez que a geometria tenha sido determinada, com suas dimensões, um dos gráficos pode fornecer o valor de K_t. A análise do componente é feita calculando

$$\boxed{\sigma_{\max} = K_t \sigma_0} \tag{4.212}$$

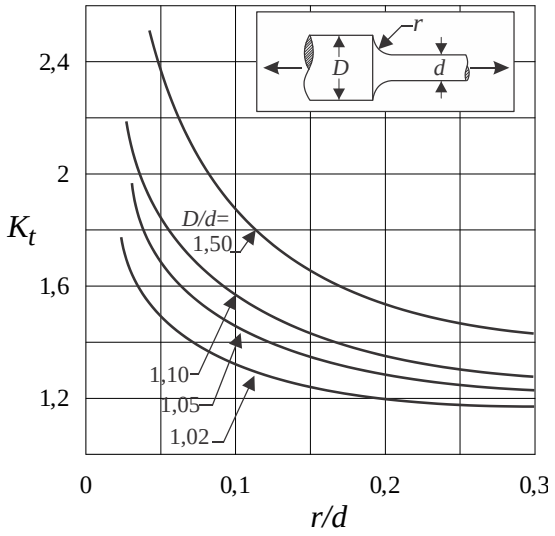


Figura 4.62: Curvas de fatores de concentração de tensões para barra escalonada de seção circular sob tração.

A tensão nominal σ_0 é geralmente simples de ser calculada. Os capítulos seguintes do presente texto mostra o cálculo de σ_0 para os casos típicos de flexão e torção de eixos.

Uma vez obtido $\sigma_{\max}$, este pode ser usado para testar a segurança quanto a diversos modos de falha. Por exemplo, a **falha por início de escoamento** da barra tracionada da Figura 4.62 tem todo seu material na faixa elástica linear sob o carregamento aplicado se

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 < \sigma_E. \tag{4.213}$$

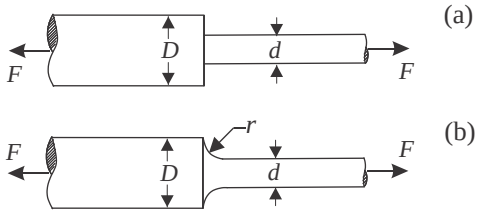


Figura 4.63: Barra escalonada de seção circular sob tração, sem e com entalhe de transição suave de raio r.

Irregularidades geométricas usuais em elementos estruturais, como furos circulares ou elípticos, ranhuras de lubrificação, raios de concordância em eixos escalonados e outros, são conhecidos em geral pelo termo **entalhe**. Em todos os casos, o entalhe possui um raio geométrico característico. O nível de concentração de tensões é maior quanto menor for o entalhe. Por exemplo, consideremos o eixo escalonado da Figura 4.63a, de seção circular. Na figura (a), o esboço mostra uma mudança brusca de diâmetros, entre D e d. Na realidade, **jamais esse tipo de construção é projetado ou construído**. Em vez disso, é usado um **raio de concordância** r na transição. O valor desse raio é escolhido no projeto, de forma a definir um K_t o menor possível. Por exemplo, usando o gráfico de K_t da Figura Kt7 do Apêndice, nota-se que, se

$$\begin{aligned} &d = 10 \text{ mm}, \quad D = 15 \text{ mm}, r = 1 \text{ mm} \quad \Rightarrow \frac{D}{d} = 1,5, \frac{r}{d} = 0,1 \quad \Rightarrow K_t \simeq 1,87. \\ &d = 10 \text{ mm}, \quad D = 15 \text{ mm}, r = 2 \text{ mm} \quad \Rightarrow \frac{D}{d} = 1,5, \frac{r}{d} = 0,2 \quad \Rightarrow K_t \simeq 1,53. \end{aligned} \tag{4.214}$$

Nota-se que para valores fixos dos diâmetros, D e d, o aumento no raio de concordância r de 1 mm

para 2 mm, fez o fator de concentração de tensões cair.

Se desejamos limitar as tensões máximas no componente à faixa elástica, como é comum em máquinas, um alto valor de K_t significa a necessidade de definir seções transversais mais robustas, de forma a reduzir a tensão nominal. Isso pode ser entendido considerando, por exemplo, o caso da barra tracionada da Figura 4.63b. A tensão máxima no fundo do entalhe é

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 = K_t \frac{F}{A_0}, \text{ onde } A_0 = \frac{\pi d^2}{4}. \tag{4.215}$$

Para manter as tensões na faixa elástica, a seção transversal deve ter área líquida A_0 tal que $\sigma_{\max} \leq \sigma_E$. Logo,

$$K_t \frac{F}{A_0} \leq \sigma_E \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_0 \geq K_t \frac{F}{\sigma_E}} \tag{4.216}$$

Então, um aumento no K_t implica na necessidade de maior área de seção transversal. O mesmo efeito ocorre para outras geometrias e carregamentos.

Exemplo 4.17 – Dimensionamento para falha por início de escoamento com entalhe

Considere uma barra escalonada de seção circular sob tração, como na Figura 4.63b, sob uma forca $F = 10$ kN. O material é um aço com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 300$ MPa.
(a) Se a barra tem as dimensões $D = 15$ mm, $d = 10$ mm e raio de concordância $r = 1$ mm, obtenha o coeficiente de segurança n para falha por início de escoamento.
(b) Determine o diâmetro d necessário para obter um coeficiente de segurança $n = 1,5$, para $D = 15$ mm e $r = 1$ mm.
Solução:
(a) O fator de concentração de tensões para esta configuração geométrica é aquela mostrada na Figura Kt7 do Apêndice. Os parâmetros adimensionais necessários, D/d e r/d, foram calculados na eq. (4.214), de forma que o gráfico mostra um valor aproximado de $K_t \simeq 1,87$. A tensão nominal associada ao gráfico é obtida pela área mínima, i.e.,

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 10^2}{4} = 78,5 \text{ mm}^2 \text{ e } \sigma_0 = \frac{F}{A_0} = \frac{10.000 \text{ N}}{78,5 \text{ mm}^2} = 127,3 \text{ MPa}. \tag{4.217}$$

A tensão máxima no fundo do entalhe e o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento na seção mínima do entalhe são dados por

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 = 1,87 \times 127,3 \text{ MPa} = 238,1 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{\max}} = \frac{300}{238,1} = 1,26. \tag{4.218}$$

(b) Se desejamos determinar uma certa dimensão da seção transversal, devemos obter a tensão nominal a partir do coeficiente de segurança desejado. Note que sempre o dimensionamento é feito a partir do valor da tensão nominal. Para $n = 1,5$, deve-se ter

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_E}{n} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ MPa}. \tag{4.219}$$

Porém, $\sigma_{\max} = K_t \sigma_0$. Logo,

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max}}{K_t}$$

Entretanto, surge uma dificuldade no processo de cálculo, uma vez que o valor de K_t também depende dos valores adimensionais da seção transversal da barra. Isso gera a necessidade de um procedimento iterativo. Podemos inicia-lo usando o mesmo K_t das dimensões do item (a) do exemplo. Então,

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\max}}{K_t} = \frac{200}{1,87} = 107 \text{ MPa}. \tag{4.220}$$

A tensão nominal se refere à área de seção transversal mínima, i.e.,

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad \rightarrow \quad 107 = \frac{10.000 \text{ N}}{\pi d^2/4} \quad \rightarrow \quad d = 10,9 \text{ mm}. \tag{4.221}$$

Entretanto, esse valor de d é associado a um valor de K_t distinto daquele utilizado. Para o conjunto de dimensões $d = 10,9$ mm, $D = 15$ mm e $r = 1$ mm, obtemos os valores adimensionais

$$\frac{D}{d} = 1,38 \quad \text{e} \quad \frac{r}{d} = 0,092.$$

Os valores disponíveis nos gráficos de K_t geralmente não possuem resolução suficiente para permitir a identificação dos efeitos de pequenas variações dimensionais como no atual exemplo. No presente caso, as curvas apenas permitem estimar que o valor pouco se altera com o novo valor de d, de forma que podemos manter $K_t \simeq 1,87$ nos cálculos, o que gera a estimativa de $d = 10,9$ mm.

4.11 Exercícios

4.1 Considere os dados do Exemplo 14, página 151. Obtenha as reações, as tensões e o elongamento da barra para uma força $F = 22,4$ kN.

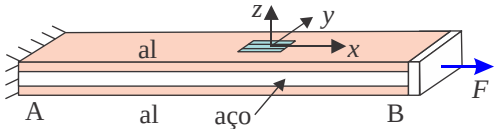
4.2 Considere os dados do Exemplo 14, página 151, porém com as áreas de seção transversal de aço e de alumínio idênticas, i.e., $A_{aco} = 100$ mm^2 e $A_{al} = 50$ mm^2 em cada camada. Quais as reações, tensões e o elongamento da barra para uma força axial $F = 22,4$ kN?

4.3 (a) Para os dados do Exemplo 14, obtenha as reações, as tensões e o elongamento da barra para uma força axial $F = 15$ kN. Use $A_{aco} = 100$ mm^2 e $A_{al} = 20$ mm^2 em cada camada. (b) Qual a força que inicia a plastificação na barra?

4.4 Considere os dados do Exemplo 14, página 151. (a) Qual a relação entre as áreas de seção transversal das camadas de aço com a de alumínio, para que as parcelas de força suportadas por cada material sejam iguais? Usar as propriedades de material do Exemplo 14. (b) Caso $A_{aco} = 100$ mm^2, qual seria A_{al}? (c) Quais as reações se $F = 10$ kN?

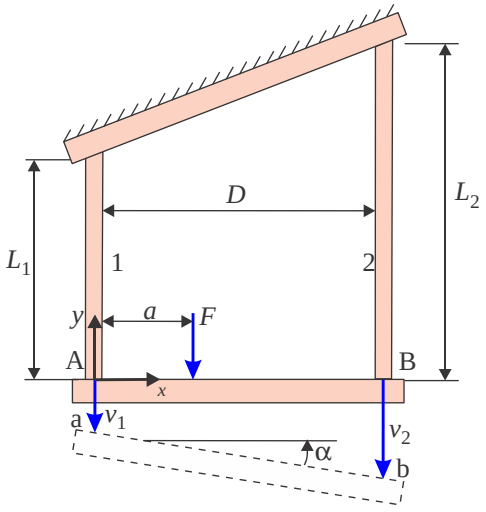
4.5 Refaça o Exercício 4 acima, substituindo a barra de aço por uma de cobre, usando os valores $E_{cu} = 120$ MPa, $\sigma_{Ecu} = 200$ MPa, $E_{al} = 70$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa. (a) Caso $A_{cu} = 100$ mm^2, qual seria A_{al}? (c) Qual a força que inicia a plastificação na barra?

4.6 Considere a barra bimetal de três lâminas mostrada na Figura. Na superfície externa de uma face de alumínio foi colado um extensômetro de resistência alinhado na direção axial. Uma força axial F foi aplicada na barra e foi medida uma deformação axial $\varepsilon = 0,15$ %. Determine o valor da força aplicada, as tensões em cada material e verifique se ambos os materiais estão elásticos sob essa força. $E_{aco} = 200$ MPa, $\sigma_{Eaco} = 350$ MPa, $A_{aco} = 100$ mm^2, $E_{al} = 70$ MPa, $\sigma_{Eal} = 250$ MPa,$A_{al} = 40$ mm^2 em cada camada.



4.7 Considere o enunciado do Exemplo 6.1, página 137. (a) Determine a posição a da força F para que a plataforma AB sofra se desloque de forma a manter um ângulo $\alpha = 1/3000$ rad com os deslocamentos dos pontos A e B tais que $v_2 > v_2$. (b) Determine o elongamento das barras. (c) Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento. Use $L_1 = L_2 = 1$ m, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2, $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 70$ GPa, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = 350$ MPa,

$D = 1,5$ m, $F = 1$ kN.



4.8 Refaça o Exercício 7 acima para $L_1 = 1$ m e $L_2 = 1,3$ m.

4.9 No Exercício 8 acima, (a) qual será o ângulo α formado pela plataforma AB se a força $F = 1$ kN for multiplicada por $n = 5,306$? (b) Quais serão os elongamentos nas barras, se a posição a da força for $a = 1005$ mm? (c) Qual o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento nas barras? (d) Qual a força total aplicada? Use $L_1 = 1$ m e $L_2 = 1,3$ m, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2.

4.10 Considere o enunciado do Exemplo 6.1. Na barra 1 foi montado um extensômetro axial que, após a aplicação da força F, indicou uma deformação axial $\varepsilon_1 = 3,30 \cdot 10^{-4}$. Sabe-se que a força foi aplicada na posição $a = 1.005$ mm. Determine o valor da força F aplicada, dos elongamentos e coeficientes de segurança nas barras. Use $L_1 = 1$ m e $L_2 = 1,3$ m, $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2.

4.11 Considere o enunciado do Exemplo 6.1, página 137, em que as barras tem seção transversal circular, com áreas $A_1 = 5$ mm^2, $A_2 = 15$ mm^2, e comprimentos $L_1 = 1$ m e $L_2 = 1,3$ m. A barra 1 tem coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. A força F foi aplicada na posição $a = 900$ mm e foi medida a variação do diâmetro da barra 1 igual a $\Delta d_1 = -2,52 \cdot 10^{-4}$ mm. Determine o valor da força F aplicada, os elongamentos, tensões e coeficientes e segurança nas barras.

4.12 Considere o enunciado do Exemplo 13, página 148. Determine as reações nos apoios, as tensões nas barras, seus elongamentos e coeficientes de segurança quanto ao início de escoamento nas barras. Use os valores $A_1 = A_2 = 2.500$ mm^2, $A_3 = 1.500$ mm^2, $L = 4$ m, $a = 5$ m, sendo as barras 1 e 2 de alumínio e a barra 3 de aço, com $E_1 = E_2 = 70$ GPa, $E_3 = 200$ GPa, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = 250$ MPa, $\sigma_{E2} = 350$ MPa, $q = 95$ N/mm.

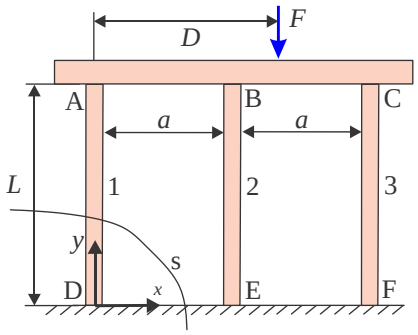
4.13 Considere um problema similar ao do Exemplo 13, página 148, como ilustrado na Figura, em que as colunas estão com espaçamentos distintos. A barra ABC é suposta absolutamente rígida. (a) Determine as reações nos apoios, as tensões, elongamentos e coeficientes de segurança quanto ao início do escoamento nas barras. (b) Obtenha o ângulo de inclinação da barra ABC na configuração deformada da estrutura. Use os valores $q = 100$ N/mm, $L = 4$ m, $a_1 = 3,5$ m, $a_2 = 6,5$ m, $E_1 = E_2 = 70$ GPa, $E_3 = 200$ GPa, $\sigma_{E1} = \sigma_{E2} = 250$ MPa, $\sigma_{E2} = 350$ MPa, $A_1 = A_2 = 2500$ mm^2, $A_3 = 1500$ mm^2.

4.14 Resolva o Exercício 13 acima para $a_1 = 6,5$ m, $a_2 = 3,5$ m.

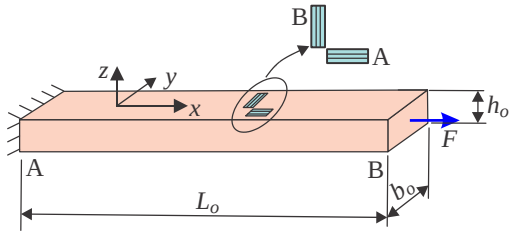
4.15 Considere um problema similar ao do Exemplo 13 e ilustrado na figura do Exercício 4.13. A barra ABC é absolutamente rígida e suporta uma carga distribuída q. As colunas 1, 2 e 3 tem comprimentos L. Determine o valor dos espaçamentos a_1 e a_2, tal que $a_1 + a_2 = D$, de forma que na configuração deformada a barra ABC sofra apenas translação, mas permaneça horizontal. Use os demais dados e o equacionamento do Exercício 13, com $D = 10$ m.

4.15.1 Considere a plataforma ABC suportada pelas colunas 1, 2 e 3, de mesmas dimensões e material. Uma força vertical F é aplicada numa posição D como na Figura 4.11. Determine as reações nos apoios, as tensões nas colunas, o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento e o ângulo formado pela plataforma na configuração deformada do sistema. Considere a plataforma absolutamente rígida. Ignore seu peso próprio. Use os valores $L = 200$ mm, $a = 400$ mm, $D = 600$ mm, $F = 20$ kN. As colunas tem seção transversal com

$A = 100$ mm^2, $E = 200$ GPa, $\sigma_E = 350$ MPa.



4.16 Considere o Exemplo 3, página 125, de uma barra reta de seção transversal retangular de área $A = b_o \times h_o$, como na Figura 4.11 submetida a uma força axial F e a um incremento de temperatura ΔT. Na superfície da face cuja normal é $+y$, foram montados dois extensômetros de resistência, que mediram as seguintes deformações: $\varepsilon_x = 1,1 \cdot 10^{-3}$ e $\varepsilon_y = 10^{-3}$ nas direções axial e transversal, respectivamente. O material da barra é aço com $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$, coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°$C. As dimensões da barra são $L_o = 3$ m, $b_o = 20$ mm e $h_o = 10$ mm. Determine o valor da força F aplicada e do incremento de temperatura ΔT.



4.17 Num ensaio de tração de uma barra de aço de comprimento $L_o = 150$ mm e seção circular de diâmetro $d_o = 10$ mm apresentou elongamento $\Delta L = 0,15$ mm e redução no diâmetro de $\Delta d = -2,5$ μm quando submetida a uma força axial $F = 15.708$ N. Após o descarregamento, a barra voltou ao seu comprimento original. Qual o modulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson?

4.18 Uma barra de alumínio de comprimento $L_o = 3$ m e seção circular de diâmetro $d_o = 10$ mm foi tracionada por uma força F e apresentou deformação axial $\varepsilon_x = 0,1$ %. Qual a tensão normal aplicada? Qual a força? Considere comportamento elástico e $E = 70$ GPa.

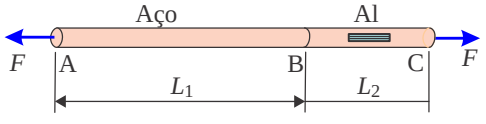
4.19 Uma barra de aço de seção circular, de comprimento $L_o = 3$ m, deve ser projetada para um mecanismo de controle, de forma que seu elongamento não pode exceder $\Delta L_{adm} = 0,2$ mm quando submetida a uma força $F = 4$ kN. O aço usado tem tensão admissível $\sigma_{adm} = 160$ MPa e $E = 200$ GPa. Qual diâmetro necessário para a barra, para satisfazer os requisitos de rigidez e tensão admissível?

4.20 Considere a barra escalonada do Exemplo 8, página 139, mostrada na Figura 4.38a.Determine os deslocamentos nas seções B, C e D para os seguintes dados: $F_B = 20$ kN, $F_C = 30$ kN, $F_D = 55$ kN, $L_1 = L_3 = 100$ mm, $L_2 = 150$ mm, $A_1 = A_3 = 800$ mm^2, $A_2 = 1200$ mm^2, $E = 200$ GPa.

4.21 Na barra escalonada do Exemplo 8, página 139, calcule as tensões nominais.

4.22 Para a barra escalonada do Exercício 20, determine as tensões normais axiais nominais.

4.23 Uma barra de aço é construída pelo acoplamento de duas barras, uma de aço e outra de alumínio, como na Figura 4.11. Foi aplicada um par de forças F nas extremidades e um extensômetro de resistência colado na parte de alumínio indicou deformação axial $\varepsilon_{xal} = +0,1$ %. Determine a força aplicada e o elongamento na barra. Qual a tensão nominal em cada parte? Considere ambos os materiais na faixa elástica. Use os dados: $L_1 = 1$ m, $L_2 = 0,2$ m, $E_{al} = 70$ GPa, $E_{aco} = 200$ GPa, e diâmetro da barra $d = 30$ mm.

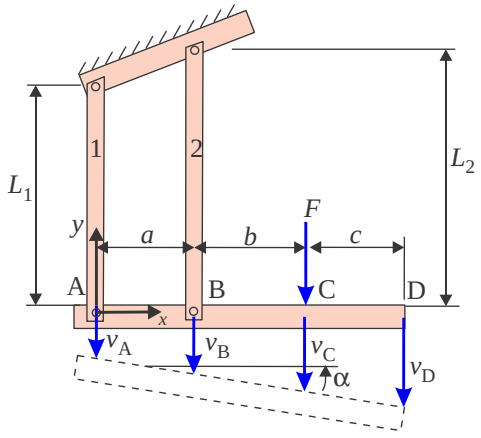


4.24 Determine a constante de mola da barra do Exercício 23 acima, i.e., a constante k tal que $F = k\Delta L$.

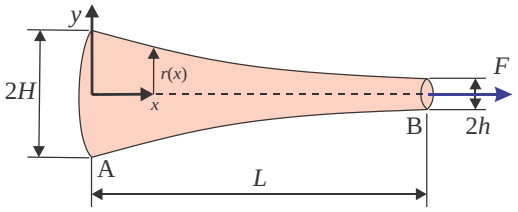
4.25 Considere uma barra de aço de comprimento desconhecido L, fixada numa extremidade. Determine seu comprimento

a partir do seguinte experimento. Considere que uma força axial F foi aplicada na extremidade livre e foram feitas duas medições: o deslocamento sofrido pela extremidade carregada, e a deformação especifica axial ε_x. Considere a barra sob deformações uniformes. Os valores obtidos são: $\Delta L = 20$ mm e $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4}$. Qual a força aplicada? Seção transversal tem área $A = 100$ mm^2 e o material $E = 207$ GPa.

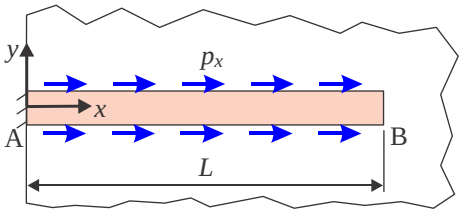
4.26 A barra AD é suportada pelas barras verticais AE e AF, através de uniões rotuladas como na Figura 4.11. Considere a barra AD absolutamente rígida. (a) Determine os deslocamentos verticais em B e D, as tensões nominais nas barras verticais, e verifique se são elásticas. (b) Determine o ângulo α de rotação da barra AD.



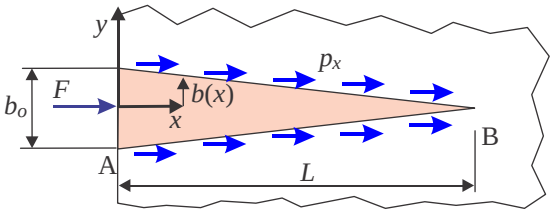
4.27 Considere uma barra de seção circular variável, como no Exemplo 9, página 4.40, em que a variação do raio é dada por uma função na forma $r(x) = a\exp(cx)$, como na Figura 4.11. (a) Determine as expressões para as constantes geométricas a e c em termos de h, H e L. (b) Determine o elongamento total da barra, a função de deslocamento axial $u = u(x)$ e da variação da tensão $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Use os valores $F = 5$ kN, $L = 300$ mm, $E = 70$ GPa, e os raios da seção nos extremos da barra: $H = 10$ mm e $h = 5$ mm, em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente. Use o resto do enunciado do Exemplo 8.



4.28 A barra de seção uniforme mostrada na Figura 4.11 está submetida a uma força de atrito p_x [N/m], uniformemente distribuída ao longo de toda sua extensão. A barra está engastada na extremidade A. Determine seu elongameto e as funções de deslocamento axial $u(x)$ e de tensão normal $\sigma_x(x)$. Ver os detalhes no Exemplo 10, página 4.41. Use os valores $p_x = 5$ N/mm, $L = 200$ mm, $E = 200$ GPa, seção transversal com área $A = 100$ mm^2.



4.29 Considere o enunciado do Exemplo 10, página 4.41. Uma barra de comprimento L, de seção transversal retangular de espessura uniforme h e altura que varia linearmente como na Figura 4.11. A barra encontra-se montada no interior de um corpo, com contato completo em sua superfície lateral. Na região de contato atua um atrito que podemos considerar constante, dado por $p_x = const.$, em Newton por metro de comprimento axial. Na extremidade A uma força compressiva F é aplicada. Estime o deslocamento axial da extremidade A, e as funções do esforço normal $N_x(x)$, e da tensão normal média $\sigma_x(x)$, e a tensão máxima na barra.

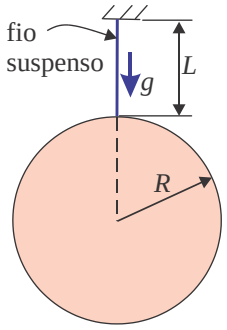


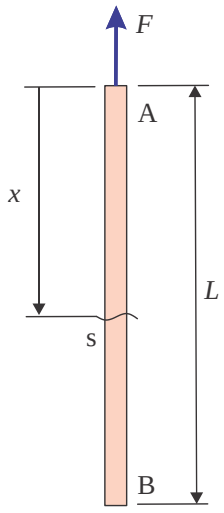
4.30 Considere o Exercício 28 acima, porém com uma carga distribuída na superfície lateral

da barra variando linearmente na forma $p_x(x) = ax$, com $a = 1,0$ N/m^2. Determine o deslocamento axial da extremidade A, e as funções do esforço normal $N_x(x)$, e da tensão normal média $\sigma_x(x)$, e a tensão máxima na barra. Qual a reação no apoio? Esboce os diagramas de esforços, deslocamento e tensão normal média.

4.31 Considere o enunciado do Exemplo 10, página 4.41, no caso em que a tensão admissível na barra for σ_{adm}. Considere que a força distribuída p_x seja devida a um tipo de iteração entre a superfície da barra e o material onde ela está imersa. Considere que a adesão é perdida se a carga p_x ultrapassar um valor admissível p_{adm}. Determine a força F máxima admissível considerando os dois modos de falha associados, para (a) $\sigma_{adm} = 350$ MPa e $p_{adm} = 150$ N/mm, e (b) $\sigma_{adm} = 350$ MPa e $p_{adm} = 120$ N/mm.

4.32 Considere um fio de aço suspenso por uma extremidade, de uma certa altura L acima da superfície da Terra, como na Figura. Considere densidade $\rho = 7.800$ kg/m^3, $g = 9,8$ m/s^2, $E = 200$ GPa. (a) Se a aceleração da gravidade for considerada constante ao longo do fio, qual o máximo valor possível de comprimento L para que o fio não se rompa, se $\sigma_{adm} = 600$ MPa? (b) Qual a área de seção transversal necessária para não exceder a tensão admissível? Note que o fio é suportado pelo apoio A superior, como detalhado na Figura.





4.33 Considere que o cabo suspenso do Exercício 32 acima, além de suportar seu peso próprio, devesse também suportar uma massa $M = 200$ kg em sua extremidade inferior. Se a área de seção transversal for $A = 50$ mm^2, qual o máximo comprimento possível de cabo? Qual a massa do cabo?

4.34 Considere o Exercício 32 acima. Qual o elongamento do fio devido ao seu peso próprio? Considere comprimento $L = 7.849$ m.

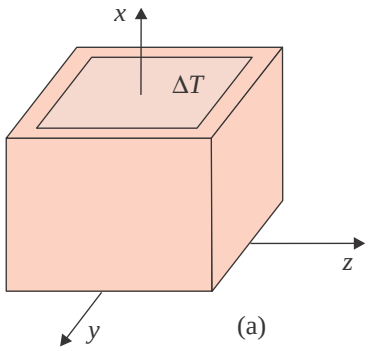
4.35 Considere o Exercício 33 acima. Qual o elongamento do fio para um comprimento $L = 7.849$ m?

4.36 Considere o Exercício 33 acima, para um fio de fibra de carbono com densidade $\rho = 1.700$ kg/m^3 e $\sigma_{adm} = 5.000$ MPa. Para comprimento $L = 7.336,5$ m, qual a área de seção transversal A necessária? Qual a massa M_c do cabo?

4.37 Considere o Exercício 36 acima, de um fio de fibra de carbono de comprimento $L = 7.336,5$ m, área de seção transversal $A = 0,4$ mm^2, sustentando uma massa $M = 200$ kg na extremidade inferior. (a) Qual o elongamento do fio? (b) Qual o elongamento e a massa do cabo se $A = 4$ mm^2?

4.38 Considere o bloco do Exemplo 4.1.1. É um bloco ortogonal de material elástico linear, de dimensões $A \times B \times C$ nas direções cartesianas, respectivamente. Ele é montado numa cavidade que consideraremos infinitamente rígida, como na Figura. O bloco é ajustado à cavidade de forma a manter

contato em 5 de suas faces, podendo se deformar sem atrito. A temperatura no bloco foi aumentada em ΔT. Determine a deformação na direção x e as tensões transversais σ_y e σ_z em termos de E, ν, α e ΔT.



(a)

4.39 Considere o bloco do Exemplo 4.1.1 e o Exercício 38. Sobre o bloco é aplicada uma pressão p na superfície superior e um incremento de temperatura ΔT. Determine a deformação na direção x e as tensões transversais σ_y e σ_z em termos de E, ν, α, p e ΔT.

4.40 No bloco do Exercício 39, qual o pressão p_0 necessária para anular o deslocamento vertical da superfície superior sob o efeito térmico? Qual o valor de p_0 se $\Delta T = 30\,^{\circ}\text{C}$, $E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$, $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}\,^{\circ}\text{C}$?

Capítulo 5

Transformação de tensões e deformações

Nesse capítulo trataremos dos procedimentos de transformação de componentes tensoriais, como as componentes de tensões e deformações, em presença de rotação de sistema de coordenadas cartesianas. A transformação de tensões é fundamental na representação dos critérios de falha de material, que é tratado no próximo capítulo.

5.1 Aspectos qualitativos de transformação de tensões

Alguns aspectos concernentes às tensões e suas componentes podem ser melhor entendidas através de uma analogia com os vetores e suas componentes. Lembremos que um vetor é basicamente uma entidade abstrata, cuja melhor representação é realmente a flecha, como aquela ilustrada na Figura 5.1a, ligando os pontos O a P. Além disso, exigimos que a forma com que um vetor soma-se a outro vetor seja aquela forma conhecida, a regra do trapézio. Note que, embora não tenhamos uma maneira de representar diretamente o vetor, podemos representá-lo em suas componentes relativas a um certo conjunto de outros vetores, denominado **base**. Usaremos aqui o sistema cartesiano de coordenadas, $Oxyz$, com a base de vetores unitários ortonormais **i**, **j**, **k**. Então, um vetor **v** pode ser representado por suas componentes cartesianas como

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \tag{5.1}$$

Quando a base sendo usada for subentendida, as direções **i**-**j**-**k**, é possível representar o vetor indicando apenas suas componentes, isto é,

$$\{v^x\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\}. \tag{5.2}$$

Note que $\{v^x\}$ é apenas um arranjo, uma matriz, com as componentes. **v** é o vetor, a entidade abstrata. Sem dúvida, **v** pode ser representado por infinitos conjuntos de componentes. Por exemplo, para um novo conjunto de eixos, $Ox'y'z'$ (Figura 5.1a), as componentes passam a ser $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$, isto é,

$$\mathbf{v} = v_{x'}\mathbf{i}' + v_{y'}\mathbf{j}' + v_{k'}\mathbf{k}', \qquad \text{ou} \qquad \{v^{x'}\} = \left\{ \begin{array}{c} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{array} \right\}, \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{i}'$-$\mathbf{j}'$-$\mathbf{k}'$ são os vetores unitários nas novas direções.

Quando consideramos um **tensor tensão**, podemos identificar uma certa analogia com os vetores. Também o tensor é uma entidade abstrata, $\boldsymbol{\sigma}$, que pode ser representado apenas por suas componentes em relação a um certo sistema de coordenadas. A Figura 5.1b ilustra as componentes

num ponto arbitrário de um corpo, em relação a um sistema $Oxyz$, num **estado triaxial de tensões**. Como visto no Capítulo 3, são necessárias 9 componentes para representar um tensor, da mesma forma que a representação de um vetor exige 3 componentes.

Uma parte importante dos problemas considerados nesse texto refere-se ao **estado plano de tensões (EPT)**, cujas componentes no plano O-x-y são vistas na Figura 5.1c. A figura (d) mostra a projeção plana do EPT.

O problema geral de transformação de componentes tensoriais pode ser enunciado da seguinte forma:

(a) Considere um sistema cartesiano de coordenadas, $Oxyz$, e um segundo sistema ortogonal, $Ox'y'z'$, obtido por uma rotação do sistema $Oxyz$.

(b) Para um vetor, consideremos conhecidas suas componentes $\{v^x\} = \{v_x; v_y; v_z\}^T$ em relação ao sistema $Oxyz$, e buscamos as componentes $\{v^{x'}\} = \{v_{x'}; v_{y'}; v_{z'}\}^T$ em relação aos novos eixos $Ox'y'z'$.

(c) Para um tensor, consideremos conhecidas as componentes

$$[\sigma^x] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

em relação ao sistema $Oxyz$, e buscamos as componentes

$$[\sigma^{x'}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

em relação ao sistema $Ox'y'z'$.

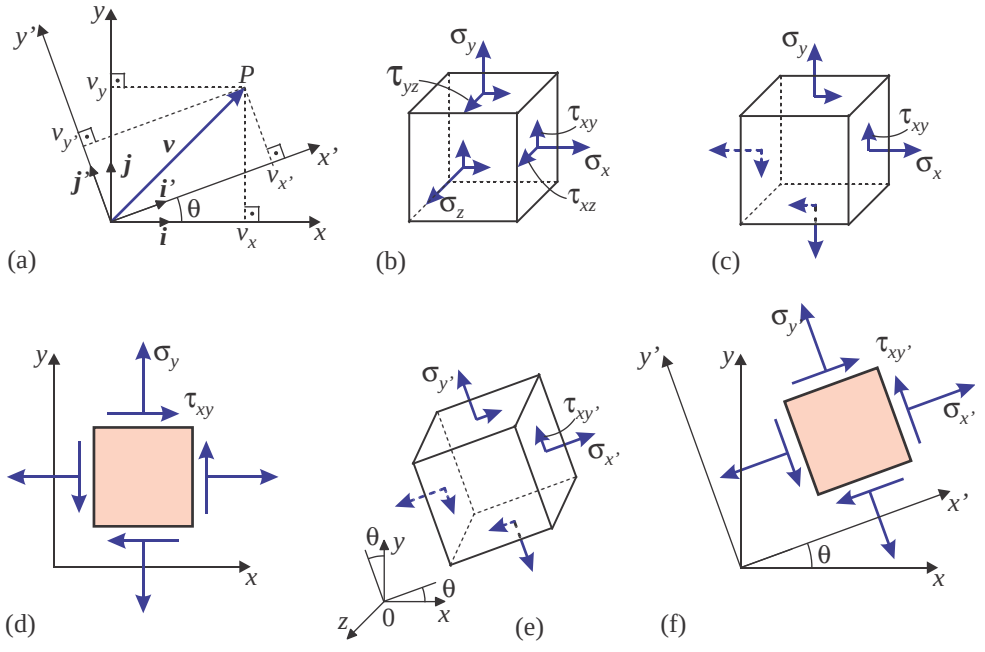


Figura 5.1: (a) Transformação plana de vetores; (b) Estado triaxial de tensões num ponto; (c) e (d) Estado plano de tensões; (e) e (f) Rotação plana das tensões.

Frequentemente trataremos de um estado plano de tensões sob **rotação plana** do sistema de eixos, isto é, os eixos $Ox'y'z'$ são obtidos por uma rotação de ângulo θ dos eixos x e y em torno

do eixo z, como ilustrado nas Figuras 5.1e e f. (Nota-se que os eixos z e z' coincidem). Assim, a transformação de componentes de tensão é:

$$[\sigma^x] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transformação}} [\sigma^{x'}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Observe que, enquanto a relação entre as componentes de um vetor são facilmente visualizadas numa representação gráfica como a da Figura 5.1a, a relação entre $[\sigma^x]$ e $[\sigma^{x'}]$ não o é. Em vez disso, essa relação só pode ser entendida, e obtida matematicamente, a partir de condições de equilíbrio das forças atuantes no elemento diferencial do material no ponto do corpo considerado.

Para que isso se torne visível, começaremos por um exemplo simples, uma barra sob tração como na Figura 5.2a. Passando por um ponto P da barra, arbitrário, podemos realizar cortes: por exemplo, um corte $a-a$ perpendicular ao eixo axial x, e outro ao longo da linha $b-b$ que faz um ângulo θ com $a-a$ em torno do eixo z. Se construirmos um diagrama de corpo livre de um dos lados da barra, como na Figura 5.2b, temos que a tensão média na seção é $\sigma_x = F/A$. Então, o estado de tensões no ponto P é uniaxial, dado por $\sigma_x = F/A$, com as demais cinco componentes nulas.

Por outro lado, fazendo o corte $b-b$ e tomando o lado esquerdo, como na Figura 5.2c, o equilíbrio de forças na direção x indica que o esforço na seção é também F, colinear com o carregamento. Entretanto, podemos decompor esse esforço em suas componentes na direção normal e tangencial ao plano $b-b$, isto é, componentes F_n e F_t, que no problema são obtidas facilmente como

$$F_n = F\cos\theta \qquad \text{e} \qquad F_t = F\ \text{sen}\ \theta. \tag{5.6}$$

Essas componentes, sem dúvida, são as resultantes das tensões distribuídas sobre a superfície inclinada. Temos então as componentes de tensão $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, como na Figura 5.2d, normal e tangencial à superfície de normal paralela a x'. Admitindo que as tensões se distribuem de forma uniforme na seção (hipótese não realista no caso do cisalhamento $\tau_{x'y'}$), essas componentes são dadas por (usando $A = A_n\cos\theta$ e a eq.(5.6)):

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{F_n}{A_n} = \frac{F}{A}\cos^2\theta \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta, \quad \text{e} \\ \tau_{x'y'} &= \frac{F_t}{A_n} = \frac{F}{A}\text{sen}\ \theta\cos\theta \qquad \rightarrow \qquad \tau_{x'y'} = \sigma_x\ \text{sen}\ \theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Essas seriam então as componentes (não-nulas) de tensão no ponto P, em relação aos eixos $Ox'y'z'$. Note que em relação ao sistema $Oxyz$, o estado de tensões era uniaxial. Agora, em relação aos eixos $Ox'y'z'$ o estado de tensões é plano, isto é, fizemos a seguinte transformação de componentes de tensão:

$$[\sigma^x] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\sigma^{x'}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta & \tau_{x'y'} = \sigma_x\ \text{sen}\ \theta\cos\theta & 0 \\ \tau_{y'x'} = \sigma_x\ \text{sen}\ \theta\cos\theta & XXX & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

(onde XXX indica uma expressão ainda a ser determinada por uma dedução mais geral, em (5.17), como sendo $\sigma_{y'} = \sigma_x\text{sen}^2\theta$). Entretanto deve-se enfatizar que o tensor tensão é o mesmo no ponto P, apenas as componentes usadas para representá-la mudam conforme o sistema de coordenadas.

A equação (5.7) é uma forma limitada de equações de transformação de tensões, válida apenas para o problema simples em vista. Na próxima seção veremos o caso mais geral de transformação em rotação plana.

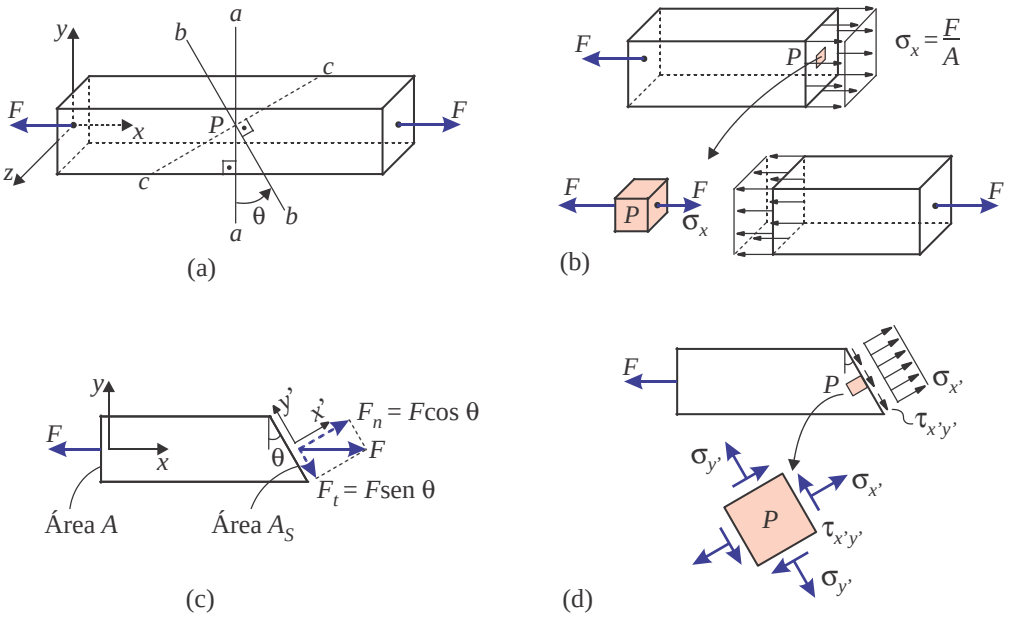


Figura 5.2: (a) Barra tracionada; (b) Corte normal ao eixo x; (c) Forças numa superfície normal ao eixo x'; (d) Tensões na superfície normal ao eixo x'.

5.2 Transformação plana do EPT

No exemplo ilustrativo da Figura 5.2 tínhamos uma peça, um corpo de dimensão finitas, adequado para tratar apenas de tensões uniformes. Entretanto as tensões são, por natureza, grandezas associadas a cada ponto do corpo. Dessa forma, buscaremos aqui encontrar expressões gerais para transformação de estados planos de tensão em presença de rotação plana do sistema de coordenadas. Buscamos expressões que tenham validade geral, irrespectivamente à forma do corpo ou seu carregamento ou condição de contorno. Isso porque a operação de transformação será feita num elemento infinitesimal. Antes de tratarmos do caso de transformação de componentes de tensão, consideremos um exemplo em que as componentes de tensão são tratadas indiretamente através das forças locais obtidas pelo produto de cada componente pela área onde ela atua. As operações realizadas nessa seção são baseadas na seguinte constatação:

> As tensões são componentes de um tensor. Entretanto, as componentes de tensões que atuam numa dada área infinitesimal, formam as componentes de um vetor e, dessa forma, podem ser manipuladas na forma usual dos vetores.

(5.9)

Essa afirmação pode ser entendida melhor através do exemplo a seguir.

Exemplo 5.1 - Forças e tensões num plano inclinado

Consideremos um ponto num corpo em que as componentes de tensão em relação a um sistema de eixos $0xyz$ seja $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, com as demais componentes nulas. Buscamos identificar as forças diferenciais que atuam na face do elemento diferencial de volume ortogonal ao eixo cartesiano x'. Esse eixo pertence ao sistema cartesiano $0x'y'z'$, sendo z' paralelo a z. Ambos os sistemas de eixos diferem apenas por uma rotação em torno de z definida pelo ângulo $\theta = 30°$. Com as forças diferenciais, buscamos identificar as componentes de tensão nas superfícies ortogonais ao novo sistema de eixos. A relação entre esses eixos e tensões é visualizada na Figura 5.3.

Solução:

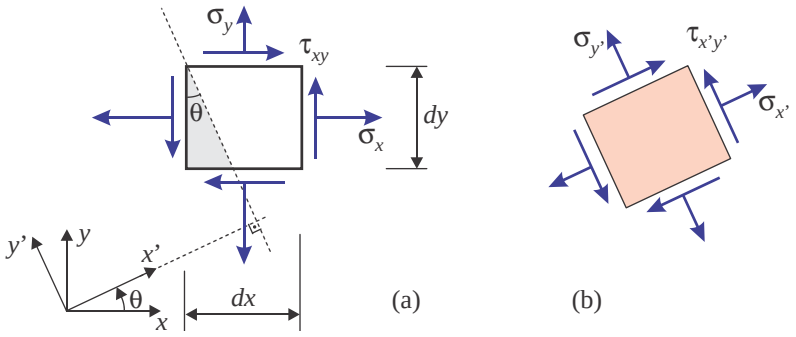


Figura 5.3: Componentes de tensão no Exemplo 1, em dois sistemas de coordenadas.

O elemento diferencial na Figura 5.3 está em equilíbrio sob o conjunto de forças desenvolvidas pelas componentes de tensão aplicadas. Então, cada parte do elemento diferencial também está em equilíbrio. Se buscamos as forças que atuam numa superfície de normal orientada em x', podemos fazer um corte perpendicular a esse eixo e gerar o volume em formato de cunha mostrado na Figura 5.4a, que mostra a lateral da cunha no plano xy, tendo espessura dz. As tensões nas faces inferior e esquerda são as mesmas do elemento quadrilateral, i.e. σ_x, σ_y e τ_{xy}. Na face inclinada de normal x', as componentes normal e tangente são designadas por $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$. Desejamos obter $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy} e do ângulo θ. Novamente deve ficar claro que não é possível combinar componentes de tensão como se fosse de vetores, por exemplo, não há sentido em somar as componentes x, como $\tau_{xy} - \sigma_x$. Isso porque cada uma dessas componentes atua em uma área distinta. Entretanto, se cada uma dessas componentes for multiplicada pela área onde atua, as forças resultantes podem ser somadas como vetores. Essas forças são ilustradas na Figura 5.4b. Os índices foram escolhidos tal que o primeiro indica a orientação da face e o segundo índice indica a direção da força. Por exemplo, F_{yx} é a força na direção x aplicada na superfície de normal y.

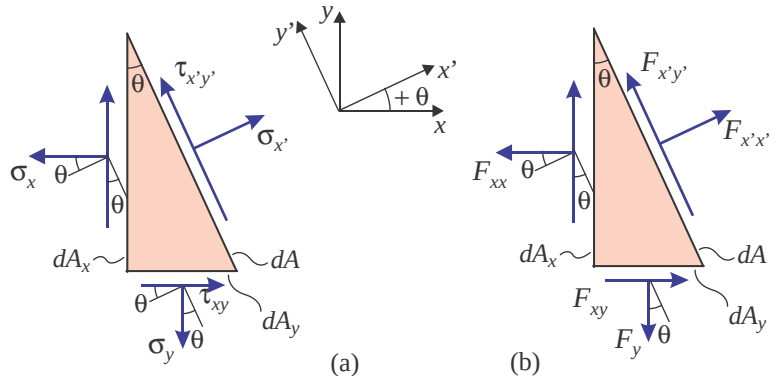


Figura 5.4: (a) Componentes de tensão e de (b) forças diferenciais nas superfícies de uma cunha do Exemplo 1.

Podemos designar a área inclinada na cunha da Figura 5.4 por dA. É um valor diferencial, não quantificável. As áreas nas superfícies vertical e horizontal são dadas por

$$dA_x = dA\cos\theta \qquad \text{e} \qquad dA_y = dA \text{ sen } \theta. \tag{5.10}$$

As componentes das forças diferenciais aplicadas na cunha são

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \sigma_x dA_x, & F_{yx} &= |\tau_{xy}|\, dA_y, & F_{x'x'} &= \sigma_{x'x'} dA, \\ F_{xy} &= |\tau_{xy}|\, dA_x, & F_{yy} &= |\sigma_y|\, dA_y, & F_{x'y'} &= \tau_{x'y'} dA. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo os valores de σ_x, σ_y e τ_{xy} e do ângulo θ obtemos as forças

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \sigma_x c\ dA = 20c\ dA = 17,3dA, & F_{yx} &= |\tau_{xy}|\ sdA = 12,5dA, \\ F_{xy} &= |\tau_{xy}|\ \ cdA = 25c\ dA = 21,65dA, & F_{yy} &= |\sigma_y|\ sdA = 25dA, \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $c = \cos\theta$ e $s = \text{sen}\,\theta$. Essas forças podem ser somadas para estabelecer a condição de equilíbrio da cunha. Podemos fazer somatório de forças nas direções x e y ou nas direções rotacionadas x' e y', ou ainda em quaisquer outras direções. No momento usaremos as direções x e y:

$$\begin{aligned} \sum F_x \quad &\rightarrow \quad F_{x'x'}c - F_{x'y'}s + F_{yx} - F_{xx} = 0, \\ \sum F_y \quad &\rightarrow \quad F_{x'x'}s + F_{x'y'}c + F_{yy} + F_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Isso pode ser organizado em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x'x'} \\ F_{x'y'} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} F_{yx} - F_{xx} \\ F_{yy} + F_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{5.14}$$

A inversa da matriz é obtida simplesmente transferindo o sinal negativo de um seno para o outro. Assim, a solução do sistema algébrico fica

$$\begin{Bmatrix} F_{x'x'} \\ F_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19,2 \\ -42,8 \end{Bmatrix} dA. \tag{5.15}$$

Essas são as forças que atuam na superfície de área dA. Dividindo-as por dA, obtemos as componentes de tensão atuantes na superfície normal a x': $\sigma_{x'} = -19,2$ MPa e $\tau_{x'y'} = -42,8$ MPa. Essas são as tensões na área inclinada, que mantém a cunha equilibrada sob a ação de σ_x, σ_y e τ_{xy}.

O exemplo 1 foi resolvido usando uma situação particular com valores prescritos. Aqui faremos uma dedução para um caso geral de estado plano de tensões, sob rotação plana do sistema de coordenadas. As equações obtidas são clássicas, e normalmente são usadas para fazer a transformação de maneira automatizada, sem necessidade de repetir os procedimentos de equilíbrio a cada cálculo. O equilíbrio é usado apenas no momento da dedução geral, como feito a seguir.

Considere um corpo genérico e um ponto P numa coordenada $\mathbf{x}$ em relação a um sistema de coordenadas $Oxyz$, como na Figura 5.5a. Na figura (b) temos as tensões (de um estado plano) atuantes no elemento. Note que o corpo está em equilíbrio, logo, o elemento diferencial também estará em equilíbrio sob ação de σ_x, σ_y e τ_{xy}. Adicionalmente, podemos realizar um corte $a-a$ no elemento da figura (b), por um ângulo θ medido em torno do eixo z. Esse corte define um eixo, x', perpendicular ao plano $a-a$, e um eixo y' tangente a ele.

Então, se o elemento da Figura 5.5b está em equilíbrio, a região hachurada também estará. Assim, temos o diagrama de corpo livre na Figura 5.5c. Nas duas faces perpendiculares aos eixos x e y atuam σ_x, σ_y e τ_{xy}. Na nova superfície, perpendicular ao novo eixo x', as tensões perpendicular e tangente são $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$. Essas são componentes incógnitas, a serem obtidas a partir de σ_x, σ_y, τ_{xy} e de θ. A relação entre os dois conjuntos de valores será obtida por **equilíbrio de forças**, não de tensões. Devemos lembrar que não há significado para uma "projeção de tensão" numa certa direção. Por exemplo, não se pode "projetar" $\sigma_{x'}$ na direção x por $\sigma_{x'}\cos\theta$, por que essa é uma operação vetorial, e tensão não tem caráter vetorial, mas sim tensorial. Por outro lado, a força associada a $\sigma_{x'}$, isto é, $\sigma_{x'}dS\ dz$ é um vetor, (dS é o comprimento do lado inclinado e $dSdz$ é a área inclinada) e pode ser operado como um vetor: pode ser projetado, por exemplo, na direção x, como $\sigma_{x'}dSdz\cos\theta$.

Então, podemos escrever duas equações de equilíbrio para o elemento diferencial da Figura 5.5c. Embora possamos escrever o equilíbrio nas direções x e y, aparentemente é mais simples faze-lo nas direções x' e y' como segue. Lembramos que o elemento tem espessura dz, de forma que a área inclinada é $dSdz$, e as áreas vertical e horizontal são $dA\cos\theta$ e dA sen θ. O equilíbrio de forças nas direções x' e y' são

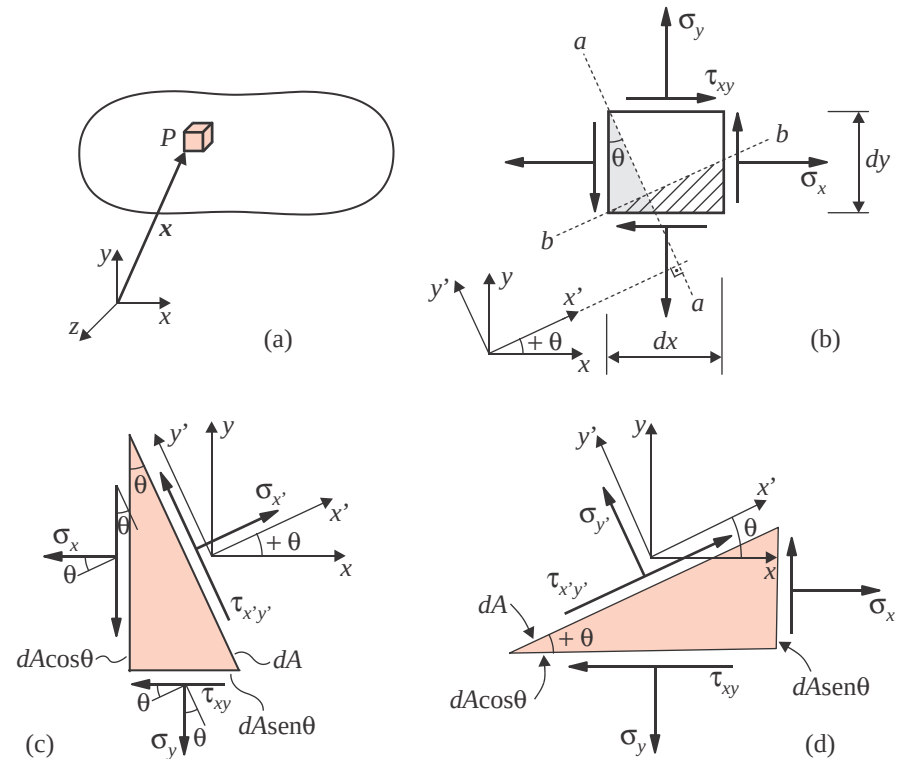


Figura 5.5: (a) Elemento diferencial no ponto P do corpo; (b) Tensões planas no elemento diferencial; (c) (d) Cortes nos elementos diferenciais $a-a$ e $b-b$.

$$\begin{aligned}
\sum F_{x'} \quad &\rightarrow \quad \sigma_{x'} dA = (\sigma_x dA\cos\theta)\cos\theta + (\sigma_y dA \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta \\
&\qquad + (\tau_{xy} dA\cos\theta) \text{ sen } \theta + (\tau_{xy} dA \text{ sen } \theta)\cos\theta, \\
\sum F_{y'} \quad &\rightarrow \quad \tau_{x'y'} dA = -(\sigma_x dA\cos\theta) \text{ sen } \theta + (\sigma_y dA \text{ sen } \theta) \cos\theta \\
&\qquad + (\tau_{xy} dA\cos\theta) \cos\theta - (\tau_{xy} dA \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta,
\end{aligned}$$

Simplificando temos

$$\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \text{ sen}^2\ \theta + 2\tau_{xy} \text{ sen } \theta\cos\theta, \\
\tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \text{ sen } \theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \ \text{sen}^2\theta).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Finalmente, o elemento diferencial original (Figura 5.5b) pode ser cortado por um plano $b-b$, definindo uma superfície inclinada perpendicular ao eixo y', como na figura (d). Nessa superfície atuam $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$. Como já tínhamos obtido $\tau_{x'y'}$ do outro corte, equação $(5.16)_2$, basta uma equação de equilíbrio, na direção y', para determinar $\sigma_{y'}$. Isso resulta uma terceira equação que, juntando a (5.16) define o **conjunto de equações de transformação plana de tensões**:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \text{ sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \text{ sen}\theta\cos\theta, \\
\sigma_{y'} &= \sigma_x \text{ sen}^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \text{ sen}\theta\cos\theta, \\
\tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \text{ sen } \theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \ \text{sen}^2\theta),
\end{aligned}} \tag{5.17}$$

Frequentemente os cálculos são realizados mais facilmente quando representamos essas equações em forma matricial:

$$\{\sigma^{x'}\} = [T]\{\sigma^x\}, \quad \text{onde}$$

$$\{\sigma^{x'}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}, \qquad \{\sigma^x\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{5.18}$$

e $c = \cos\theta$ e $s = \text{sen}\ \theta$. A equivalência entre (5.17) e (5.18) pode facilmente ser verificada por inspeção direta.

Prova-se que a matriz de transformação $[T]$ é sempre não-singular, o que significa que sua inversa $\mathbf{T}^{-1}$ sempre existe.[1] Isso permite determinar a relação inversa de (5.18). Embora $[T]^{-1}$ possa ser facilmente obtida analiticamente ou de forma numérica, numa calculadora, de fato sua expressão pode ser determinada sem nenhum esforço. Basta observar que (5.18) produz $\{\sigma^{x'}\}$ a partir de $\{\sigma^x\}$ se o eixo x' é obtidos por um ângulo θ medido numa rotação anti-horária em torno de z a partir de x. Então, simplesmente trocando o sinal de θ em $[T]$ temos $[T]^{-1}$, que representa a rotação **horária**, de x' a x. Como $\text{sen}(-\theta) = -\ \text{sen}\ \theta$ e $\cos(-\theta) = \cos\theta$, temos

$$\{\sigma^x\} = \mathbf{T}^{-1}\{\sigma^{x'}\}, \qquad \text{onde} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Exemplo 5.2 - Mudanças de componentes em rotação de eixos coordenados

Considere um ponto P de um corpo, como na Figura 5.5a, sob estado plano de tensões com componentes dadas na Figura 5.6a em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as componentes de tensão para um sistema $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana de 30^o no sentido horário em torno do eixo z.

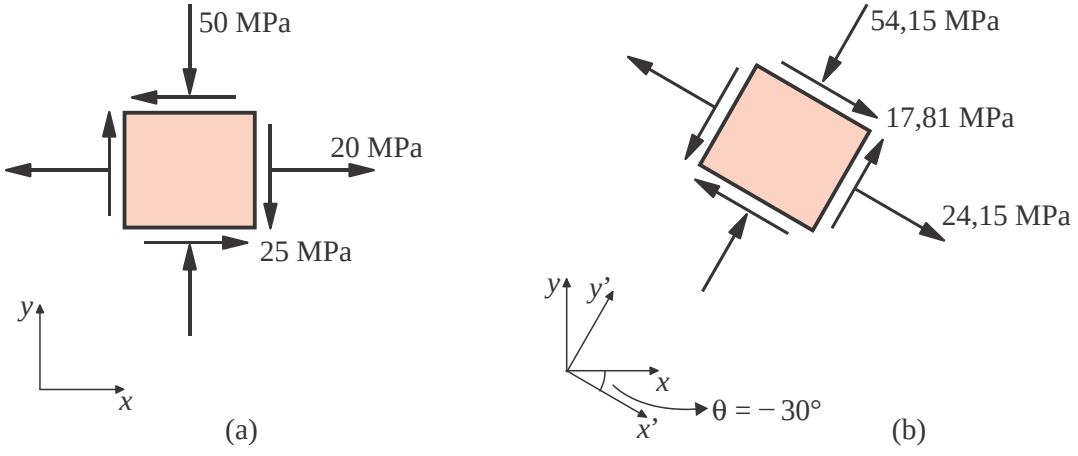


Figura 5.6: (a) Dados do Exemplo 5.1; (b) Componentes nas áreas inclinadas.

Solução:
Observando os dados na Figura 5.6a, identificamos as componentes de tensão como: $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, com as demais componentes nulas. Como o novo sistema $Ox'y'z'$ é definido por 30^o horário, ele é como na Figura 5.6b, tal que $\theta = -30^o$. Substituindo esses valores no lado direito de (5.17) ou (5.18) temos

[1] De fato, prova-se que $\det \mathbf{T} = 1$ para qualquer ângulo θ, isto é, $\det \mathbf{T}$ é sempre não nulo, o que, por definição, significa que $\mathbf{T}$ nunca é uma matriz singular. Também nota-se que, para $\theta = 0$, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, e $\{\sigma^{x'}\} = \{\sigma^x\}$.

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\cos^2(-30^o) & \text{sen}^2(-30^o) & 2\,\text{sen}(-30^o)\cos(-30^o)\\ \text{sen}^2(-30^o) & \cos^2(-30^o) & -2\,\text{sen}(-30^o)\cos(-30^o)\\ -\text{sen}(-30^o)\cos(-30^o) & \text{sen}(-30^o)\cos(-30^o) & \cos^2(30^o)-\text{sen}^2(30^o)\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}20\\ -50\\ -25\end{array}\right\}.$$

A matriz de rotação $\mathbf{T}$ torna-se

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc}0,75 & 0,25 & -0,866\\ 0,25 & 0,75 & 0,866\\ 0,433 & -0,433 & 0,5\end{array}\right].$$

E as tensões nas direções $Ox'y'$ são $\{\sigma^{x'}\} = \{24,15; -54,15; 17,81\}^T$ MPa. Essas componentes são representadas no elemento diferencial na Figura 5.6b. A Figura 5.7 mostra os resultados para as tensões $\{\sigma^{x'}\}$ para todo ângulo de rotação em torno de z, conforme a eq.(5.18). O gráfico plota entre 0^o e 360^o, e mostra que as curvas são periódicas de período 180^o. De fato, esse período é uma característica geral das equações de transformação (5.18).

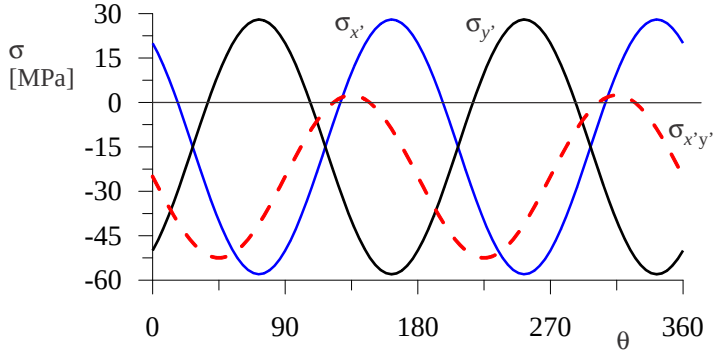


Figura 5.7: Tensões planas $\{\sigma^{x'}\}$ para todo ângulo de rotação em torno de z para os dados do Exemplo 2: $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa.

5.3 Tensões principais e cisalhamento máximo no plano

As equações (5.17) ou (5.18) são adequadas para o cálculo direto, porém, para as deduções que seguem é mais vantajoso converte-las a uma outra forma. Isso é feito usando as conhecidas identidades trigonométricas

$$2\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta, \qquad \text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta), \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta). \tag{5.20}$$

Com isso, (5.17) toma a forma

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta,\\ \sigma_{y'} &= \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta,\\ \tau_{x'y'} &= -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\,\cos\,2\theta.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Se consideramos a tensão normal $\sigma_{x'}$, notamos que para $\theta = 0 \twoheadrightarrow \sigma_{x'} = \sigma_x$. As funções sen 2θ e $\cos 2\theta$ são limitadas a ± 1, conforme θ varia de 0^o a 180^o. **Então $\sigma_{x'}$ tem seus valores limitados, de um mínimo até um máximo**, como ilustrado na Figura 5.7 para o estado de tensões do

Exemplo 1. Esses valores extremos podem ser obtidos seguindo o procedimento usual em cálculo, para a obtenção de máximos e mínimos de funções analíticas: deriva-se a expressão de $\sigma_{x'}$ em relação a θ e iguala-se o resultado a zero, obtendo-se

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) 2 \text{ sen } 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0. \tag{5.22}$$

As raízes $\overline{\theta}$ que satisfazem à segunda igualdade são obtidas de

$$\boxed{\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}.} \tag{5.23}$$

A função tangente tem a conhecida propriedade de que, dado um valor k, existem dois ângulos, α_1 e α_2, que satisfazem tg $\alpha = k$, onde α_1 e α_2 são defasados de 180^o. Então, em (5.23) existem dois ângulos, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$, defasados de 90^o.

Uma vez calculadas as raízes de (5.23), as tensões normais máxima e mínima, σ_1 e σ_2, são obtidas substituindo $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ em $(5.21)_1$ (ou $(5.17)_1$), isto é,

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\overline{\theta}_1 + \tau_{xy} \text{ sen } 2\overline{\theta}_1, \\ \sigma_2 &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\overline{\theta}_2 + \tau_{xy} \text{ sen } 2\overline{\theta}_2. \end{aligned}} \tag{5.24}$$

Posteriormente obteremos expressões fechadas para σ_1 e σ_2 diretamente em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy} (ver equação (5.44) mais a frente), sem a necessidade de obtenção prévia de $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$.

Os ângulos $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ definem duas direções, denominadas **direções principais**, e dois eixos de coordenadas, 1 e 2. As tensões normais atuantes em faces orientadas nessas direções são denominadas **tensões principais**, σ_1 e σ_2, no plano $Oxyz$, como ilustrado na Figura 5.8. É usual designar a tensão normal máxima por σ_1 e a mínima por σ_2. Então, em (5.24), pode ser necessário alternar $\overline{\theta}_1$ por $\overline{\theta}_2$ em cada equação.

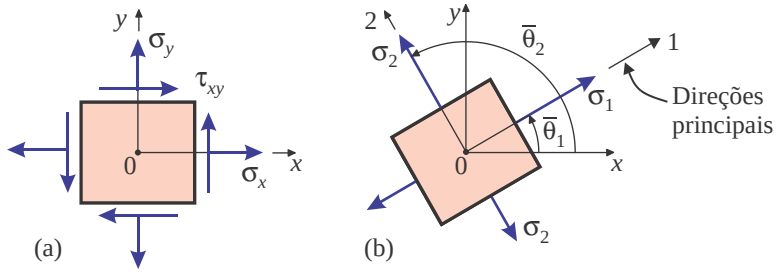


Figura 5.8: Direções principais 1, 2 e tensões principais σ_1 e σ_2 no plano Oxy.

Consideremos agora $\tau_{x'y'}$ em $(5.21)_3$. Os ângulos em que $\tau_{x'y'} = 0$ são dados por

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}. \tag{5.25}$$

Comparando com (5.23) notamos que $\varphi = \overline{\theta}$, i.e., as mesmas direções em que as tensões normais são mínima e máxima, são também as direções em que o cisalhamento é nulo. Então, **nas direções principais as tensões normais são extremas e o cisalhamento é nulo**, como ilustrado na Figura 5.8b.

5.3.1 Determinação dos ângulos na função arco tangente

Os eixos principais de tensão 1 e 2 são obtidos pelas raízes de (5.23), i.e., pela função trigonométrica arco tangente. Temos tg $2\theta = \tau_{xy}/d$, onde $d = (\sigma_x - \sigma_y)/2$. No plano trigonométrico, os ângulos

variam de 0 a 2π. Entretanto, a função arco tangente é capaz de identificar apenas ângulos entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, i.é., não consegue identificar ângulos no segundo e terceiro quadrantes. De fato, ângulos no terceiro e no primeiro quadrantes possuem o mesmo valor de tangente, da mesma forma que ângulos nos quadrantes dois e quatro. Dados dois valores de τ_{xy} e d, eles podem ser representados como um ponto no plano cartesiano associado a um raio a partir da origem, como o ponto A na Figura 5.9. Ali está também representado o ângulo associado $2\theta_1$. Se o ponto estiver em A ou B (no primeiro ou no terceiro quadrantes), i.e., se $\tau_{xy} > 0$ e $d > 0$ ou $\tau_{xy} < 0$ e $d < 0$, se obtém $\text{atan}(\tau_{xy}/d) = 2\theta_1$. Se o ponto estiver em C ou D, no segundo ou no quarto quadrantes, i.e., $\tau_{xy} > 0$ e $d < 0$ ou $\tau_{xy} < 0$ e $d > 0$, se obterá $\text{atan}(2\theta_1) = -2\theta_1$.

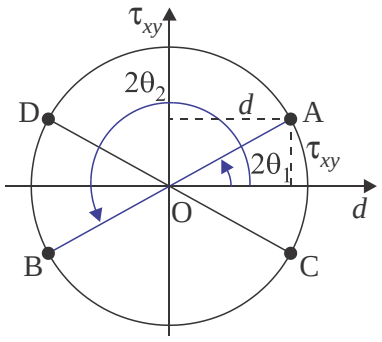


Figura 5.9: Ponto A de coordenadas (τ_{xy}; d) e ponto B de coordenadas ($-\tau_{xy}$; -d).

Em diversas situações, é útil identificar o ângulo na faixa $-\pi$ e π, correspondente ao quadrante correto em que o ponto se localiza no plano. Isso pode ser conseguido de diversas formas, e apresentamos uma delas a seguir. O cálculo é feito em quatro casos, dependendo de qual quadrante o ponto se localiza. Primeiramente é feito o cálculo direto $2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d$. Em seguida realizam-se correções para determinar $2\bar{\theta}$:

1.	Se $d \neq 0 \rightarrow$	$2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d$
2. Quadrante 1:	se $\tau_{xy} > 0$ e $d > 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta} = 2\theta$,
3. Quadrante 4:	se $\tau_{xy} < 0$ e $d > 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta} = 2\theta$,
4. Quadrante 2:	se $\tau_{xy} > 0$ e $d < 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta} = 2\theta + \pi$,
5. Quadrante 3:	se $\tau_{xy} < 0$ e $d < 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta} = 2\theta + \pi$.

(5.26)

Caso $d = 0$, se $\tau_{xy} > 0$ se tem $2\bar{\theta} = \pi/2$ e se $\tau_{xy} < 0$ se tem $2\bar{\theta} = -\pi/2$.

5.3.2 Tensões cisalhantes máximas

Buscaremos agora as direções em que a tensão cisalhante seja extrema, mínima ou máxima no plano Oxy. isso é feito derivando $(5.21)_3$ em relação a θ e igualando a zero:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\ \text{sen}\ 2\theta = 0. \tag{5.27}$$

As raízes β que satisfazem à segunda igualdade são dadas por

$$\boxed{\text{tg}\ 2\beta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}} \tag{5.28}$$

Novamente, existem dois ângulos, β_1 e β_2, que satisfazem (5.28), defasados de 90^o. Esses dois ângulos definem dois eixos ortogonais, a e b em cujas faces as tensões cisalhantes são máxima e mínima, respectivamente, dentre todos os eixos no plano xy.

Comparando com (5.23), vemos que $\text{tg}\ 2\bar{\theta} = -1/\text{tg}\ 2\beta$. De trigonometria temos que, se $\text{tg}\ \alpha = 1/\text{tg}\ \delta$, então α e δ são defasados de 90^o. Então, $\bar{\theta}$ e β são defasados de $\pm 45^o$, isto é, as direções principais e as direções de máximo e mínimo cisalhamento são defasados de múltiplos de $\pm 45^o$.

Uma vez que se tenha calculado os ângulos das direções principais, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_1$, que definem os eixos principais 1 e 2, da máxima e mínima tensão normal respectivamente, os ângulos que definem os dois eixos a e b onde a tensão cisalhante e máxima e mínima no plano xy, podem ser calculadas mais facilmente que com o uso de (5.28), bastando fazer:

$$\boxed{2\beta_1 = 2\overline{\theta}_1 - \frac{\pi}{2}, \qquad 2\beta_2 = 2\beta_1 + \pi.} \tag{5.29}$$

Usando diretamente (5.28) também se obterão as mesmas duas raízes, porém possivelmente o ângulos β_1 e β_2 obtidos indiquem os eixos de tensão cisalhante mínima e máxima, respectivamente. Já com o uso de (5.29) se terá sempre que β_1 indicará o plano de máximo (positivo) e β_2 o plano de mínimo (negativo), se $\overline{\theta}_1$ tiver sido obtido para indicar a máxima tensão normal.

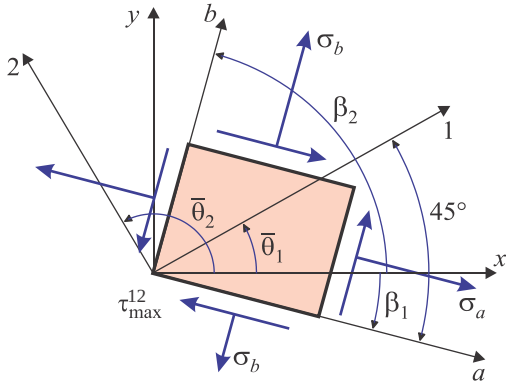


Figura 5.10: Direções $Oxyz$, 012z e 0abz, tensões principais e tensões cisalhantes máximas no plano xy, $\tau^{12}_{\max}$.

A Figura 5.10 ilustra a disposição relativa das direções principais O12z no plano $Oxyz$, e as direções Oabz de cisalhamento máximo, $\tau^{12}_{\max}$, definidos pelos ângulos β_1 e β_2. O valor $\tau^{12}_{\max}$ é obtido numericamente levando β_1 a $(5.21)_3$:

$$\boxed{\tau^{12}_{\max} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen } 2\beta_1 + \tau_{xy}\cos 2\beta_1.} \tag{5.30}$$

Tomando os valores de β_1 e β_2 obtidos por (5.29) e aplicando-os em $(5.21)_3$, obtém-se dois valores de mesmo módulo e sinais contrários, i.e., $\tau^{12}_{\max} \geq 0$ e $\tau^{12}_{\max} = -\tau^{12}_{\max}$. O primeiro indica a tensão nas duas faces normais no eixo a (Figura 5.10) e o segundo dá o valor nas faces normais ao eixo b.
Observação: Posteriormente, na equação (5.43), indicaremos uma expressão fechada para $\tau^{12}_{\max}$, diretamente em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}.
Observação: O supra-índice 12 em $\tau^{12}_{\max}$ indica que esse valor é a máxima tensão cisalhante apenas para todas as transformações realizadas por rotação plana em torno do eixo z, i.e., no plano xy (que é o mesmo plano ab ou 12). Posteriormente, outros dois valores de tensão cisalhante máximas serão obtidos, para transformações em dois outros planos ortogonais a 12.

Exemplo 5.2 - Determinação das tensões extremas no plano Oxy.

Para o estado de tensões do Exemplo 5.1, determine as tensões extremas no plano Oxy.

Solução:
As componentes de tensão conhecidas são em relação aos eixos $Oxyz$: $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}$ MPa.
As direções principais e direções de cisalhamento máximo no plano Oxy vem de (5.23) e (5.28):

$$\begin{aligned}
\text{tg } 2\overline{\theta} &= \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2} = \frac{-25}{[20-(-50)]/2} = \frac{-25}{35} = -0,7143 \qquad \rightarrow \begin{cases} \overline{\theta}_1 = -17,77^o, \\ \overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_1 + 90^o \\ \quad = +72,23^o. \end{cases} \\
2\beta_1 &= 2\overline{\theta}_1 + \frac{\pi}{2} = 2(-17,77^o) - 90^o = -62,77^o \qquad \rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -62,77^o, \\ \beta_2 = \beta_1 + 90^o = 27,23^o.. \end{cases} \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Essas direções são vistas na Figura 5.11a. Note que para o cálculo de $2\overline{\theta}$, o ponto $(\tau_{xy};d)$, com $d=(\sigma_x-\sigma_y)/2$, se encontra no quarto quadrante e para o cálculo de 2β, o ponto $(-d;\tau_{xy})$ encontra-se no terceiro quadrante. O cálculo de β_1 foi feito a partir de $\overline{\theta}_1$: $2\beta_1 = 2\overline{\theta}_1 - \pi/2$, de forma a gerar uma tríade levógera de eixos $0abz$. Entretanto, uma outra tríade levógera, que designamos por $0a'b'z'$, pode ser obtida seguindo as regras em (5.26), calculando atan(1/0,7143) $= 54,46°$, como se estivesse no primeiro quadrante e em seguida fazendo a correção para o terceiro quadrante: $2\beta'_1 = 54,46° + 180° = 234°$, o que resulta em $\beta'_1 = 117,2°$. Em seguida, $\beta'_2 = \beta'_1 + 90^o = 207^o$. Ambas as tríades definem as mesmas direções, apenas com os eixos a' e b' são os eixos a e b respectivamente, refletidos em torno da origem 0, como na Figura 5.11. **No restante do texto usaremos sempre o cálculo de β_1 através da eq. (5.29)**.

Os valores extremos das tensões no plano Oxy vem de $(5.21)_1$ e $(5.21)_3$, ou (5.24) e (5.30):

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2(-17,77^o)) + (-25)\text{ sen }(2(-17,77^o)), \\
\sigma_2 &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times 72,23^o) + (-25)\text{ sen }(2\times 72,23^o), \qquad (5.32) \\
\tau^{12}(\beta_1) &= -\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\text{ sen }(2\times(-62,77^o)) + (-25)\cos(2\times(-62,77^o)) = 43,01, \\
\tau^{12}(\beta_2) &= -\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\text{ sen }(2\times 27,23^o) + (-25)\cos(2\times 27,23^o) = -43,01.
\end{aligned}$$

Logo, $\sigma_1 = 28,01$ MPa, $\sigma_2 = -58,01$ MPa, $\tau^{12}_{\max} = \tau^{12}(\beta_2) = 43,01$ MPa.

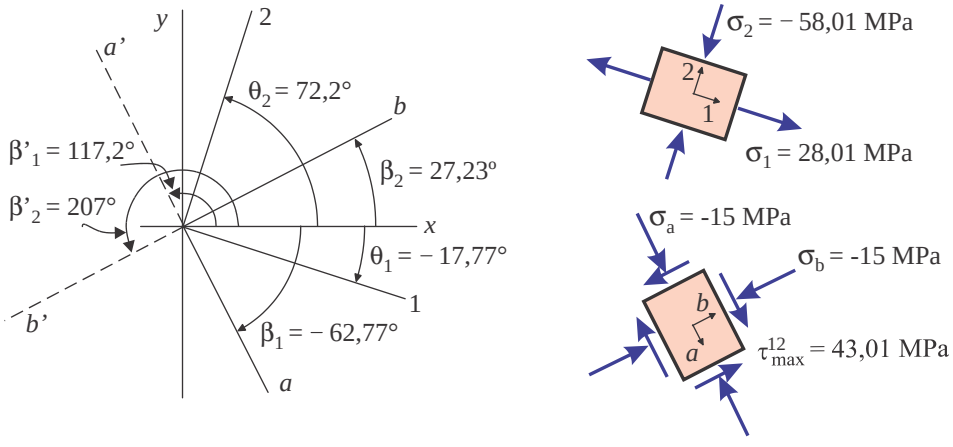


Figura 5.11: Resultados do Exemplo 5.2. O eixo z é perpendicular para cima do plano.

Observe que sempre os dois valores de tensão cisalhante, $\tau^{12}(\beta_1)$ e $\tau^{12}(\beta_2)$, terão valores absolutos idênticos. Esses valores, assim como as direções principais 1 e 2, e as direções a e b definidas por β_1 e β_2, são vistos na Figura 5.11.

Observe que nas direções dos eixos a e b, em que o cisalhamento é máximo no plano, as tensões normais não são nulas. Elas podem ser facilmente obtidas usando as eqs.$(5.21)_1$ aplicada em β_1 e β_2:

$$\sigma_a = \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times(-62,77^o)) + (-25)\,\text{sen}\,(2\times(-62,77^o)),$$
$$\sigma_b = \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) + \left(\frac{20-(-50)}{2}\right)\cos\,(2\times 27,23^o) + (-25)\,\text{sen}\,(2\times 27,23^o),$$

que resultam em $\sigma_a = \sigma_b = -15,0$ MPa. **Nota-se que esses valores são sempre idênticos**.

O fluxograma para o cálculo das tensões extremas e os ângulos de orientação dos eixos correspondentes e o seguinte

1. Cálculo das tensões principais	
1.1 Eixo principal 1	
a. Se $d \neq 0 \;\rightarrow\; 2\theta = \text{atan}\tau_{xy}/d$	onde $d = (\sigma_x - \sigma_y)/2$
a1. se $\tau_{xy} > 0$ e $d > 0 \rightarrow$ Quadrante 1:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta$
a2. se $\tau_{xy} < 0$ e $d > 0 \rightarrow$ Quadrante 4:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta$
a3. se $\tau_{xy} > 0$ e $d < 0 \rightarrow$ Quadrante 2:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta + \pi$
a4. se $\tau_{xy} < 0$ e $d < 0 \rightarrow$ Quadrante 3:	$2\bar{\theta}_1 = 2\theta + \pi$
b1. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} > 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta}_1 = \pi/2$
b2. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} < 0 \rightarrow$	$2\bar{\theta}_1 = -\pi/2$
b3. Se $d = 0$ e $\tau_{xy} = 0 \rightarrow$	$\bar{\theta}_1 = 0$
1.2 Eixo principal 2	$2\bar{\theta}_2 = 2\bar{\theta}_1 + \pi$
1.3 Tensão principal máxima	$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
Tensão principal mínima	$\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
2. Eixos a e b de cisalhamento máximo:	$2\beta_1 = 2\bar{\theta}_1 - \frac{\pi}{2}$
	$2\beta_2 = 2\beta_1 + \pi$
2.1 Tensões cisalh. máx. e mín. no plano xy	$\left.\begin{matrix}\tau^{12}_{\max}\\ \tau^{12}_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

(5.33)

As expressões mostradas para as tensões principais e cisalhante máxima no plano xy serão ainda deduzidas na próxima seção. Todos os ângulos obtidos são positivos se forem anti-horários medidos a partir do eixo x, em torno do eixo z. Os ângulos obtidos serão tais que $\bar{\theta}_1$ corresponde ao eixo principal 1, tal que σ_1 é a máxima tensão, enquanto $\bar{\theta}_2$ é associado à tensão mínima σ_2 e ao eixo principal 1. As tríades $012z$ obtidas com esses ângulos são levógeras. Da mesma forma, os ângulos β_1 e β_2 definem os eixos a e b, e a tensão cisalhante máxima e mínima no plano xy. A tríade $0abz$ é levógera.

5.4 Círculo de Mohr para rotação plana de EPT

Quando observamos as três equações (5.21), observamos que, de fato, necessitamos apenas de duas, a primeira e a terceira. Note que a segunda expressão, de $\sigma_{y'}$, produz a tensão normal à face orientada na direção y'. Mas a primeira equação produz $\sigma_{x'}$ para uma face orientada na direção x', em qualquer ângulo θ. A única diferença entre os eixos x' e y' é que x' é orientado de θ a partir de x, enquanto y' é orientado em $\theta + 90^o$ a partir de x. Então, se usarmos a primeira equação (5.21) com $\theta + 90^o$ em lugar de θ, também obteremos $\sigma_{y'}$. Então reescreveremos a primeira e terceira das equações (5.21) como

$$\left\| \begin{array}{ll} \sigma - \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta, \\ \tau \qquad\qquad\qquad\qquad = -\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \ \cos 2\theta. \end{array} \right. \tag{5.34}$$

Com isso temos a tensão normal e cisalhante em uma superfície orientada por qualquer θ em relação ao eixo x.

Ainda em 1895 **o engenheiro alemão Otto Mohr identificou que as equações (5.34) são, de fato, a forma parametrizada de uma circunferência no plano $\sigma - \tau$, onde θ é o parâmetro**. Para entender melhor, consideremos a equação parametrizada de um círculo no plano cartesiano Oxy

$$x - x_o = R\cos\alpha, \qquad y - y_o = R \text{ sen } \alpha. \tag{5.35}$$

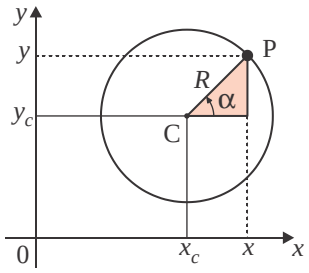


Figura 5.12: Círculo de Mohr no plano cartesiano, centro C e ponto P de coordenadas (x, y).

Como pode ser visto na Figura 5.12, em que a coordenada de um ponto P é (x, y) num círculo. Consideramos o triângulo sombreado, onde C é o centro do círculo, de coordenadas $(x_c; y_c)$, R é o raio e α o parâmetro, que no caso é o ângulo mostrado na figura. O parâmetro θ pode ser eliminado de (5.35). Para isso, basta elevar ambas as equações ao quadrado e somar termo a termo, o que resulta

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2. \tag{5.36}$$

Essa é a forma mais conhecida da equação do círculo.

Agora, podemos comparar (5.35) a (5.34). As variáveis são σ e τ. Os parênteses e τ_{xy} são constantes conhecidas, que serão relacionadas ao raio do círculo. Para extrair o parâmetro θ de (5.34), **transferimos a constante $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ na primeira equação para o lado esquerdo da igualdade, e elevamos ambas as equações ao quadrado:**

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + 2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \text{ sen}^2 2\theta.$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \text{ sen}^2\ 2\theta - 2\tau_{xy}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \text{sen } 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \ \cos^2 2\theta.$$

Somando os termos de cada lado da igualdade em ambas as equações e aplicando a identidade trigonométrica básica $\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$, obtém-se:

$$\left[\sigma - \underbrace{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)}_{\sigma_c}\right]^2 + \tau^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}. \tag{5.37}$$

Essa equação tem o mesmo formato da equação do círculo (5.36), isto é,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Coordenadas do centro:} & \{\sigma_c;\tau_c\} = \left\{\left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right);0\right\}, \\ \text{Raio do círculo:} & R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}, \\ \text{Equação do círculo:} & (\sigma-\sigma_c)^2+\tau^2 = R^2. \end{array}} \tag{5.38}$$

Esse é o chamado **círculo de Mohr**, ilustrado na Figura 5.13. Ele representa graficamente o conjunto de equações (5.34) de transformações planas de estados planos de tensões. Embora os valores numéricos possam ser facilmente obtidos pelas equações, as representações gráficas do processo via círculo de Mohr permite uma visualização qualitativa das transformações que é bastante útil ao engenheiro.

Comparando $(5.38)_3$ com (5.36), observamos que o círculo de Mohr tem o seu centro sobre o eixo das abcissas σ.

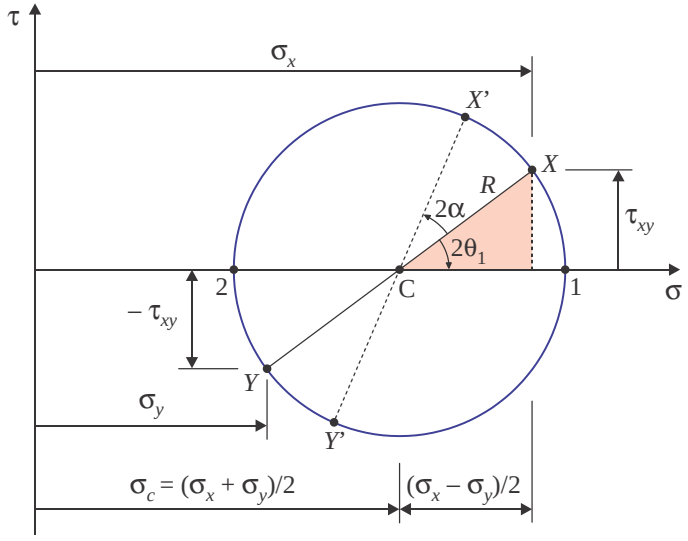


Figura 5.13: Círculo de Mohr no plano $\sigma-\tau$.

As tensões $(\sigma;\tau)$ que atuam em cada superfície orientada de um certo θ em relação a x, são representadas por um ponto no círculo. Em particular, para $\theta = 0^o$ e $\theta = 90^o$, temos as tensões nas superfícies do volume diferencial perpendiculares aos eixos x e y respectivamente, como na Figura 5.8a. Então conforme (5.34), as tensões nessas faces são

$$\begin{array}{llllll} \text{Eixo } x, & \theta & = & 0^o & \rightarrow & (\sigma;\tau) = (\sigma_x;\tau_{xy}), \\ \text{Eixo } y, & \theta & = & 90^o & \rightarrow & (\sigma;\tau) = (\sigma_y;-\tau_{xy}). \end{array} \tag{5.39}$$

As **coordenadas desses dois pontos podem ser plotadas** no plano $\sigma-\tau$ como os pontos X e Y (Figura 5.14), de coordenadas:

$$X = (\sigma_x;\tau_{xy}) \quad \text{e} \quad Y = (\sigma_y;-\tau_{xy}). \tag{5.40}$$

Como o centro do círculo tem abcissa $\sigma_c = (\sigma_x+\sigma_y)/2$, segue-se que os pontos X e Y sempre serão diametralmente opostos no círculo, formando sempre a reta XCY da Figura 5.14. Como já sabemos que os pontos correspondentes aos outros infinitos eixos respondem a um círculo, (equações (5.38)), bastam dois pontos diametrais quaisquer, por exemplo X e Y, para definir o círculo, como na Figura 5.13.

Então, cada par de pontos diametralmente opostos no círculo corresponde às tensões num par de eixos ortogonais no ponto do material. Por exemplo, as tensões $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$

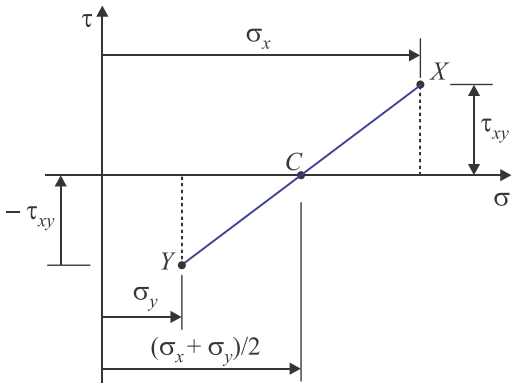


Figura 5.14: Plotagem dos pontos $X(\sigma_x;\tau_{xy})$ e $Y(\sigma_x;-\tau_{xy})$ no plano $\sigma-\tau$.

associadas aos eixos $Ox'y'$, são representadas por dois pontos de coordenadas $X'=(\sigma_{x'};\sigma_{y'})$ e $Y'=(\sigma_{y'};-\tau_{x'y'})$, como na Figura 5.13.

No círculo é visível que existirá um par de eixos, 1 e 2, em que as tensões são máxima e mínima no plano Oxy. São os dois pontos indicados na Figura 5.13, cujas coordenadas, σ_1 e σ_2, são as **tensões principais** no plano Oxy.

O ângulo θ_1, entre o eixo principal 1 e o eixo x, pode agora ser visualizado trigonometricamente no triângulo sombreado da Figura 5.13. Observando as abcissas de X e Y, nota-se que o cateto inferior do triângulo é $d=(\sigma_x-\sigma_y)/2$, e o outro cateto é τ_{xy}. Então,

$$\text{tg } 2\overline{\theta}=\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}, \tag{5.41}$$

No círculo, um ângulo positivo aparece como horário. Essa é a mesma expressão (5.23) obtida pelas equações de transformação, para obter a direção principal 1. No círculo, o ângulo da direção principal 2, $2\overline{\theta}_2$, é obtido simplesmente adicionando 180^o a $2\overline{\theta}_1$. Isso pode ser visto na Figura 5.15, no ângulo $2\overline{\theta}_2$ entre as representações do eixo x e do eixo 2.

O eixo a onde ocorre o cisalhamento máximo no plano é visto facilmente no círculo, como o ponto de maior ordenada τ. O ângulo β entre os eixos a e x é obtido trigonometricamente do triângulo hachurado na Figura 5.15:

$$\text{tg } 2\beta=-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)/2}{\tau_{xy}}, \tag{5.42}$$

que é a expressão já obtida em (5.28) a partir das equações gerais.

Da Figura 5.15 verifica-se claramente que $\tau^{12}_{\max}$ é igual ao raio do círculo, i.e., o cisalhamento máximo no plano $Oxyz$ é

$$\boxed{\tau^{12}_{\max}=R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2_{xy}}} \tag{5.43}$$

Também da Figura 5.15, as tensões principais σ_1 e σ_2 são dadas por

$$\left\|\begin{array}{l}\sigma_1=\sigma_c+R\\ \sigma_2=\sigma_c-R\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \boxed{\sigma_{1,2}=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2_{xy}}}, \tag{5.44}$$

onde os sinais + e − correspondem a σ_1 e σ_2 respectivamente. **Usando (5.43) e (5.44) podemos obter as tensões extremas no plano Oxy sem ter que primeiro obter os ângulos $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ e β, como ocorria no uso de (5.24) e (5.30).**

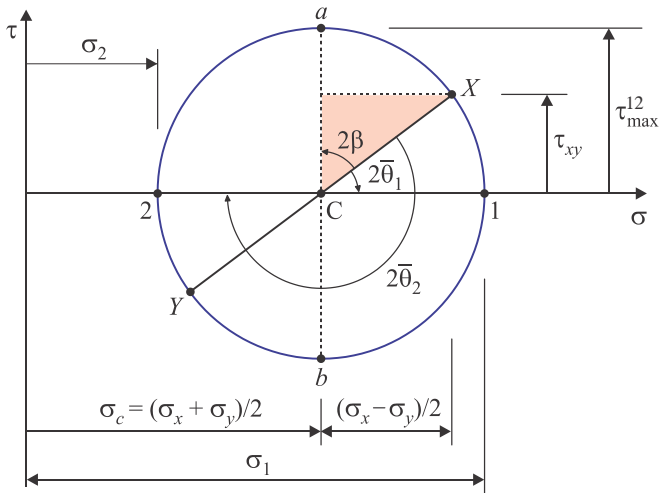


Figura 5.15: Direção da tensão cisalhante máxima no plano xy.

Duas características das equações (5.34) são:
- Os ângulos físicos de rotação entre dois eixos, no círculo de Mohr são duplicados, i.e., uma rotação física θ torna-se 2θ;
- No círculo os ângulos são representados com orientação invertida da orientação real, i.e., uma rotação física θ anti-horária é representada no círculo como horária.

(5.45)

A duplicação do ângulo é claramente vista no 2θ que aparece nas equações (5.34). Esses dois efeitos podem ser ilustrados considerando os dois pares de eixos do círculo de Mohr da Figura 5.13, Oxy e $Ox'y'$, representados pelos pontos XY e $X'Y'$. Ali, o eixo x' está representado por uma rotação **anti-horária** 2α a partir do eixo x. Fisicamente, o eixo x' é obtido por uma rotação **horária** de α a partir de eixo x, como visto na Figura 5.16.

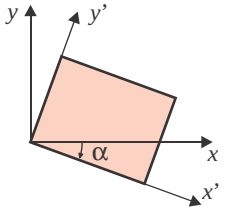


Figura 5.16: Ângulo α de definição de x', associado ao círculo de Mohr da Figura 5.13.

5.5 Processo de construção do círculo de Mohr plano

As etapas de construção do círculo de Mohr são as seguintes:
Etapa 1 - Conhecidas as componentes de tensões planas em relação a um sistema qualquer de eixos, σ_x, σ_y e τ_{xy}, plotar no plano $\sigma - \tau$ dois pontos de coordenadas: $X = (\sigma_x; \tau_{xy})$ e $Y = (\sigma_y; -\tau_{xy})$.
Etapa 2 - Localizar o centro do círculo em $\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ e traçar o círculo de Mohr passando por X e Y.
Etapa 3 - Localizar os pontos extremos do círculo: as tensões principais σ_1 e σ_2 e o cisalhamento máximo no plano, $\tau^{12}_{\max}$, como na Figura 5.15, e os eixos associados, $O12$ e Oab.
Etapa 4 - Se o desenho for feito em escala [2], os valores de σ_1 e σ_2 e $\tau^{12}_{\max}$ podem ser diretamente

[2] Esse era o procedimento tradicional desde o final do século 19 até os anos 1970. Com o advento das calculadoras

obtidos simplesmente medindo com uma régua as coordenadas dos pontos. Os ângulos entre os eixos 1 e x e a e x, ($\overline{\theta}_1$ e β_1), são igualmente medidos com transferidor e tem suas orientações invertidas para definir as orientações físicas dos eixos. Entretanto, é mais simples obter os valores das equações do fluxograma da eq.(5.33).

Exemplo 5.3 - Aplicação de círculo de Mohr em EPT.

Para o estado de tensões do Exemplo 5.2, $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}^T$ MPa, construa o círculo de Mohr e indique as tensões extremas.

Solução:
Seguimos as etapas indicadas no início da seção.
Etapa 1 - As coordenadas dos pontos que representam os eixos x e y são $X = (\sigma_x; \tau_{xy}) = (20; -25)$ MPa e $Y = (\sigma_y; -\tau_{xy}) = (-50; 25)$ MPa.
Etapa 2 - O centro do círculo fica em $\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (20 + (-50))/2 = -15$ MPa. Temos os pontos X, Y, e C no plano $\sigma - \tau$, como na Figura 5.17, o que permite desenhar a linha reta diagonal e traçar o círculo.

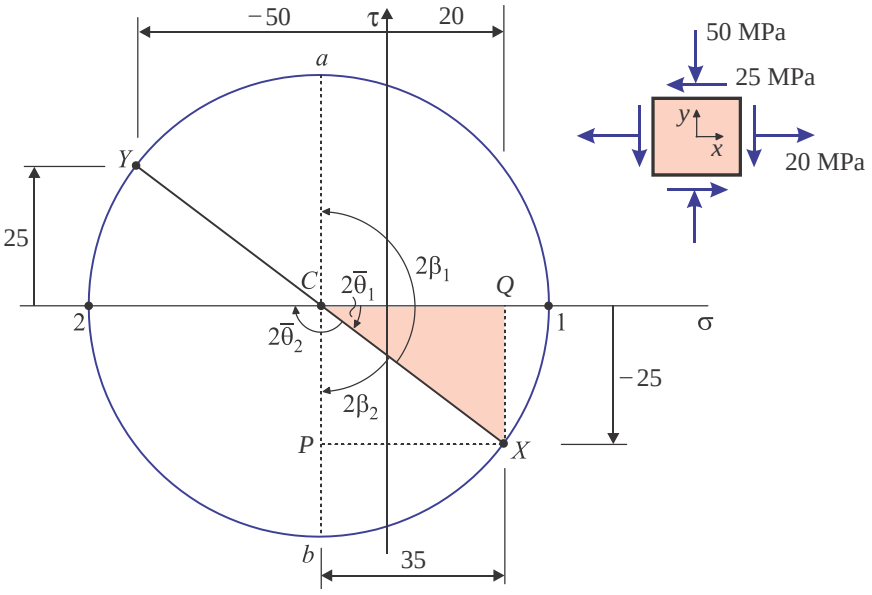


Figura 5.17: Círculo de Mohr do Exemplo 5 .3. Tensões em MPa.

Os pontos correspondentes aos eixos 1.2, a e b são facilmente identificáveis. Os valores podem ser mais facilmente obtidos pelas equações do fluxograma da eq.(5.33). As tensões principais vem de (5.44):

$$\sigma_{1,2} = \underbrace{\left(\frac{20 + (-50)}{2}\right)}_{\sigma_c} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{20 - (-50)}{2}\right)^2 + (-25)^2}}_{R} = -15 \pm 43,01 \text{ MPa}. \qquad (5.46)$$

Como, de (5.43), $\tau^{12}_{\max} = R$, temos que $\tau^{12}_{\max} = 43,01$ MPa, $\sigma_1 = 28,01$ MPa e $\sigma_2 = -58,01$ MPa, como já tinha sido obtido no Exemplo 5.2, equações (5.32).

Os ângulos $\overline{\theta}$ e β são obtidos diretamente do círculo de Mohr, usando relações trigonométricas. Assim, o triângulo sombreado na Figura 5.17 produz

eletrônicas e computadores, os valores numéricos são mais facilmente obtidos pelas equações, e o círculo é apenas esboçado, a mão livre, para permitir ao engenheiro uma interpretação visual do processo.

$$\text{tg } 2\overline{\theta}_1 = \frac{-25}{(20-(-50))/2} = \frac{-25}{35} = -0,7143 \quad \rightarrow \quad \overline{\theta}_1 = -17,77^o, \tag{5.47}$$

e do triângulo complementar, CPX, tem-se

$$\text{tg } 2\beta_2 = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = -\frac{(20-(-50))/2}{-25} = 1,4 \quad \rightarrow \quad \beta_2 = 27,23^o. \tag{5.48}$$

(No círculo, ângulos horários, como $2\beta_2$, são positivos.) Observando o círculo, nota-se que os demais ângulos podem ser obtidos por

$$\begin{array}{rcll} 2\beta_1 & = & 2\beta_2 - 180^o & \rightarrow \quad \beta_1 = -62,77^o, \\ 2\overline{\theta}_2 & = & 2\overline{\theta}_1 + 180^o + & \rightarrow \quad \overline{\theta}_2 = 72,23^o, \end{array} \tag{5.49}$$

que são os mesmos valores obtidos pelas equações do fluxograma em (5.33).
Observações:

1. A correta orientação das rotações dos eixos é obtida invertendo o sentido de rotação indicado no círculo de Mohr.
2. Ângulos positivos são anti-horários no elemento infinitesimal, e horários no círculo de Mohr.
3. Deve-se verificar que as tríades de eixos, O123 e Oabz sejam levógeras, i.e., anti-horárias.

No exemplo temos:

- No círculo, o eixo 1 é obtido por uma rotação $2\overline{\theta}_1 = 2 \times 17,77^o$ **anti-horária** a partir do eixo x. Logo, a rotação física do eixo é $\overline{\theta}_1 = -17,77^o$, i.e., **horária** a partir de x, como visto na Figura 5.11.
- No círculo, o eixo 2 é obtido por uma rotação **horária** $2\overline{\theta}_2 = 2 \times 72,23^o$. Logo, o correto é $\overline{\theta}_2 = 72,23^o$ **anti-horário** a partir de x, como na Figura 5.11.
- No círculo, o eixo a de tensão cisalhante máxima é obtido por uma rotação **anti-horária** $2\beta_1 = 2 \times 62,77^o$ a partir do eixo x. Logo, o correto é $\beta_1 = -62,77^o$, **horário,** a partir de x como na Figura 5.11.

Trabalhando com o círculo, utilizam-se apenas os módulos dos ângulos, as orientações dos eixos 1, 2, a e b tornam-se graficamente óbvias a partir do eixo x (ou mesmo do eixo y).

Exemplo 5.4 - Transformação de tensões via círculo de Mohr

Considere as componentes de tensão (EPT) em relação aos eixos Oxy, Figura 5.18a. Determine as componentes em relação ao sistema $Ox'y'z$ definido por uma rotação horária $\theta = -25^o$. Faça a representação da transformação no círculo de Mohr.

Solução:
O círculo de Mohr é gerado plotando os dois pontos diametrais conhecidos no plano $\sigma - \tau$:

$$\begin{array}{rcl} X & = & (\sigma_x; \tau_{xy}) = (40; 25) \text{ MPa}, \\ Y & = & (\sigma_y; -\tau_{xy}) = (10; -25) \text{ MPa}. \end{array}$$

Fechando o círculo a partir do seu centro, $\sigma_c = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (40+10)/2 = 25$ MPa, temos o resultado na Figura 5.19.

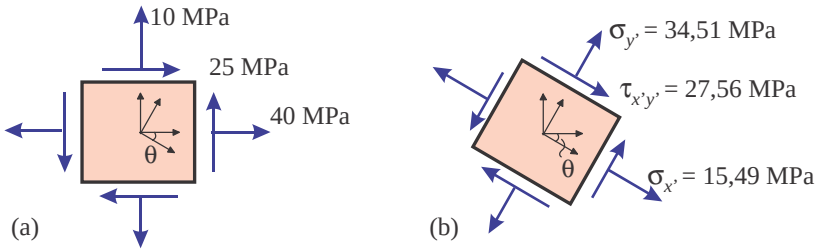


Figura 5.18: (a) Dados do Exemplo 5.4; (b) tensões no sistema $Ox'y'$.

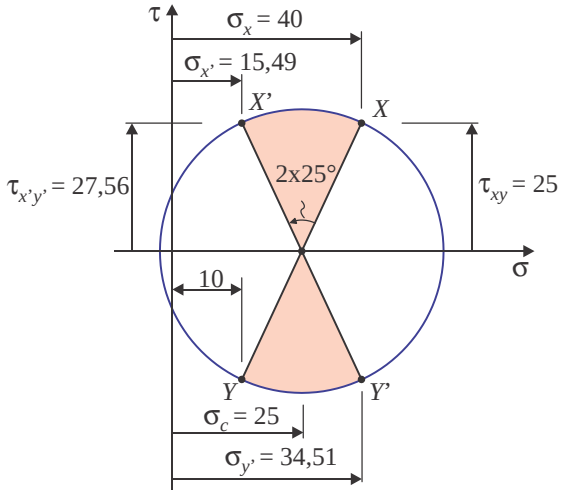


Figura 5.19: Círculo de Mohr para a transformação do Exemplo 5.4 - (tensões em MPa).

O novo sistema de eixos é definido tal que o eixo x' é gerado por uma **rotação horária (em torno de** z**)** a partir de x (Figura 5.18a). Logo, o eixo x' será representado no círculo por uma **rotação anti-horária** do eixo CX no valor $2\theta = 2 \cdot 25^o = 50^o$. Isso define a linha tracejada CX' na Figura 5.19. Extrapolando a linha CX' temos a linha CY'.

Os valores das tensões no elemento diferencial nas faces normais a x' e y' podem ser obtidos medindo diretamente na figura (se feita em escala), as coordenadas dos pontos X' e Y'. Entretanto, valores numéricos desse tipo podem ser mais facilmente obtidos pelas equações de transformação, equações (5.17), (5.18) ou (5.21). Usando (5.18) com $\theta = -25^o$, temos

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cos^2 25^o & \text{sen}^2 25^o & 2\ \text{sen}25^o \cos 25^o \\ \text{sen}^2 25^o & \cos^2 25^o & -2\ \text{sen}25^o \cos 25^o \\ -\ \text{sen}25^o \cos 25^o & \text{sen}25^o \cos 25^o & (\cos^2 25^o - \text{sen}^2 25^o) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 40 \\ 10 \\ 25 \end{array} \right\} \text{MPa},$$

Cuja solução é: $\sigma_{x'} = 15,49$ MPa, $\sigma_{y'} = 34,51$ MPa e $\tau_{x'y'} = 27,56$ MPa. Essas tensões são representadas no elemento diferencial na Figura 5.18b.

5.6 Tensões principais num estado triaxial de tensões

Todo o desenvolvimento apresentado nas seções anteriores concentra-se na transformação de estados planos de tensão (EPT) sob rotação plana do sistema de eixos coordenados em torno do eixo z. Nessa seção é apresentada, de forma sucinta, os resultados da teoria de mecânica do continuo para a determinação de tensões principais no caso geral de um estado triaxial de tensões.

Dada a matriz $[\sigma]$ das componentes de tensão em relação a um certo sistema de coordenadas

$Oxyz$. Prova-se [5][7] que as **tensões principais são os autovalores de** $[\sigma]$, isto é, são os três valores escalares σ_j (isto é, σ_1, σ_2 e σ_3), que fazem com que o determinante de $([\sigma] - \sigma_j[I])$ seja nulo, ($[I]$ é a matriz identidade de ordem 3×3). De forma compacta tem-se três equações

$$\boxed{\det([\sigma] - \sigma_j[I]) = 0, \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ e } 3} \tag{5.50}$$

Em forma explícita esta equação tem a forma

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_j & \tau_{xy} & \tau_{xj} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_j & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_j \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{5.51}$$

O determinante é um polinômio cúbico em termos de σ_j, i.e.,

$$p(\sigma_j) \doteq \det([\sigma] - \sigma_j[I]) \tag{5.52}$$

Expandindo o determinante tem-se o polinômio de $3^o_{\cdot}$ grau em termos da incógnita σ_j:

$$\begin{aligned} p(\sigma_j) = (\sigma_x - \sigma_j)(\sigma_y - \sigma_j)(\sigma_z - \sigma_j) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xz}\tau_{xy}\tau_{yz} \\ -[(\sigma_y - \sigma_j)\tau_{xz}^2 + (\sigma_z - \sigma_j)\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_j)\tau_{yz}] = 0. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Esse é o **polinômio característico** de $[\sigma]$ e possui três raízes. Prova-se que, como $[\sigma]$ é uma matriz real e simétrica, **todas as raízes de** $p(\sigma_j)$ **são reais**.

Resolvendo as raízes de (5.53) obtém-se as **três tensões principais** σ_1, σ_2 e σ_3. As **direções principais** O123 são obtidas pelas direções dos autovetores $\{v_1\}$, $\{v_2\}$ e $\{v_3\}$, que são obtidos resolvendo os três problemas algébricos

$$\boxed{\begin{aligned} ([\sigma] - \sigma_1[I])\,\{v_1\} = \{0\}, \\ ([\sigma] - \sigma_2[I])\,\{v_2\} = \{0\}, \\ ([\sigma] - \sigma_3[I])\,\{v_3\} = \{0\}. \end{aligned}} \tag{5.54}$$

Adicionalmente, os autovetores $\{v_1\}$, $\{v_2\}$ e $\{v_3\}$ são feitos unitários e ortogonais, formando uma tríade de eixos, isto é:

$$\boxed{\|v_1\| = 1, \qquad \|v_2\| = 1, \qquad \|v_3\| = 1, \qquad v_1 \times v_2 = v_3.} \tag{5.55}$$

Nota-se que cada matriz $([\sigma] - \sigma_j[I])$ em (5.54) é singular, uma vez que seu determinante é nulo. Então, cada um dos três sistemas algébricos (5.54) possui solução não-trivial. De fato, da teoria de álgebra linear, sabe-se que a solução de cada um desses problemas não é única. Observe que se um particular vetor $\{v_1\}$ satisfaz (5.54), então $k\{v_1\}$ também satisfará para qualquer número real k. Então existem infinitos vetores solução, todos colineares, com distintos módulos k.

Se as tensões principais forem ordenadas de forma ordem crescente,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \tag{5.56}$$

os vetores $\{v_1\}$, $\{v_2\}$ e $\{v_3\}$ indicam, no espaço $Oxyz$, as **direções principais** $O123$, como na Figura 5.20.

Exemplo 5.5 - Tensões principais por autovalores

Considere a matriz de componentes do tensor tensão num ponto de um corpo, em relação ao sistema cartesiano $Oxyz$:

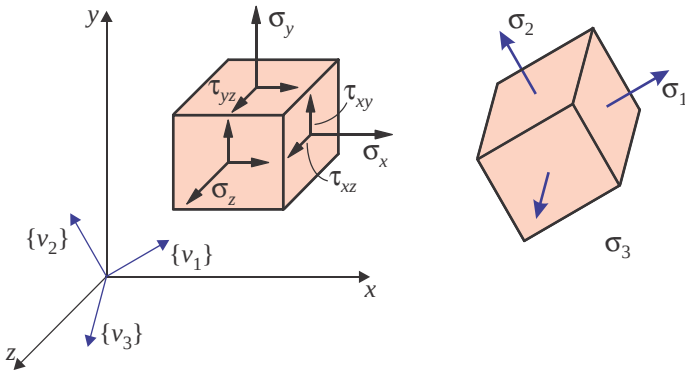


Figura 5.20: Tensões e direções principais no espaço 3D.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 30 & 40 & 0 \\ -10 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \tag{5.57}$$

Determine as tensões e direções principais.

Solução:
As tensões principais são os autovalores de $[\sigma]$, dados por (5.51):

$$\det \begin{bmatrix} 20-\sigma_j & 30 & -10 \\ 30 & 40-\sigma_j & 0 \\ -10 & 0 & -10-\sigma_j \end{bmatrix} = 0. \tag{5.58}$$

O polinômio característico é $p(\sigma_j) \doteq \det([\sigma] - \sigma_j[I])$, que em forma expandida fica

$$p(\sigma_j) = (20-\sigma_j)(40-\sigma_j)(-10-\sigma_j) - (40-\sigma_j)(-10)^2 - (-10-\sigma_j)30^2 = 0,$$

que pode ser simplificada para $\sigma_j^3 - 50\sigma_j^2 - 800\sigma_j + 3.000 = 0$. As raízes são $\sigma_1 = 62,10$ MPa, $\sigma_2 = 3,164$ MPa e $\sigma_3 = -15,27$ MPa.

As **direções principais** são dadas pelos vetores solução de (5.54). Por exemplo, a direção principal 1 é a direção do vetor $\{v_1\}$, que é solução do problema

$$([\sigma] - \sigma_1[I])\{v_1\} = \{0\},$$

que expandida fica

$$\begin{bmatrix} 20-62,10 & 30 & -10 \\ 30 & 40-62,10 & 0 \\ -10 & 0 & -10-62,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.59}$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} -42,10 & 30 & -10 \\ 30 & -22,10 & 0 \\ -10 & 0 & -72,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.60}$$

Podemos obter a solução por operações de linha da fatoração de Gauss. Multiplicando a terceira equação por $-4,21$ e por $+3$ e somando à primeira e segunda equação, respectivamente, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 30 & 293,5 \\ 0 & -22,10 & -216,3 \\ -10 & 0 & -72,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.61}$$

Quando tentamos zerar o termo (1,2) da matriz, 30, multiplicando a segunda equação por $30/22,1$ e somando à primeira obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22,10 & -216,3 \\ -10 & 0 & -72,10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.62}$$

A linha nula (a menos de erros de arredondamento), indica que a matriz é singular, como esperado, uma vez que σ_1 foi determinado exatamente para conseguir isto. Temos três incógnitas, v_{1x}, v_{1y} e v_{1z} e apenas duas equações. Então podemos arbitrar uma das incógnitas, por exemplo, fazemos

$$v_{1z} = 1.$$

Com isso podemos usar as duas últimas equações para determinar $v_{1x} = -7,210$ e $v_{1y} = -9,786$, o que resulta no primeiro autovetor de $[\sigma]$: $\{v_1\} = \{-7,210; -9,786; 1\}^T$. Os dois outros autovetores são obtidos a partir de σ_2 e σ_3 resolvendo as duas últimas equações em (5.54), usando o mesmo procedimento acima. Com isto, os três vetores obtidos são:

$$\{v_1\} = \begin{Bmatrix} -7,210 \\ -9,786 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{v_2\} = \begin{Bmatrix} -1,316 \\ 1,0721 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \{v_3\} = \begin{Bmatrix} 0,5268 \\ -0,2859 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{5.63}$$

Esses três vetores podem ser normalizados, e indicam as direções principais como na Figura 5.20. Uma vez que os três autovalores são distintos, prova-se que esse três autovetores são ortogonais.

5.6.1 Quando o cisalhamento ocorre num único plano

Um caso importante de estado de tensão é aquele em que o tensor tensão tem cisalhamento não nulo apenas em um certo plano. Por exemplo, a Figura 5.21 mostra o caso em que apenas o plano xy tem cisalhamento, $\tau_{xy} \neq 0$, e $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. A matriz do tensor tem a forma

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{5.64}$$

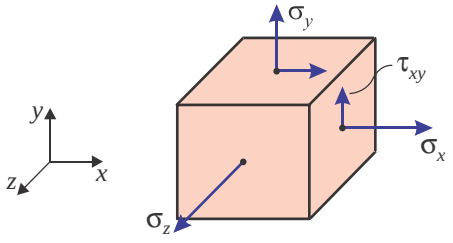


Figura 5.21: Estado de tensões com cisalhamento num único plano (xy).

A determinação das **tensões principais** pode ser feita pelo problema de autovalor (5.50). Nesse caso, o polinômio característico $p(\sigma_j)$ de (5.53) simplifica-se com $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, gerando

$$\boxed{p(\sigma_j) = (\sigma_x - \sigma_j)(\sigma_y - \sigma_j)(\sigma_z - \sigma_j) - (\sigma_z - \sigma_j)\tau_{xy}^2 = 0.} \tag{5.65}$$

Nota-se que o termo $(\sigma_z - \sigma_j)$ é comum e pode ser posto em evidência:

$$\underbrace{(\sigma_z - \sigma_j)}_{=0}\underbrace{[(\sigma_x - \sigma_j)(\sigma_y - \sigma_j) - \tau_{xy}^2]}_{=0} = 0. \tag{5.66}$$

Então, ou o primeiro parêntese é nulo ou o segundo o é. Caso o primeiro parêntese seja nulo, $\sigma_z - \sigma_j = 0$, com o que se tem a primeira das três raízes σ_j. Fazendo $j = 3$, por exemplo, tem-se o valor da tensão principal σ_3:

$$\boxed{\sigma_3 = \sigma_z} \tag{5.67}$$

As outras duas tensões principais são as duas raízes σ_j (σ_1 e σ_2) do polinômio de segundo grau em (5.66),

$$(\sigma_x - \sigma_j)(\sigma_y - \sigma_j) - \tau_{xy}^2 = 0,$$

que pode ser expandido para

$$\sigma_j^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_j + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0.$$

Usando a fórmula para as raízes tem-se

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}\right]$$

Expandindo e reordenando os termos chega-se a

$$\boxed{\sigma_j = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{para } j = 1, 2.} \tag{5.68}$$

Esta é a mesma expressão anteriormente deduzida para obter σ_1 e σ_2 em estado plano de tensões, equações (5.44). Então, se o tensor é como em (5.64), o fato de σ_z ser nulo ou não, não interfere nos valores de σ_1 e σ_2. Como $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, fica provado em (5.67) que σ_z é uma das três tensões principais, quer seja nulo ou não.

Isso tem uma consequência importante, que é a seguinte:

sempre existem três tensões principais em qualquer estado de tensões (uniaxial, biaxial ou triaxial), mesmo que uma ou duas possam ser nulas, ou uma, duas ou três possam ser idênticas.
Sempre existe uma tríade de eixos principais, 1,2 e 3, como Figura 5.20, mesmo que alguma das tensões principais seja nula.

(5.69)

Por exemplo, em todo o equacionamento e exemplos vistos nas seções anteriores, além das tensões principais σ_1 e σ_2 obtidas, também existe $\sigma_3 = 0$.

Para um estado plano de tensões no plano xy**, como em (5.64), a direção principal correspondente, o eixo 3, coincide com o eixo** z, como pode ser visto resolvendo para o autovetor $\{v_3\}$ da matriz de estado plano de tensão (5.64). Para isso resolvemos o problema algébrico $(5.54)_3$

$$([\sigma] - \sigma_3[I])\,\{v_3\} = \{0\}. \tag{5.70}$$

Para $\sigma_3 = \sigma_z$, se tem a forma aberta

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_z & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.71}$$

A solução é que v_{3z} pode ser qualquer valor real, por exemplo $v_{3z} = c.$ e v_{3x} e v_{3y} devem ser resolvidos da submatriz remanescente

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_z & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.72}$$

A submatriz é não singular, pois os únicos autovalores que a tornam singular são σ_1 e σ_2. Isso pode ser visto notando que o determinante dessa matriz gera exatamente o segundo polinômio característico em (5.66). Então, de álgebra se sabe que a única solução possível é $v_{3x} = v_{3y} = 0$. Então, o autovetor que define a direção principal 3 é

$$\{v_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{Bmatrix}. \tag{5.73}$$

Essa forma mostra porque não podemos usar $c = 0$, mesmo no caso $\sigma_3 = 0$. Em geral se toma $c = 1$ para ter o vetor normalizado.

5.6.2 Rotação das tensões principais

Consideremos as três tensões principais e suas direções, como no elemento volumétrico da Figura 5.22a. As três tensões principais podem ser representadas no plano $\sigma - \tau$ do círculo de Mohr, como na Figura 5.22b. Podemos rotacionar os eixos 1 e 2 em torno do eixo 3, por um ângulo θ_3 como na Figura 5.22b. As tensões nas novas direções, r e s, são obtidas pelas equações (5.17), com x'e y'substituídos por R e S, e σ_x, σ_y e τ_{xy} substituídos por σ_1, σ_2 e 0 respectivamente. As tensões σ_r, σ_s e τ_{rs} são representados no plano $\sigma - \tau$ pelos pontos R e S do círculo vistos na Figura 5.22b. Em geral, os pontos R e S descrevem o círculo de Mohr ilustrado conforme θ_3 varia de 0^o a 180^o.

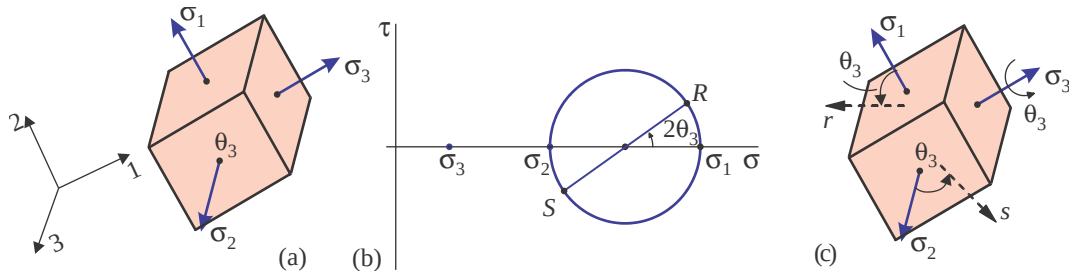


Figura 5.22: (a) Tensões e direções principais, (b) círculo de Mohr e (c) rotação em torno do eixo 3.

Note que o círculo de Mohr da Figura 5.22b é uma generalização do círculo de Mohr de um estado plano de tensões descrito no início do capítulo. No EPT, σ_z era nulo, enquanto no caso atual ele não o é.

Considere novamente as três tensões e direções principais, como na Figura 5.23a. Podemos fazer uma rotação θ_1 em torno do eixo 1 e definir novos eixos, t e u como mostrado. As tensões nas faces orientadas por t e u, (σ_t, σ_u e τ_{ut}), definem os pontos T e U e o círculo de Mohr mostrado na Figura 5.23b.

Comparando as Figuras 5.22 e 5.23, temos dois círculos de Mohr: um no plano $O12$ (para rotação em torno do eixo 3), e um círculo no plano $O23$ (para rotação em torno do eixo 1).

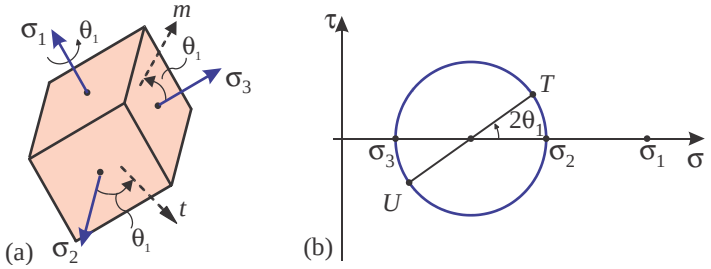


Figura 5.23: Rotação em torno do eixo 1.

5.6.3 Círculos de Mohr de estado triaxial de tensões

Continuando o raciocínio do final da seção anterior podemos fazer uma rotação em torno do eixo 2, e isso gerará um terceiro círculo de Mohr, associado ao plano $O13$. Os três círculos são mostrados simultaneamente na Figura 5.24. Os pontos em cada círculo representam as tensões em direções obtidas por uma rotação em torno de um dos eixos principais. Por exemplo, o círculo definido por σ_1 e σ_3 representa eixos no plano $O13$, obtidos por uma rotação em torno do eixo principal 2.

Prova-se que o estado de tensões em um sistema de eixos que não contém um dos eixos principais é representado no plano $\sigma - \tau$ por um ponto localizado na área sombreada entre os três círculos, como o ponto P da Figura 5.24.

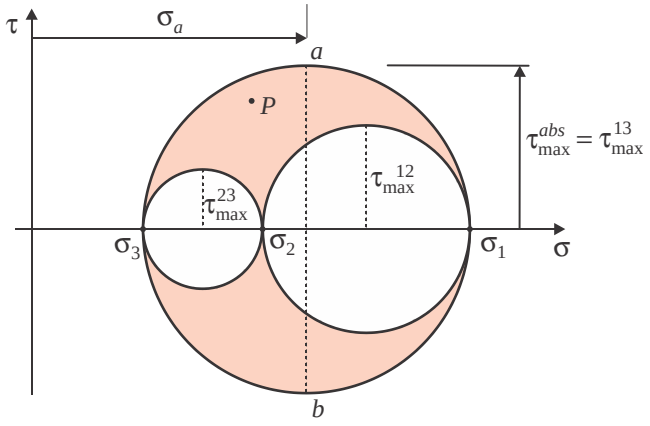


Figura 5.24: Círculos de Mohr para estado triaxial de tensões.

Em geral, não há utilidade em representar graficamente tensões no plano $\sigma - \tau$ para uma transformação genérica como aquela do ponto P. Sempre estaremos interessados nas tensões associadas aos três círculos. Entretanto, uma observação deve ser apontada claramente:

> **Não importa o tipo do estado de tensões, (quer seja estado uniaxial, plano ou triaxial), sempre existem três círculos de Mohr, definidos pelas três tensões principais.**

Isso não foi colocado claramente nas seções iniciais do capítulo, quando nos concentrávamos em desenvolver um único círculo.

A Figura 5.25 ilustra os círculos em alguns casos particulares de estados de tensão. Por exemplo, na Figura 5.25a mostra um caso onde $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Aparentemente só existe um círculo, mas de fato, o círculo $O23$ (ver Figura 5.24), encontra-se reduzido a um ponto, de forma que os círculos 012 e 013 coincidem. As Figuras 5.25b e c mostram estados planos de tensão, $\sigma_3 = 0$. Em (b) σ_1e σ_2 tem mesmo sinal, de forma que o cisalhamento máximo absoluto ocorre no plano O13. Na Figura 5.25c as tensões σ_1e σ_2 tem sinais oposto, o que faz com que o cisalhamento máximo absoluto ocorra no plano O12. O **estado hidrostático de tensões** é definido como o caso em que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Esse estado está representado na Figura 5.25d, onde os três círculos possuem raio nulo e resultam num único ponto.

5.6.4 Tensão cisalhante máxima absoluta.

Uma vez que sempre existem três círculos de Mohr, como nas Figuras 5.24 e 5.25, existe uma tensão cisalhante máxima em cada plano, associada a cada círculo, $\tau^{12}_{\max}$, $\tau^{13}_{\max}$ e $\tau^{23}_{\max}$, como na Figura 5.24. Conforme visto no Capítulo 6 sobre critérios de falha, **o valor de interesse será sempre a maior das três tensões cisalhantes máximas, isto é,**

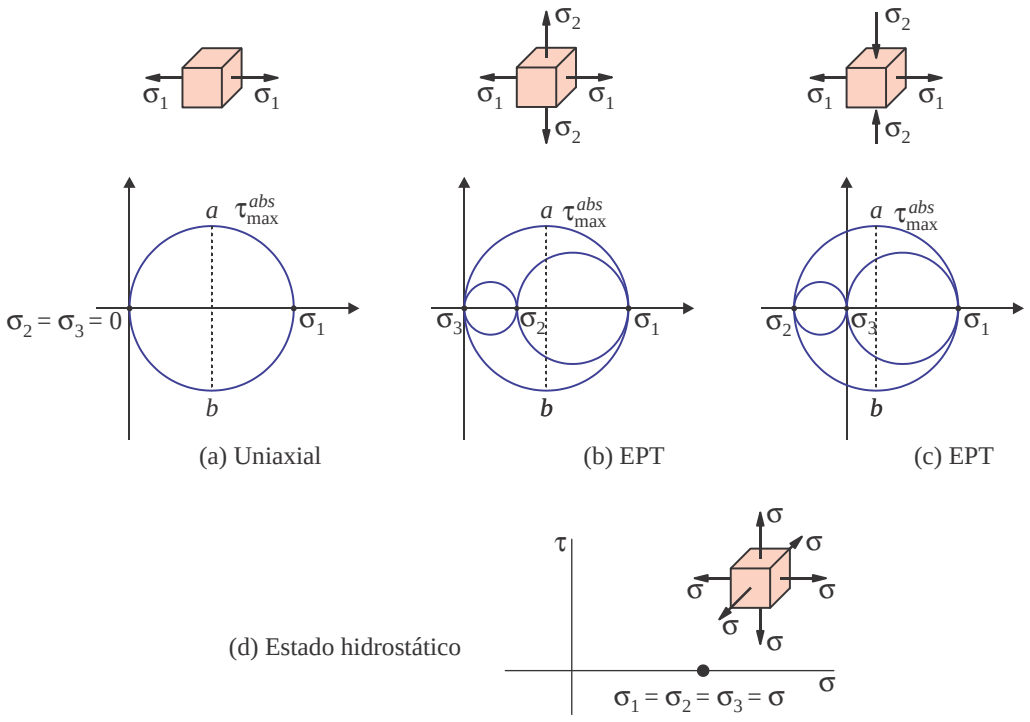


Figura 5.25: Representação dos círculos de Mohr em diversos estados de tensão.

$$\boxed{\begin{aligned}\tau_{\max}^{abs} &= \text{Max}\{\tau_{\max}^{12};\ \tau_{\max}^{13};\ \tau_{\max}^{23}\},\\ &= \frac{1}{2}\max\{|\sigma_1-\sigma_2|\ ;\ |\sigma_1-\sigma_3|\ ;\ |\sigma_2-\sigma_3|\}\end{aligned}} \tag{5.74}$$

A tensão máxima absoluta ocorre sempre em eixos contidos no plano do maior círculo de Mohr, a 45^o dos eixos principais associados. Por exemplo, para o estado de tensões da Figura 5.24, os eixos Oab estão contidos no plano $O13$, onde o eixo a está a 45^o do eixo 1, como na Figura 5.26.

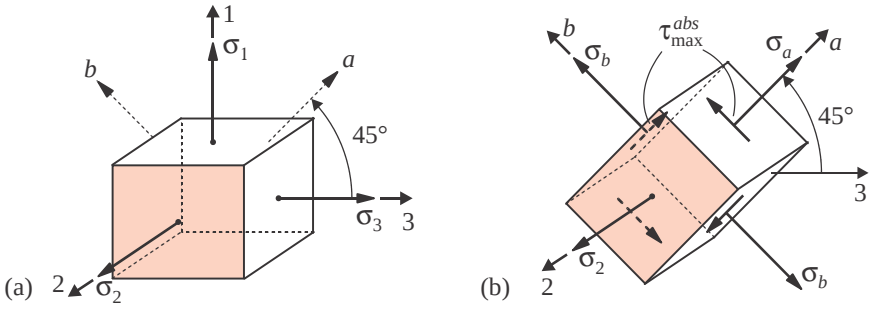


Figura 5.26: Tensões e direções principais em (a), e direções $a-b$ da tensão cisalhante máxima absoluta.

Exemplo 5.6 - Tensões principais e círculos de Mohr em EPT

Considere o estado de tensões planas dos Exemplos 5.2 e 3, $\{\sigma^x\} = \{20; -50; -25\}^T$ MPa. Construa os três círculos de Mohr e indique as tensões principais e tensões cisalhantes máximas em cada plano.

Solução:

Como se trata de um estado plano de tensões no plano xy, podemos obter diretamente as tensões principais σ_1e σ_2 e a tensão cisalhante máxima no plano 12, $\tau^{12}_{\max}$, usando o equacionamento do fluxograma da eq. (5.33). Isso já foi feito no Exemplo 5.3:

$$\tau^{12}_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} \quad \text{e} \quad \sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \tau^{12}_{\max}, \tag{5.75}$$

o que resulta

$$\begin{aligned} \tau^{12}_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{20-(-50)}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 43{,}01 \text{ MPa}, \\ \sigma_{1,2} &= \left(\frac{20+(-50)}{2}\right) \pm 43{,}0 = -15 \pm 43,0 \text{ MPa} \end{aligned} \tag{5.76}$$

tal que $\sigma_1 = 28$ MPa e $\sigma_2 = -58$ MPa, como já tinha sido obtido no Exemplo 5.3, página 187. As tensões cisalhantes máximas nos planos 13 e 23, $\tau^{13}_{\max}$ e $\tau^{23}_{\max}$, podem ser obtidas de (5.74)

$$\begin{aligned} \tau^{13}_{\max} &= |\sigma_1 - \sigma_3|/2 = 28/2 = 14 \text{ MPa}, \\ \tau^{23}_{\max} &= |\sigma_2 - \sigma_3|/2 = 58/2 = 29 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Com as três tensões principais determinadas, os três círculos de Mohr podem ser esboçados, como na Figura 5.27.

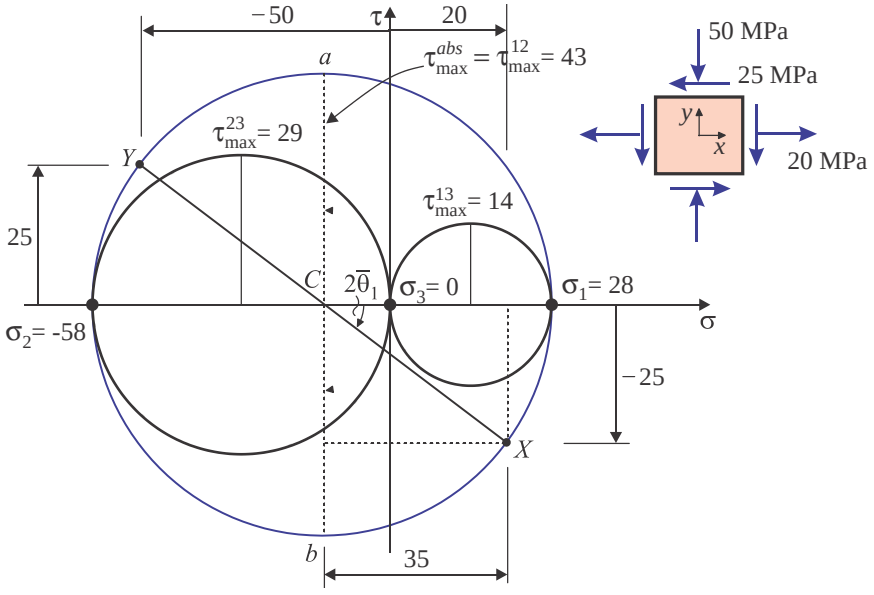


Figura 5.27: Círculos de Mohr e indicação das tensões principais e tensões cisalhantes máximas em cada plano para os dados do Exemplo 5.6.

5.7 Transformação de deformações em estado plano

Nessa seção mostraremos que as deformações são valores associados a um determinado sistema de eixos da mesma forma que as componentes de tensão. Em seguida apresentaremos as equações de transformação de componentes de um **estado plano de tensões** (EPT) em presença de uma rotação do sistema de coordenadas.

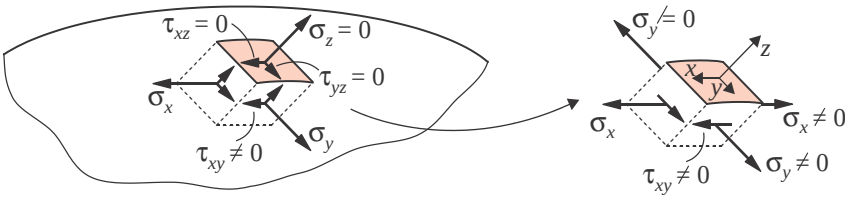


Figura 5.28: Estado de tensões numa superfície livre de um corpo.

Frequentemente as operações de transformação de deformações são realizadas para processar dados obtidos em medições de deformações. Um dos métodos mais comuns de medição de deformações é pelo uso de **extensômetros de resistência**. Esses extensômetros, como também diversos outros tipos de transdutores cinemáticos, **medem apenas deformações em pontos da superfície do corpo, não em pontos do seu interior.** No caso mais comum a superfície é livre de tensões, i.e., em cada ponto as três componentes de tensões na superfície são nulas. Por exemplo, no ponto ilustrado na Figura 5.28, se os eixos $x-y$ forem tangentes à superfície tem-se $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, o que caracteriza um estado plano de tensões, com o tensor tensão com as componentes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.78}$$

Nesse caso, o estado de deformações é obtido pela Lei de Hooke generalizada, dada pela equação (4.60), página 120, para um material homogêneo, elástico-linear, isotrópico:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - v\sigma_y], \qquad \varepsilon_z = -\frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0. \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - v\sigma_x], \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \end{aligned} \tag{5.79}$$

Então o estado de deformações tem componentes

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{5.80}$$

G é dado por $G = E/2(1+v)$.

A relação inversa de (4.125) pode ser facilmente obtida:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_x + v\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_y + v\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \qquad\qquad\qquad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned}} \tag{5.81}$$

Além disso, uma relação adicional é obtida para ε_z:

$$\varepsilon_z = \frac{-v}{1-v}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \tag{5.82}$$

Nota-se que este **não é um estado plano de deformações** (EPD), pois $\varepsilon_Z \neq 0$ quando o coeficiente de Poisson $v \neq 0$. Então, além das deformações coplanares (no plano xy) vistas na Figura 5.29, existe também uma deformação normal ε_z, na direção perpendicular à superfície do corpo, provocado pelo efeito de Poisson.

Entretanto, observa-se que a componente ε_z não é afetada por uma rotação de sistema de coordenadas em torno do eixo z, isto é, as equações de transformação de (5.80) são as mesmas do estado plano de deformações (EPD):

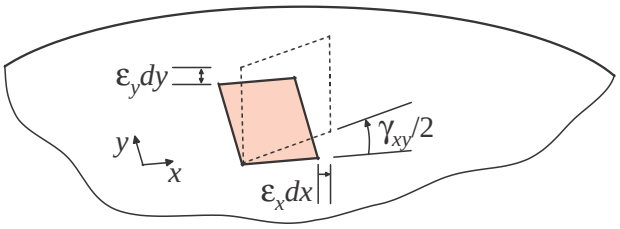


Figura 5.29: Deformações na superfície de um corpo.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.83}$$

e ε_z permanece inalterado com a rotação.

5.7.1 Aspectos gerais de transformação de deformações

A questão da transformação de deformações pode ser entendida com a ajuda da Figura 5.30a, onde temos um elemento ABCD de dimensões diferenciais $dx \times dy$, com as faces paralelas aos eixos x e y. Como ilustração, consideremos o elemento sujeito apenas a deformações ε_x, de forma que ele se deforma na configuração A$\overline{\text{B}}\overline{\text{C}}$D, isto é, o segmento AB paralelo ao eixo x alonga-se em $\varepsilon_x dx$ na direção x.

Consideremos agora, no mesmo ponto do corpo, um outro sistema de eixos, A$x'y'$ como mostrado. Um segmento de material na direção x', ao longo de AC, tem inicialmente comprimento dx'. Com a deformação, o segmento AC deforma-se para A$\overline{\text{C}}$, como visto na Figura 5.30a. É visível que a deformação de AC, isto é, $\varepsilon_{x'}$, será diferente de ε_x, uma vez que $\varepsilon_{x'}$ é tal que o comprimento final $\overline{\text{AC}}$ é $(1 + dx')\varepsilon_{x'}$.

Em segunda, consideremos, ainda na Figura 5.30a, um outro elemento diferencial, no mesmo local, de dimensões $dx' \times dy'$, com faces paralelas aos eixos x' e y'. Na configuração original o elemento é retangular, isto é, com os ângulos internos retos. Entretanto, na configuração deformada os ângulos estão alterados pelo valor $\gamma_{x'y'}$, que é o ângulo formado pela rotação de AC em $\overline{\text{AC}}$.

Da Figura 5.30a conclui-se, de forma geral, que a um simples elongamento uniaxial, ε_x, corresponde um estado de deformações mais complexas num outro sistema de coordenadas, $x' - y'$, envolvendo, pelo menos, um elongamento $\varepsilon_{x'}$ e um cisalhamento $\gamma_{x'y'}$.

Na Figura 5.30b temos a ilustração de que um estado simples de cisalhamento, γ_{xy}, num sistema de coordenadas $x - y$, está associada a um elongamento $\varepsilon_{x'}$ numa direção x'(além de outras deformações não mostradas). Nos eixos $x - y$, o retângulo ABCD deforma-se para $\overline{\text{ABCD}}$ pelo cisalhamento γ_{xy}. Já o segmento AF na direção x', elonga-se para A$\overline{\text{F}}$, gerando uma deformação normal $\varepsilon_{x'}$.

Em lugar de tratar de uma componente de deformação por vez, devemos considerar o conjunto delas, como na Figura 5.31a. Para um sistema Oxy de eixos, temos dois segmentos ortogonais de material, AB e AC, de comprimentos dx e dy. Cada um desses segmentos sofre um **elongamento** e uma **rotação**. Por exemplo, o segmento AB elonga-se no valor $\varepsilon_x dx$, e sofre uma rotação $\gamma_{xy}/2$, de forma que o ponto B desloca-se para a posição $\overline{\text{B}}$. De forma semelhante, $\varepsilon_y dy$ é o elongamento de AC, e $\gamma_{xy}/2$ será sua rotação, tal que o ponto C toma a posição $\overline{\text{C}}$.

Consideremos agora a mesma região do corpo, o mesmo estado de deformações, porém definimos um segundo sistema de eixos, $Ox'y'$, através de uma rotação θ em torno do eixo z. Se definimos um novo segmento, Ab, de comprimento dx', paralelo ao eixo x', o elongamento desse segmento será $\varepsilon_{x'} dx'$, fazendo b mover-se para c, e sua rotação $\gamma_{x'y'}/2$ faz b mover-se para $\bar{\text{b}}$, como visto na Figura 5.31b. Da mesma forma, um segmento paralelo ao eixo y', terá elongamento $\varepsilon_{y'} dy'$ e rotação $\gamma_{x'y'}/2$.

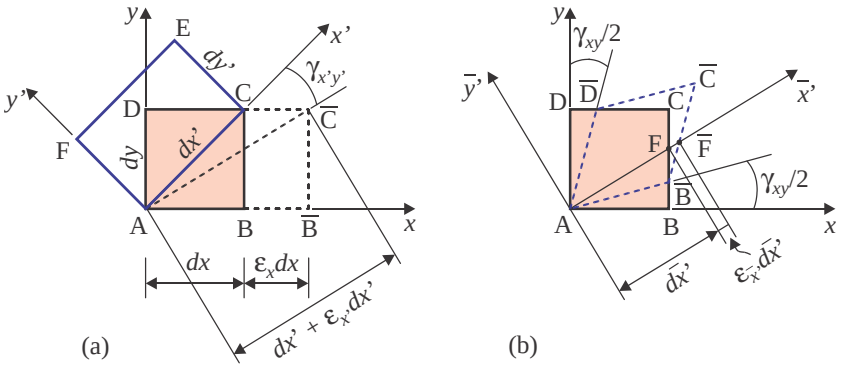


Figura 5.30: (a) Cisalhamento associado ao elongamento (b) elongamento associado a cisalhamento.

O que buscamos aqui é obter um conjunto de equações que determine os valores de $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$e $\gamma_{x'y'}$, em termos de ε_x, ε_y, γ_{xy} e θ, isto é,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transformação}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \gamma_{x'y'}/2 & 0 \\ \gamma_{x'y'}/2 & \varepsilon_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.84}$$

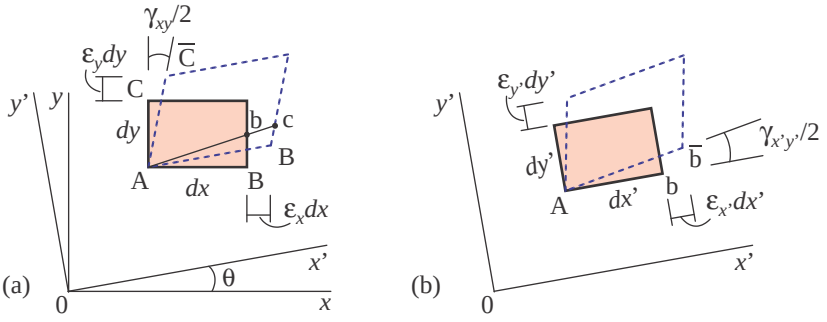


Figura 5.31: Deformações planas nos sistemas Oxy e $Ox'y'$.

5.7.2 Equação de transformação plana de EPD

Considere a Figura 5.32, onde temos um sistema de eixos $Ox'y'$ inclinado em relação ao sistema Oxy pelo ângulo θ. Uma porção de material que ocupe as posições do retângulo $OARa$ na configuração indeformada do corpo, ocupará as posições do trapézio $ODrd$ na configuração deformada. Observe que as deformações na figura foram grandemente exageradas par permitir a visualização. De fato, a teoria sendo vista nesse curso é de **pequenas deformações e rotações**, cujas características são listadas na seção 4.2.1, página 98.

A componente $\varepsilon_{x'}$de deformação é tal que define a componente do deslocamento AD ao longo do eixo x', isto é, $\text{AD}|_{x'} = \varepsilon_{x'}dx'$ como na Figura 5.32. Determinaremos $\varepsilon_{x'}dx'$somando as componentes dos segmentos AB, BC e CD ao longo de x'. Esses segmentos são definidos pelas componentes ε_x, ε_y e γ_{xy}:

$$AB = \varepsilon_x dx, \qquad BC = \varepsilon_y dy \qquad CD = \gamma_{xy} dy. \tag{5.85}$$

Os dois primeiros termos são fáceis de entender observando a região hachurada $OPAQ$ na Figura 5.32, que tem lados $dx \times dy$. O termo CD pode ser entendido com auxílio da figura inferior à direita, que mostra que γ_{xy} gera uma parcela de deslocamento horizontal, $\gamma_{xy}dy$, que define CD.

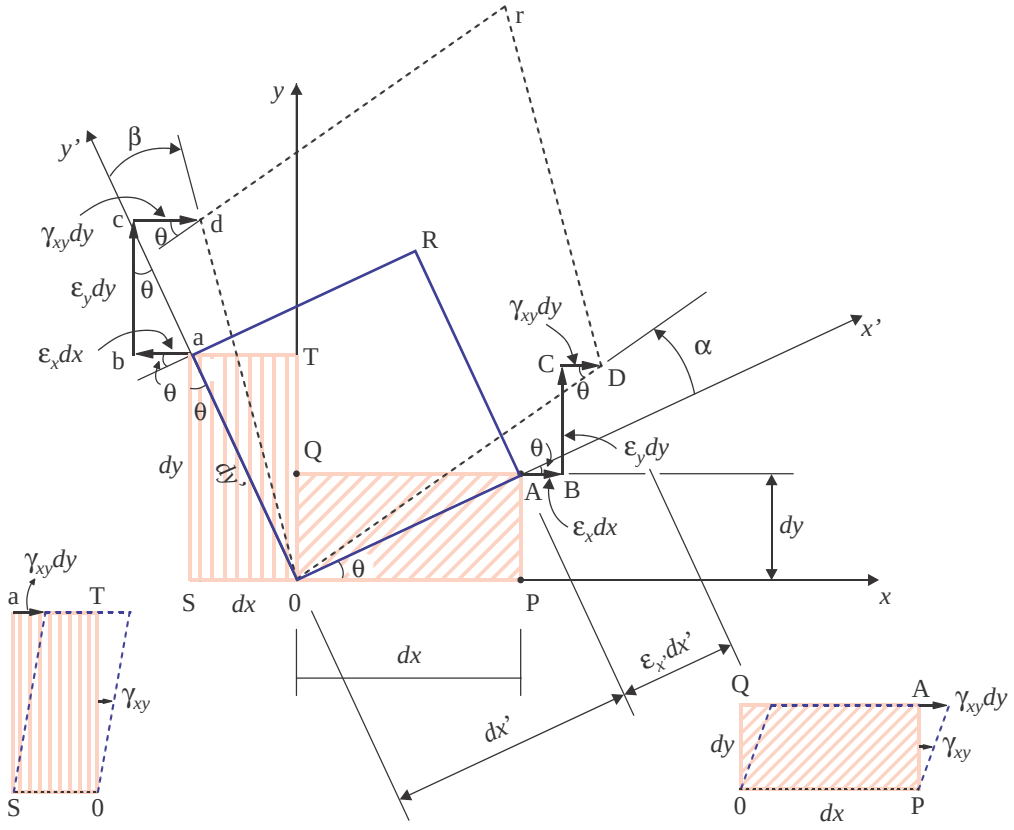


Figura 5.32: Deformações planas nos sistemas Oxy e $Ox'y'$.

Então, a parcela de AD na direção x' é obtida somando as parcelas de AB, BC e CD na direção x':

$$AD\,|_{x'} = AB\cos\theta + BC\ \text{sen}\ \theta + CD\cos\theta,$$

isto é,

$$\varepsilon_{x'}dx' = \varepsilon_x dx\cos\theta + \varepsilon_y dy\ \text{sen}\ \theta + \gamma_{xy}dy\cos\theta. \tag{5.86}$$

Observando o triângulo OPA nota-se que

$$\text{sen}\ \theta = \frac{dy}{dx'}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{dx'}, \tag{5.87}$$

Então (5.86) gera

$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\text{sen}^2\ \theta + \gamma_{xy}\text{sen}\ \theta\cos\theta} \tag{5.88}$$

Para a dedução de $\varepsilon_{y'}$ seguimos procedimento análogo, observando o deslocamento do ponto a para a posição d na Figura 5.32. $\varepsilon_{y'}$ é tal que $ad\,|_{y'} = \varepsilon_{y'}dy'$. Então,

$$ad|_{y'} = ab\ \text{sen}\ \theta + bc\cos\theta - cd\ \text{sen}\ \theta. \tag{5.89}$$

Os segmentos são dados por

$$ab = \varepsilon_x dx, \qquad bc = \varepsilon_y dy \qquad \text{e} \qquad cd = \gamma_{xy}dy. \tag{5.90}$$

Essas relações são entendidas com auxílio do retângulo hachurado $OTaS$ de dimensões $dx \times dy$, que aparece em destaque com cisalhamento na figura inferior à esquerda da Figura 5.32. Usando (5.90) temos (5.89) como

$$\varepsilon_{y'} dy' = \varepsilon_x dx \text{ sen } \theta + \varepsilon_y dy \cos\theta - \gamma_{xy} dy \text{ sen } \theta. \tag{5.91}$$

Observando o triângulo SOa temos que

$$\text{sen } \theta = \frac{dx}{dy'} \qquad \cos\theta = \frac{dy}{dy'}. \tag{5.92}$$

Então (5.91) fica

$$\boxed{\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \text{sen}^2\ \theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \gamma_{xy} \text{ sen } \theta \cos\theta} \tag{5.93}$$

Finalmente, $\gamma_{x'y'}$ será obtido pela definição, de que $\gamma_{x'y'} = \alpha + \beta$, como visto na Figura 5.32. Consideremos primeiramente α. Como a teoria é de pequenas rotações, podemos aproximar $\alpha \approx$tg α. Então,

$$\alpha = \frac{AD|_{y'}}{dx'} \tag{5.94}$$

$AD|_{y'}$ é a componente de AD na direção y', i.e., o comprimento do arco que gera α. Então,

$$AD|_{y'} = -AB \text{ sen } \theta + BC \cos\theta - CD \text{ sen } \theta.$$

Usando (5.85) e (5.87) e (5.94) temos

$$\alpha = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{ sen } \theta \cos\theta - \gamma_{xy} \text{ sen}^2\theta. \tag{5.95}$$

O ângulo β é obtido de forma semelhante. Da Figura 5.32 vemos que β é definido por $ad|_{x'}$, i.e., pela componente de ad paralela a x'. Então, $\beta = ad|_{x'}/dy$, onde

$$ad|_{x'} = -ab\cos\theta + bc \text{ sen } \theta + cd\cos\theta.$$

Usando (5.90) e (5.92) temos

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{ sen } \theta \cos\theta + \gamma_{xy} \cos^2\theta. \tag{5.96}$$

Como $\gamma_{x'y'} = \alpha + \beta$, somando (5.95) e (5.96) temos

$$\boxed{\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \text{ sen } \theta \cos\theta + \gamma_{xy} \left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right)} \tag{5.97}$$

Sumarizando os resultados, equações (5.88), (5.93) e (5.97) (lembrando que $\varepsilon_{x'y'} = \gamma_{x'y'}/2$), temos o conjunto completo de **equações de transformação de deformações planas em rotação do sistema de coordenadas**:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'}/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\ \theta & \text{sen}^2\ \theta & 2\text{sen } \theta\cos\theta \\ \text{sen}^2\ \theta & \cos^2\ \theta & -2\text{sen } \theta\cos\theta \\ -\text{sen } \theta\cos\theta & \text{sen } \theta\cos\theta & (\cos^2\theta\ - \text{sen}^2\ \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}.} \tag{5.98}$$

Note que aqui, propositalmente, dividimos as deformações cisalhantes de engenharia por dois. Dessa forma, a **matriz de transformação é idêntica àquela da transformação de tensões, equação (5.18)**. Isso significa que as componentes de deformação se transformam exatamente como todos os tensores de segunda ordem, i.e., a deformação é uma entidade tensorial, da mesma forma que as tensões. A equivalência, entretanto, só ocorre quando usamos a deformação cisalhante na forma usada na equação (5.98), isto é, $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$, em lugar de γ_{xy} . De fato, na literatura de mecânica do continuo as componentes do tensor são representadas por

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \text{Sim.} & & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{5.99}$$

onde $\varepsilon \doteq \gamma/2$.

Uma vez identificada uma propriedade das deformações, tudo que foi anteriormente deduzido e apresentado nesse capítulo sobre as transformações de tensão são aplicáveis aqui também para as deformações. Basta que tomemos cada equação deduzida para tensão e façamos a transposição.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \sigma_x & \rightarrow & \varepsilon_x, \\ \sigma_y & \rightarrow & \varepsilon_y, \\ \tau_{xy} & \rightarrow & \gamma_{xy}/2. \end{array}} \tag{5.100}$$

O mesmo se aplica para os índices x', y' e $x'y'$.

Seguindo esse procedimento, podemos escrever sumariamente as equações mais importantes para transformação de deformações.

- Usando (5.21), as equações (5.98) podem ser postas como

$$\left|\begin{array}{l} \varepsilon_{x'} = \left(\dfrac{\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}}{2}\right) + \left(\dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta, \\ \varepsilon_{y'} = \left(\dfrac{\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}}{2}\right) - \left(\dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta - \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta, \\ \gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\ \text{sen } 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta. \end{array}\right. \tag{5.101}$$

- O círculo de Mohr para rotações planas é obtido plotando no plano $\varepsilon - \gamma/2$ os pontos

$$X = \left(\varepsilon_x; \frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad Y = \left(\varepsilon_y; \frac{-\gamma_{xy}}{2}\right),$$

como na Figura 5.33. Nessa figura estão os três círculos de Mohr, associados às três deformações principais ε_1, ε_2 e ε_3. As orientações θ e β definem as direções principais 1-2 e os eixos $a - b$ de cisalhamento máximo. θ e β são dados pelas versões das equações (5.23) e (5.28):

$$\boxed{\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{\gamma_{xy}/2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2} \qquad \text{e} \qquad \text{tg } 2\beta = -\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2}{\gamma_{xy}/2}} \tag{5.102}$$

- As deformações principais são obtidas de (5.38):

$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}_{\gamma^{12}_{\max}/2}} \tag{5.103}$$

onde a raiz define a deformação máxima no plano xy.

Devemos observar que num material isotrópico elástico-linear, as direções principais de tensão, $O12$, e de deformação, coincidem, i.e., o ângulo $\overline{\theta}$ é o mesmo.

Isso pode ser entendido tomando as equações da lei de Hooke, (5.78). Se, nas direções principais de tensão o cisalhamento é nulo, $\gamma_{12} = 0$, então, $\tau_{12} = G\gamma_{12}$ também será nulo, i.e., teremos apenas deformações normais, ε_1, ε_2 e ε_3 não nulas, o que caracteriza os eixos de deformações principais.

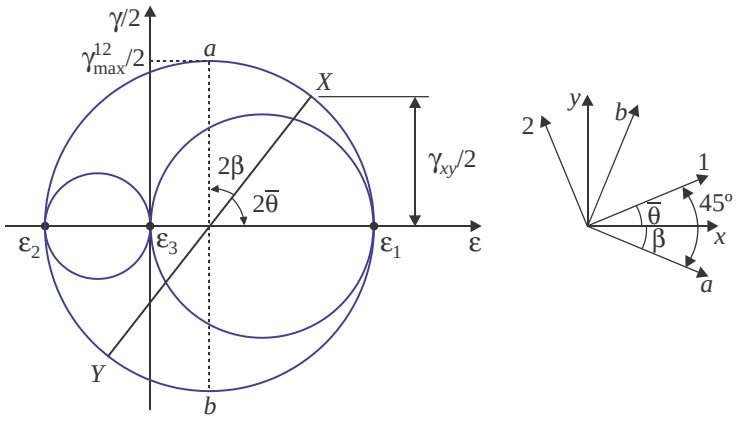


Figura 5.33: Círculo de Mohr de deformações.

Exemplo 5.7 - Deformações e tensões principais

Sabe-se que num certo ponto da superfície de um corpo as deformações são $\varepsilon_x = 250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\gamma_{xy} = 100 \cdot 10^{-6}$. (a) Determine as deformações e direções principais; (b) Esboce o círculo de Mohr de deformações; (c) Determine a deformação cisalhante máxima absoluta, $\gamma^{abs}_{\max}$; (d) Determine as tensões principais e $\tau^{12}_{\max}$. O material é aço, com módulo de elasticidade $E = 207$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Solução:

O círculo de Mohr é obtido plotando os pontos $X = (\varepsilon_x; \gamma_{xy}/2) = (250;\ 50) \cdot 10^{-6}$ e $Y = (\varepsilon_y; -\gamma_{xy}/2) = (150;\ -50) \cdot 10^{-6}$. O círculo do plano xy é visto na Figura 5.34. Os valores das deformação principais do plano Oxy vem de (5.103):

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \left(\frac{250+150}{2}\right)10^{-6} \pm 10^{-6}\sqrt{\left(\frac{250-150}{2}\right)^2 + \left(\frac{100}{2}\right)^2} = \left\{\begin{matrix}270,7 \cdot 10^{-6}\\ 129,3 \cdot 10^{-6}\end{matrix}\right. .$$

A terceira deformação principal não é nula como σ_3 no EPT, mas é dada em termos de ε_1 e ε_2 por (5.82):

$$\varepsilon_3 = \frac{-\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{-0,3}{(1-0,3)}(270,7 + 129,3) \cdot 10^{-6} = -171,4 \cdot 10^{-6}.$$

As orientações dos eixos 1 e 2 são dadas por (5.102):

$$\text{tg}\ 2\overline{\theta} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{(250-150) \cdot 10^{-6}} = 1 \quad \rightarrow \quad 2\overline{\theta} = 45^o.$$

Os eixos principais 1 e 2 são mostrados na Figura 5.34b, sendo que eixo 3 é obviamente normal ao plano O12. A altura do bloco diminui, uma vez que $\varepsilon_3 < 0$.)

Observando o círculo de Mohr vemos que a **deformação máxima absoluta** $\gamma^{abs}_{\max}$ ocorre no plano O13, e não no O12, i.e.,

$$\frac{\gamma^{abs}_{\max}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{270,7 - (-171,4)}{2} \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma^{abs}_{\max} = 442,1 \cdot 10^{-6}}$$

As tensões principais vem de (5.81):

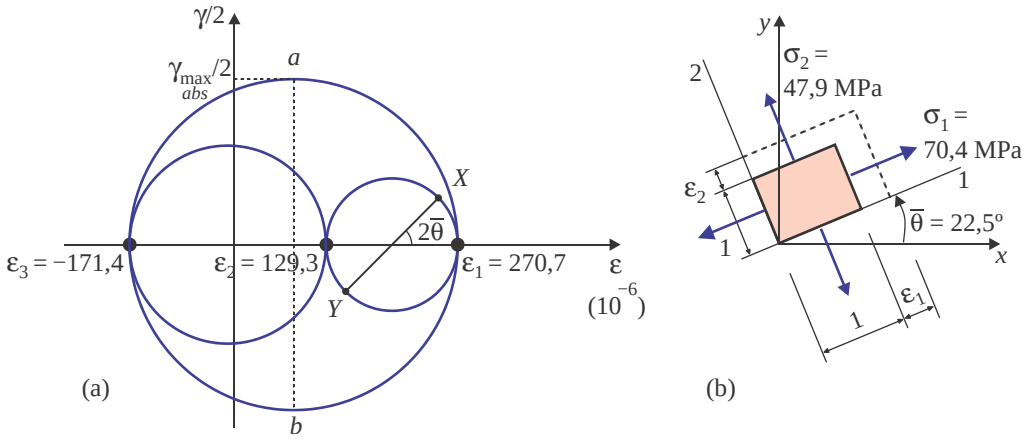


Figura 5.34: Círculo de Mohr de deformações do Exemplo 5.7 e elemento diferencial com as tensões e deformações principais.

$$
\left|\begin{array}{l}
\sigma_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(270,7 + 0,3\times 129,3)\cdot 10^{-6} = 70,4 \text{ MPa},\\
\sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(129,3 + 0,3\times 270,7)\cdot 10^{-6} = 47,9 \text{ MPa},\\
\tau_{12} = G\gamma_{12} = G\times 0 = 0,\\
\sigma_3 = 0.
\end{array}\right. \tag{5.104}
$$

Essas componentes de tensão também encontram-se ilustradas na Figura 5.34b, junto às deformações principais 1 e 2.

5.7.3 Comentários adicionais

Note que no exemplo partimos das deformações no sistema xy, obtivemos ε_1 e ε_2 e usamos a Lei de Hooke para chegar as tensões principais σ_1 e σ_2. Poderíamos ter seguido um outro caminho: usar a lei de Hooke para converter as deformações $x-y$ nas tensões $x-y$, e em seguida obter σ_1 e σ_2. Esses dois caminhos são mostrados da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lcl}
 & [\varepsilon^x] \xrightarrow{\text{Lei de Hooke}} & \sigma^x \\
\text{Transf. de deformações} & \downarrow \qquad\qquad\quad & \downarrow \qquad \text{Transf. de tensões} \\
 & \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \xrightarrow{\text{Lei de Hooke}} & \sigma^1,\ \sigma^2
\end{array} \tag{5.105}
$$

onde os índices "x" e "1" indicam os sistemas de eixos. No exemplo, a Lei de Hooke do EPT, eq.(5.81), produz

$$
\left|\begin{array}{l}
\sigma_x = \dfrac{E}{1-v^2}(\varepsilon_x + v\varepsilon_y) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(250 + 0,3\cdot 150)\cdot 10^{-6} = 67,1 \text{ MPa},\\
\sigma_y = \dfrac{E}{1-v^2}(\varepsilon_y + v\varepsilon_x) = \dfrac{207\cdot 10^9}{1-0,3^2}(150 + 0,3\cdot 250)\cdot 10^{-6} = 51,2 \text{ MPa},\\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad\qquad = \dfrac{207\cdot 10^9}{2(1+0,3)}\cdot 100\cdot 10^{-6} = 7,96 \text{ MPa}.
\end{array}\right.
$$

Agora buscamos as tensões principais:

$$
\sigma_{1,2} = \left(\frac{67,1+51,2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{67,1-51,2}{2}\right)^2 + 7,96^2} = \left\{\begin{array}{l} 70,4 \text{ MPa},\\ 47,9 \text{ MPa}.\end{array}\right.
$$

que, como previsto, são os mesmos valores obtidos em (5.104), usando o caminho à esquerda de (5.105).

5.8 Extensômetros e rosetas

Extensômetros elétricos são transdutores de deformação que consistem, basicamente, num filamento metálico colado numa pequena região da superfície de um corpo em sua configuração indeformada. O filamento tem um comprimento, L_f, área de seção transversal A_f, e resistividade elétrica do material conhecida, de forma que sua resistência elétrica R é conhecida. Uma diferença de potencial elétrico V é aplicado nas extremidades do filamento em sua configuração indeformada. Quando o corpo é deformado, o filamento acompanha a deformação local e altera seu comprimento em ΔL_f e sua seção transversal em ΔA_f, o que resulta numa alteração ΔR de sua resistência elétrica. A variação da tensão elétrica é medida e obtém-se uma relação com a variação de comprimento. De fato, após as operações matemáticas pertinentes tem-se uma medição local da deformação específica média do corpo na direção do filamento, na pequena região em que o extensômetro foi colado.

Como as variações de resistência elétricas obtidas dessa forma são muito pequenas, o usual é a construção dos extensômetros com o filamento em "zig-zag" como na Figura 5.35a, de forma a aumentar o comprimento do filamento e assim melhorar a resolução da medição. O extensômetro como um todo é composto pelo filamento colado a uma película polimérica bastante fina que por sua vez serve de base na colagem à peça.

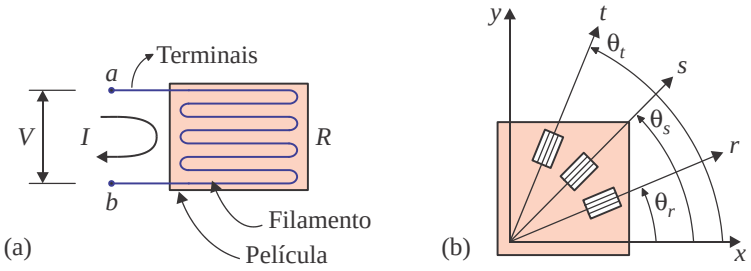


Figura 5.35: (a) Extensômetro simples, (b)roseta genérica de três extensômetros.

Para determinar o estado de deformações num ponto da superfície de um corpo precisamos especificar três componentes de deformação, ε_x, ε_y e γ_{xy}, em relação a um sistema de eixos cartesianos Oxy previamente determinado, tangentes à superfície. Torna-se necessário colar três extensômetros o mais próximos possível do ponto onde se deseja as deformações. Note que não há como medir diretamente uma deformação cisalhante, uma vez que extensômetros medem diretamente apenas deformações extensionais. Entretanto, como será visto a seguir, deformações cisalhantes são medidas, porém de forma indireta.

Como o processo de colar o extensômetro é bastante delicado, a tarefa de colar três deles perfeitamente alinhadas é evitada com o uso das chamadas **rosetas de deformação**. Uma roseta é constituída por dois ou mais extensômetros, montados em fábrica, numa mesma película, em orientações pré-definidas entre si. Dessa forma, a orientação relativa entre eles é bastante precisa e facilita o trabalho de montagem.

A Figura 5.35b mostra uma roseta hipotética com três extensômetros alinhados em três direções arbitrárias, θ_r, θ_s e θ_t. Com a experimentação, temos no ponto do corpo os três valores de deformação, ao longo dos eixos r, s e t, isto é, ε_r, ε_s e ε_t. Com isso, as componentes ε_x, ε_ye γ_{xy} vem da aplicação de $(5.88)_1$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_r & \text{sen}^2\,\theta_r & \text{sen}\,\theta_r\cos\theta_r \\ \cos^2\theta_s & \text{sen}^2\,\theta_s & \text{sen}\,\theta_s\cos\theta_s \\ \cos^2\theta_t & \text{sen}^2\,\theta_t & \text{sen}\,\theta_t\cos\theta_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}. \tag{5.106}$$

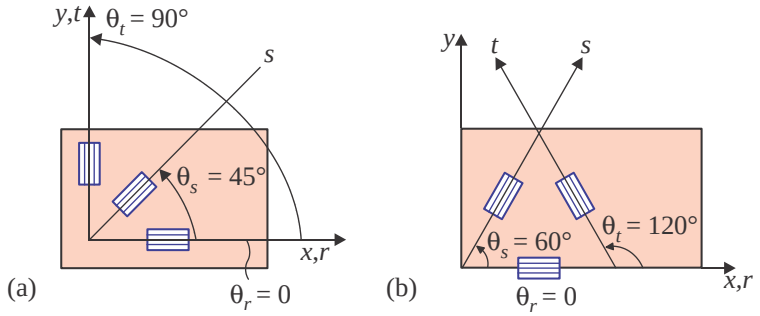


Figura 5.36: Extensômetros mais comuns: (a) roseta retangular 0°/45°/90° e (b) roseta em Δ com 0°/60°/120°.

Os valores de ε_x, ε_ye γ_{xy} são obtidos resolvendo o sistema algébrico. Por exemplo, as rosetas mais comuns são aquelas mostradas na Figura 5.36. Resolvendo (5.106) para essas rosetas temos

- Para a roseta $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/45°/90°$,

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_t, \qquad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_s - (\varepsilon_r + \varepsilon_t)} \tag{5.107}$$

- e para a roseta em delta: $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/60°/120°$,

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_y = \frac{2}{3}(\varepsilon_s + \varepsilon_t) - \frac{1}{3}\varepsilon_r, \qquad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_s - \varepsilon_t)} \tag{5.108}$$

5.9 Exercícios

5.1 Considere o Exemplo 5.1, em que um ponto P de um corpo encontra-se sob estado plano de tensões com as componentes não nulas $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as forças diferenciais que atuam num plano normal a um eixo x', pertencente a um sistema $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 60^o$ em torno do eixo z. Use o método do somatório de forças no elemento diferencial de volume como feito no Exemplo.

5.2 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = -30^o$.

5.3 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = -60^o$.

5.4 Repita o Exercício 1 para uma rotação plana $\theta = 90^o$.

Transformação de tensões planas

5.5 Construa um programa computacional para a transformação plana de estados planos de tensão, conforme as eqs. (5.17) ou (5.18). Programe em Fortran e em Mathematica ou Matlab. Tome como dados de entrada σ_x, σ_y e τ_{xy} e θ.

5.6 Considere o estado plano de tensões $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa e $\tau_{xy} = -25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as componentes de tensão em relação a um sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 30^o$ em torno do eixo z. Esboce as tensões em ambos os sistemas de coordenadas em elementos volumétricos.

5.7 Repita o Exercício 6 para $\theta = 60^o$.

5.8 Repita o Exercício 6 para $\theta = -60^o$.

5.9 Repita o Exercício 6 para $\theta = 90^o$.

5.10 Considere o estado plano de tensões $\sigma_x = 20$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa e $\tau_{xy} = 25$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Determine as componentes de tensão em relação a um sistema de coordenadas $Ox'y'z'$ definido por uma rotação plana $\theta = 30^o$ em torno do eixo z. Esboce as tensões em ambos os sistemas de coordenadas em elementos volumétricos.

5.11 Repita o Exercício 10 para $\theta = -30^o$.

5.12 Repita o Exercício 10 para $\theta = 60^o$.

5.13 Repita o Exercício 10 para $\theta = -60^o$.

5.14 Repita o Exercício 10 para $\theta = 90^o$.

Tensões principais em estado plano de tensões

5.15 Construa um programa computacional para a determinação das tensões principais e tensão cisalhante máxima no plano xy, em estados planos de tensão. Use o fluxograma da eq. (5.33). Determine também os eixos correspondentes (1, 2, a e b) e os ângulos correspondentes em relação ao eixo x. Programe em Fortran e em Mathematica ou Matlab. Tome como dados de entrada σ_x, σ_y e τ_{xy} e calcule σ_1, σ_2 e $\tau_{\max}$ e os ângulos $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, β_1 e β_2.

5.16 Considere o Exemplo 2, com o estado de tensões $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (30;-40;25)$ MPa, em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$. Use o fluxograma da eq. (5.33) para determinar σ_1, σ_2 e $\tau_{\max}$ e os ângulos $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, β_1 e β_2. Esboce as tensões em elementos volumétricos, indicando os eixos e ângulos correspondentes como na Figura 5.11.

5.17 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (30;-40;-20)$ MPa.

5.18 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (20;50;-25)$ MPa.

5.19 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (-20;50;25)$ MPa.

5.20 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (40;40;25)$ MPa.

5.21 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (-20;40;0)$ MPa.

5.22 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (60;20;0)$ MPa.

5.23 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (20;20;0)$ MPa.

5.24 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (80;10;20)$ MPa.

5.25 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (80;10;-20)$ MPa.

5.26 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (70;100;-25)$ MPa.

5.27 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (30;100;25)$ MPa.

5.28 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (30;90;0)$ MPa.

5.29 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (110;70;0)$ MPa.

5.30 Resolva o Exercício 16 para $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}) = (-20;-20;0)$ MPa.

Círculo de Mohr de tensões

5.31 Considere o estado de tensões do Exercício 16. Esboce os três círculos de Mohr e indique as tensões principais, as tensões cisalhantes máximas em cada plano e a tensão cisalhante máxima absoluta. Tome como base os Exemplos 5.6, 5.2 e 5.3. Determine os valores numéricos usando as equações do fluxograma em (5.33).

5.32 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 17.

5.33 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 18.

5.34 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 19.

5.35 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 20.

5.36 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 21.

5.37 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 22.

5.38 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 23.

5.39 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 24.

5.40 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 25.

5.41 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 26.

5.42 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 27.

5.43 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 28.

5.44 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 29.

5.45 Repita o Exercício 31 para os dados do Exercício 30.

Estado triaxial de tensões

5.46 Construa um programa computacional para a determinação das raízes de um polinômio cúbico. Os dados de entrada devem ser as 6 componentes de um estado triaxial de tensões. O programa tanto pode ser baseado num método de busca, como bisseção ou Newton-Raphson, ou baseado na própria solução analítica fechada, que é disponível na literatura, para as três raízes.

5.47 Determine as tensões principais, as tensões cisalhantes máximas em cada plano, a tensão cisalhante máxima absoluta e esboce os 3 círculos de Mohr para o seguinte estado de tensões: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xj} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 30 & 40 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa. Tome como base o Exemplo 5.5.

5.48 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} -20 & 30 & -10 \\ 30 & -40 & 0 \\ -10 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.49 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 30 & -40 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.50 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -30 & -10 \\ -30 & 40 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.51 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -30 & 10 \\ -30 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.52 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} -20 & -30 & 10 \\ -30 & -40 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.53 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -30 & -10 \\ -30 & 40 & 30 \\ -10 & 30 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.54 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -30 & 10 \\ -30 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.55 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -30 & -10 \\ -30 & 40 & 30 \\ -10 & 30 & -10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.56 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 30 & 40 & 30 \\ -10 & 30 & -10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.57 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.58 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ MPa.

5.59 Repita o Exercício 47 para $[\sigma] = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$ MPa.

Transformação de deformações

5.60 Considere o Exemplo 5.7, de um estado plano de tensões, em que componentes de deformação coplanares são $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}) = (-250; -150; 50)10^{-6}$ em relação ao sistema de coordenadas $Oxyz$.

(a) determine ε_z, as deformações principais ε_1, ε_2 e ε_3, a deformação cisalhante máxima no plano 12, $\varepsilon^{12}_{\max}$, e os ângulos $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, β_1 e β_2.

(b) Esboce as deformações em elementos volumétricos, indicando os eixos e ângulos correspondentes como na Figura 5.34. Tome como base o Exemplo 5.7.

(c) Determine as seis componentes do tensor tensão, e as tensões principais. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$ para um material linear isotrópico homogêneo.

5.61 Repita o Exercício 60 para $\boldsymbol{\varepsilon} = (250;-150;-50)10^{-6}$.

5.62 Repita o Exercício 60 para $\boldsymbol{\varepsilon} = (-250;-150;-50)10^{-6}$.

5.63 Repita o Exercício 60 para

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 250 & 50 & 0 \\ 50 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

Note que esses dados não correspondem a um estado plano de tensões. Logo, deve ser usada a lei de Hooke 3D.

5.64 Repita o Exercício 63 para

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -250 & 50 & 0 \\ 50 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

5.65 Determine as deformações principais, as deformações cisalhantes máximas em cada plano, a deformações cisalhante máxima absoluta e esboce os 3 círculos de Mohr para o seguinte estado de deformações:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 250 & 50 & -40 \\ 50 & 150 & 80 \\ -40 & 80 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

Determine as tensões principais. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$ para um material linear isotrópico homogêneo.

5.66 Repita o Exercício 65 para

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -250 & 50 & -40 \\ 50 & 150 & 80 \\ -40 & 80 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

Rosetas

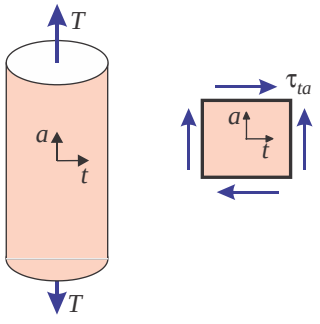
5.67 Considere uma roseta em $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/45°/90°$, em que os valores medidos foram: $\varepsilon_r = 250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_s = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\varepsilon_t = 100 \cdot 10^{-6}$. determine as componentes de deformação ε_x, ε_y, ε_z e γ_{xy} em relação ao sistema cartesiano $0xyz$. Determine as tensões e direções principais. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$ para um material linear isotrópico homogêneo.

5.68 Resolva o Exercício 67 para $\varepsilon_r = -250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_s = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\varepsilon_t = 100 \cdot 10^{-6}$.

5.69 Resolva o Exercício 67 para a roseta em delta, $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/60°/120°$, com os valores medidos $\varepsilon_r = 250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_s = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\varepsilon_t = 100 \cdot 10^{-6}$.

5.70 Resolva o Exercício 67 para a roseta em delta, $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/60°/120°$, com os valores medidos $\varepsilon_r = -250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_s = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\varepsilon_t = 100 \cdot 10^{-6}$.

5.71 Como será visto no Capítulo 7, o estado de tensões numa barra cilíndrica de seção circular, sob a ação de um par de momentos torçores T aplicado nas extremidades, é constituído por apenas uma componente de tensão, o cisalhamento, dado por $\tau_{ta} = Tr/J$, onde t e a são eixos ortogonais com origem num ponto qualquer da superfície do cilindro, nas direções circunferencial e axial, respectivamente. $J = \pi\left(d_e^4 - d_i^4\right)/32$ é o momento polar de inércia da seção transversal do tubo, onde $d_e^4 - d_i^4$ são os diâmetros externo e interno da seção transversal. É considerado que o tubo é de parede delgada, de forma que se pode aproximar $J = \pi d^3 h/4 = 2\pi r^3 h$ onde d é o diâmetro médio, $r = d/2$ é o raio médio e h a espessura da parede.



(a) Determine as tensões e direções principais de tensão no cilindro torcionado, e esboce o círculo de Mohr correspondente.

(b) É possível projetar um experimento para determinar o valor do torque aplicado, usando um corpo de prova cilíndrico com apenas um extensômetro instalado?

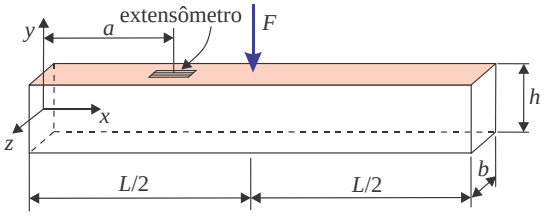
(c) Se a resposta for positiva, qual a orientação do extensômetro?

(d) Se a leitura no extensômetro for $\varepsilon = 100 \cdot 10^{-6}$, qual o valor do torque T aplicado? Considere o material elástico com $E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$, $d = 25$ mm, $h = 1$ mm.

5.72 Considere o cilindro do Exercício 71, porém submetido ao carregamento de torção T e também a uma força axial F. Considere uma roseta em $\theta_r/\theta_s/\theta_t = 0°/45°/90°$ em relação ao eixo t. Os valores medidos foram: $\varepsilon_r = 250 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_s = 150 \cdot 10^{-6}$ e $\varepsilon_t = 100 \cdot 10^{-6}$. Determine F e T aplicados.

5.73 Como será visto no Capítulo 8, o estado de tensões numa viga elástica sob flexão pura é um estado uniaxial, dado por $\sigma_x(x, y) = -M_z(x)y/I$, onde $M_z(x)$ é o esforço de momento fletor na seção de coordenada axial x, y a coordenada ao longo da altura da seção, com origem no seu centroide, I é o segundo momento de inércia da seção, que no caso de uma seção retangular de dimensões $b \times h$ é $I = bh^3/12$. Essa tensão varia linearmente ao longo da altura da seção, y, de forma que atinge seu máximo no topo ou na base da seção. No caso da seção retangular, o máximo numa seção x ocorre nas coordenadas $y = \pm h/2$, de forma que

$$\sigma_{x\,\max}(x) = \mp \frac{M_z(x)h/2}{I}.$$

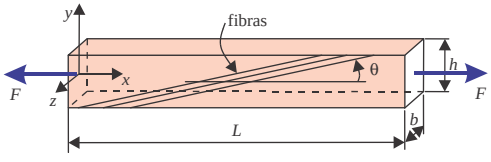


Considere a viga da figura, de seção retangular $b \times h$ e comprimento L, biapoiada, submetida a uma força concentrada F no meio. A uma distância a do apoio foi colado um extensômetro de resistência. Após a aplicação da força, o extensômetro indicou uma deformação axial $\varepsilon_x = -100 \cdot 10^{-6}$ na superfície superior da barra. Determine o valor da força. Use os valores $b \times h = 10 \times 20$ mm, $L = 200$ mm, $a = 80$ mm, $E = 200$ GPa. Considere o comprimento do extensômetro pequeno em relação a L, de forma que se possa tomar sua medição como válida para a coordenada do seu centro, $x = a$.

5.74 Refaça o Exercício 73 para a viga em balanço, engastada na extremidade $x = 0$, com a força F aplicada na outra extremidade, e o extensômetro colado na posição $a = 20$ mm.

Miscelânea

5.75 Uma barra de madeira foi cortada de forma desalinhada em relação à direção das fibras, i.e., as fibras estão orientadas num ângulo $\theta = 5°$ em relação à direção longitudinal da barra, com na Figura. A barra foi solicitada por uma força F em tração. Determine a tensão cisalhante paralela às fibras e a tensão normal a elas. Use $F = 4$ kN, a seção transversal é retangular com lados $b \times h = 20 \times 40$ mm^2.



5.76 Repita o Exercício 75 para um ângulo $\theta = 15°$.

Capítulo 6

Modos e critérios de falha e aplicações

O presente capítulo conceitua e exemplifica os modos de falha de material e de estrutura mais comuns. Em seguida, dois modos de falha, a ruptura frágil e o início de escoamento, são detalhados e são apresentadas as teorias mais usadas para ambos.

6.1 Modos de falha

Em geral, *modo de falha* é a maneira, o processo físico, pelo qual uma porção microscópica de material, um componente mecânico, uma peça estrutural ou todo um sistema venha a falhar.

Essa definição requer uma outra definição, daquilo que se entende por *falha*. De forma geral, *falha* é qualquer comportamento considerado indesejado para o material, componente, peça ou sistema.

Frequentemente o comportamento de falha é originário das opiniões e expectativas dos usuários do objeto. Por exemplo, é o usuário que considera que é falha se um automóvel não consegue desenvolver velocidade superior a 50 Km/h, embora essa velocidade fosse bastante aceitável no início da indústria automobilística. Esse é um exemplo de falha de sistema, cuja origem pode estar em diversos subsistemas do carro, ou ainda pode ter origem num componente.

Falhas estruturais em sistemas (um motor, uma ponte rolante, um veículo, uma tubulação, etc), geralmente têm origem numa falha de componente (barra, viga, placa, trecho de tubo ou casca), e essa falha, por sua vez, tem origem em falha de material, com algumas exceções.

O tipo de falha mais óbvia é a **fratura** de um componente, por exemplo a "quebra" de uma barra em duas partes, ou o aparecimento a olho nu de uma trinca numa chapa metálica. Uma falha desse tipo num componente pode levar todo o sistema a uma **falha catastrófica** (casos clássicos são a falha de uma coluna que pode gerar a queda de uma ponte).

Entretanto, antes que uma falha por ruptura possa ocorrer, uma série enorme de possíveis fenômenos indesejáveis, também classificados como falhas, podem ocorrer. A seguir listamos brevemente alguns dos modos de falha mais comuns em sistemas estruturais de engenharia mecânica, civil e elétrica. As descrições colocadas a seguir são bastante superficiais e incompletas. Cada um desses modos de falha geralmente necessita um livro inteiro e uma ou duas disciplinas apenas para cobrir seus aspectos mais básicos. Entretanto, é importante que todo engenheiro tenha algumas noções qualitativas de alguns desses modos de falha.

1. Falhas por fadiga

É uma falha que só ocorre com o passar do tempo, diferentemente das **falhas estáticas**, que ocorrem logo em seguida ao momento da aplicação da carga. Considere, por exemplo, uma barra de aço que seja dimensionada de forma a ser capaz de sustentar, em segurança, uma certa carga axial $F = f$, que gera uma tensão normal axial $\sigma_x = \sigma$. Então, ao longo do tempo, o histórico de tensão aplicada a cada ponto da barra é constante, como na Figura 6.1b.

Considere agora a mesma barra, porém submetida a uma carga que varia senoidalmente no tempo, com amplitude constante σ_a. Observação experimental mostra que, mesmo que a barra

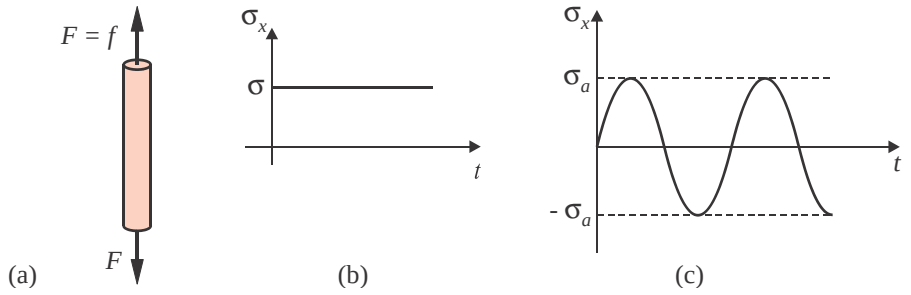


Figura 6.1: Barra em (a) sob carga axial estática em (b) e senoidal (c) ao longo do tempo.

seja capaz de suportar a tensão constante σ por longos períodos de tempo (existem estruturas que se mantém integras suportando cargas por milênios seguidos), ela pode vir a falhar por fadiga em pouco tempo, bastando que a carga varie no tempo, como na forma cíclica mostrada na Figura 6.1c. Isso pode ocorrer tanto com a amplitude de tensão σ_a igual ou mesmo inferior à tensão estática σ. Esse efeito pode ocorrer mesmo que a tensão não seja cíclica, basta que varie no tempo, mesmo que de forma aleatória.

Grosso modo, observa-se experimentalmente que, a cada ciclo de tensão, microtrincas são formadas na superfície da peça. Após um certo número de ciclos, forma-se uma trica de tamanho visível a olho nu (algo como 1 mm). A cada ciclo subsequente essa trinca cresce de tamanho até que, quando ela se torna suficientemente grande em relação à seção transversal da peça, esta sofre uma fratura brusca e final.

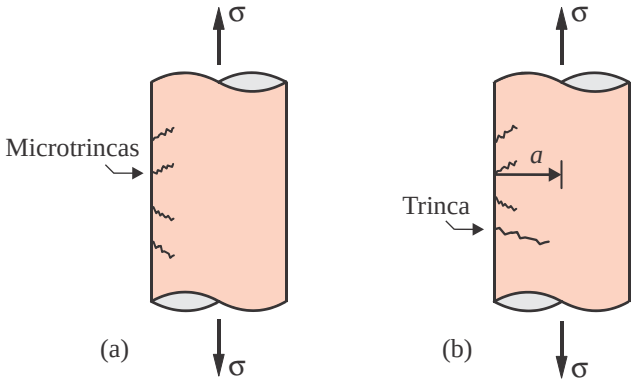


Figura 6.2: Nucleação (a) e propagação (b) de trinca de fadiga.

A probabilidade de ocorrer falha por fadiga ou não é um dos divisores entre a maioria das estruturas civis e mecânicas. A tendência básica é que edifícios e pontes estejam submetidos a cargas que, embora dinâmicas (vento, passagem de veículos, terremotos), não são propensos a falha por fadiga (dentro de certos limites).

Equipamentos mecânicos, por outro lado, tipicamente são constituídos por eixos rotativos, partes com movimentos circulares ou alternantes. Isso faz com que as tensões mais importantes sejam fortemente variáveis ao longo do tempo, tornando as falhas por fadiga uma das mais típicas e comuns em máquinas (junto a desgastes e problemas de lubrificação). Evitar essas falhas é uma das preocupações centrais na **etapa de projeto e dimensionamento do sistema**. Isso é feito com o uso de diversas teorias que têm sido desenvolvidas desde meados do século XIX e continuam em desenvolvimento ainda nos dias de hoje. Adicionalmente, a prevenção desse tipo de falha estende-se durante toda a vida útil dos sistemas, através de **programa de inspeção e manutenção**.

2. Falhas por desgaste

É o tipo de situação comum, por exemplo, em funcionamento de máquinas. A falha por desgaste ocorre quando existem duas superfícies em contato, com tensão compressiva entre elas e movimento relativo. É uma falha que ocorre por remoção gradual de material de uma ou de ambas as superfícies. A partir de certo ponto, a quantidade de material removida pode tornar-se tão grande que uma folga excessiva é gerada entre as partes, levando a problemas de funcionamento da máquina. Geralmente as partículas removidas permanecem na região atritando as superfícies e ajudando a remover mais material. Isso ocorre mesmo em presença de lubrificantes.

3. Falha por deslocamento excessivo

Uma grande quantidade de tipos de projeto é calculada para garantir que a estrutura, não apenas suporte as cargas de trabalho sem sofrerem falhas de ruptura, mas também para garantir que os deslocamentos sofridos por cada parte da estrutura permaneçam pequenos o suficiente para atender a certos requisitos e expectativas. Nesses casos o critério de projeto é dito **critério de rigidez**. Alguns tipos de projeto nessa categoria são:

1. **Peças feitas em plástico rígido** (PVC, polipropileno, poliéster, epóxi etc), como tubulações e conexões de água e de esgoto, eletrodutos, brinquedos, cadeiras/mesas, garrafas, e grande parte da infinidade de tipos de produtos plásticos fabricados atualmente. A **rigidez** é a principal preocupação do engenheiro na etapa de cálculo de projeto e dimensionamento desses produtos devido à rigidez excessivamente baixa dos plásticos em relação aos demais materiais de engenharia, como os metais. Isso pode ser observado comparando os módulos de elasticidade típicos de ambos os grupos de materiais:

$$\begin{aligned} \text{Aços} &\longrightarrow E = 190 \text{ GPa a } 207 \text{ GPa} \\ \text{Alumínio} &\longrightarrow E = 70 \text{ GPa} \\ \text{Plásticos} &\longrightarrow E = 0,50 \text{ GPa a } 3,5 \text{ GPa} \end{aligned}$$

   Esses dados mostram que, na melhor das hipóteses, o plástico é cerca de 60 vezes mais flexível que os aços e cerca de 20 vezes mais flexível que o alumínio. Isso significa que, em relação aos metais, as seções transversais das peças em plástico devem ser, não apenas mais robustas, mas também devem ser bem projetadas, com grande ênfase na forma das seções, e no uso abundante de nervuras e outras variações geométricas.

2. **Eixos em máquinas**. Eixos em máquinas são usados para transmitir movimento e potência entre eixos através de polias ou engrenagens. Geralmente os tipos principais de esforços nos eixos são provenientes do carregamento transversal, de flexão, que gera deslocamentos transversais ao eixo, e também do carregamento torcional. Os métodos de cálculo desse tipo de deslocamento são vistos nos capítulos (12), (14)-(16). A maioria dos eixos em máquinas é construída em material rígido, os aços, e tipicamente devem ser projetados para sofrerem deslocamentos pequenos, da ordem de décimos ou centésimos de milímetros, sob pena de comprometer o bom funcionamento do equipamento e reduzir sua vida útil.

3. **Prédios, pontes** e outras **construções civis**. Esse tipo de estrutura é requerido não apenas ser capaz de sustentar as cargas em segurança, mas também deve desenvolver deslocamentos dentro de certos limites. Por exemplo, um morador de um prédio considerará em falha uma viga da estrutura que aparente deslocamentos grandes o suficiente para serem vistos a olho nú, mesmo que receba garantia de sua segurança estrutural ("não vai cair, está seguro"). É um efeito psicológico que é transposto para as normas de dimensionamento nos projetos em geral.

4. **Vibrações**. Em diversas situações o deslocamento excessivo deve ser evitado na etapa de projeto devido à possibilidade de desenvolvimento de vibrações na estrutura. Vibrações em

máquinas ou prédios podem levar a falhas catastróficas, através do crescimento incontrolável e instável das amplitudes de vibrações, o que geram níveis excessivos de tensões em pontos críticos e sua ruptura final.

5. **Falha por plastificação** - escoamentos, deformações permanentes. Em geral, o desenvolvimento de deformações plásticas é indesejável em componentes mecânicos, pois o escoamento ocorre em níveis de deformação do material altos em relação às deformações elásticas usuais nos projetos. Adicionalmente, a região afetada da peça com uma deformação permanente de alto nível, é uma peça "amassada", "empenada", com forma e dimensão distintas daquelas necessárias ao correto funcionamento do equipamento ou estrutura.

Do ponto de vista de plastificação, diversos tipos de projetos existem:

a. **Projeto elástico**, em que o início de escoamento em qualquer ponto da peça é considerado falha. Frequentemente é um critério utilizado junto aos cálculos de fadiga em peças sob carga variável no tempo.

b. **Plastificação localizada**. Peças sob carga estática podem suportar tensões plásticas em regiões localizadas sem comprometer a integridade do conjunto, desde que partes consideráveis da seção transversal do componente permaneçam elásticas. Situação típica pode ser vista na barra com entalhe na Figura 6.3.A presença do entalhe torna a distribuição de tensões normais

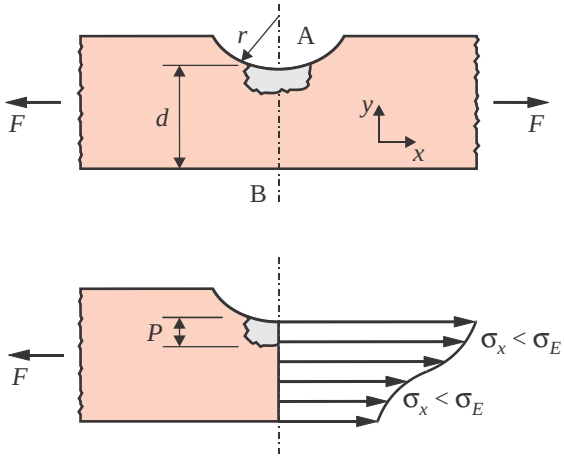


Figura 6.3: Região plastificada no fundo de um entalhe e distribuição de tensões na seção.

na seção mínima AB não uniforme, sendo as tensões no fundo do entalhe, no ponto A, maiores que na face oposta, ponto B, da seção. Se a carga F excede certo limite, a tensão numa porção de material no fundo do entalhe excede a tensão de início de escoamento do material, enquanto no resto da seção a tensão ainda é elástica. A profundidade plastificada é p e a região elástica remanescente tem profundidade $(d - p)$. Se o carregamento for alternante, é possível a nucleação de trincas de fadiga na região, possivelmente aceleradas pela presença da tensão plástica. Nesse caso é necessário o cálculo de vida da fadiga do componente. Entretanto, caso a carga seja estática, pode ser tolerável a plastificação localizada na peça. Nesse caso, o critério de falha é a plastificação total da seção, como comentado no tópico seguinte.

c. **Plastificação total da seção**. Pressupõe que o material seja bastante dúctil, o suficiente para suportar plastificação da seção completa. Nesse ponto o material perde capacidade de suportar a carga. A peça apresenta deformações excessivas que podem levar ao colapso da estrutura. Pode também ocorrer ruptura pela falha final do material.

5. Falhas por comportamento dinâmico.

Comportamentos dinâmicos são desenvolvidos pelo corpo quando sua resposta ao carregamento se dá pela ação não apenas da rigidez do seu material (como nos problemas estáticos), mas também pela ação de sua massa. Os problemas e falhas dinâmicas mais comuns são comentadas a seguir.

a. **Falhas por vibrações excessivas**. Uma força impulsiva F é uma força aplicada durante um período de tempo bastante curto e em seguida volta a zero. Considere o exemplo da viga em balanço na Figura 6.4. Os deslocamentos transversais são oscilatórios, como na figura (a). Esses deslocamentos tendem a se dissipar ao longo do tempo, i.e., sua amplitude diminui até o repouso em virtude de amortecimentos no sistema. Esse processo é ilustrado na Figura 6.4a. Em geral, peças com baixas relações rigidez/inércia, i.e., peças com baixa rigidez e grande massa ou inércia, quando submetidas à ação de uma carga impulsiva, tendem a apresentar deslocamento oscilatório. Em máquinas e outros equipamentos com partes rotativas é comum

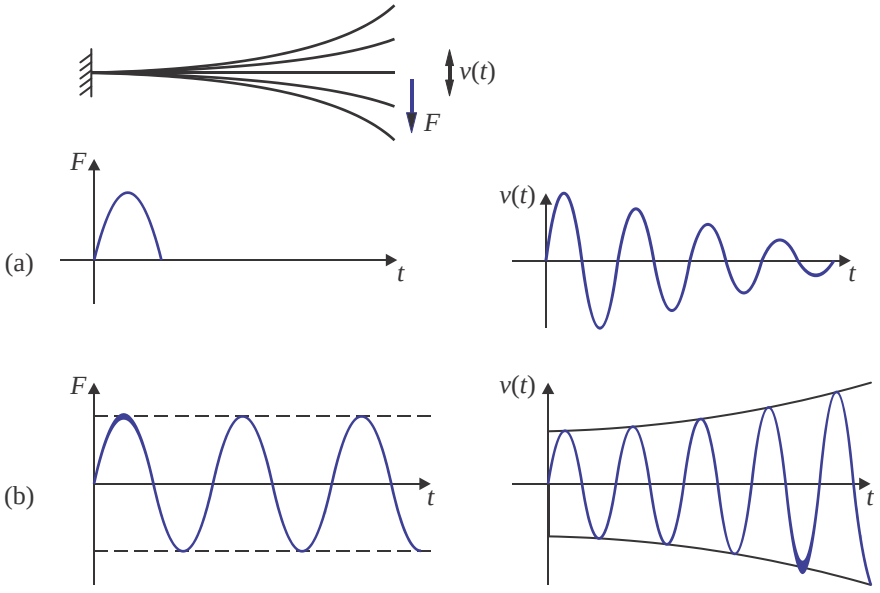


Figura 6.4: (a) Carregamento impulsivo numa viga e sua resposta em deslocamento no tempo; (b) Carregamento harmônico e resposta de ressonância não amortecida.

que a excitação mecânica seja harmônica, i.e., com amplitude e frequência constantes, dada em seno ou cosseno do tempo, como na Figura 6.4b. Nesse caso, se o sistema apresentar baixo amortecimento, é possível que a amplitude de deslocamento seja muito grande, dependendo da frequência de excitação. A Figura 6.4b apresenta o caso extremo de ausência de amortecimento, em que as amplitudes crescem continuamente se a frequência do carregamento coincidir com a frequência natural do sistema. Associado ao deslocamento do componente existem os campos de deformação e de tensão. A partir de certo valor de deslocamento nas amplitudes de vibração, diversos tipo de falha de material podem ocorrer (plastificação, ruptura, fadiga). Mesmo que não ocorra esse tipo de falha de material, o movimento relativo das partes no equipamento pode impedir seu correto funcionamento.

Adicionalmente, as vibrações geram ondas sonoras nas partes sólidas e no ar que podem causar desconfortos inadmissíveis em operários, usuários do equipamento, ou transeuntes. Exemplos extremos desse tipo de falha são veículos (automóveis, caminhões, trens, aviões), equipamentos em plataformas petrolíferas, navios, etc.

b. **Falhas por impacto**. Choques de veículos, objetos atingidos por projéteis, peças (embalagens de produtos, aparelhos eletrodomésticos, etc) em queda livre, e uma infinidade de situações estão associadas à aplicação de cargas durante um tempo muito curto. Os tempos típicos

desses eventos são 100 ms a 0,01 ms, com velocidades que vão de 20 km/h a velocidades supersônicas de 2.000 km/h ou mais.

Quando a peça é solicitada em alta velocidade, diversos dos tipos de falha anteriormente comentados podem ocorrer: plastificação parcial, deformação excessiva, ruptura. Entretanto, o próprio material responde de forma diferente conforme a velocidade de solicitação. A Figura 6.5 mostra duas curvas tensão-deformação qualitativas para um mesmo material, obtidas em ensaios a duas velocidades diferentes. Tipicamente, os materiais apresentam as seguintes

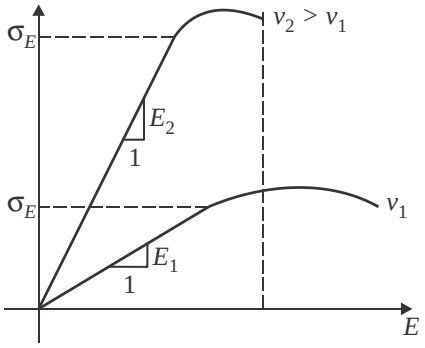


Figura 6.5: Diagramas tensão-deformação de um material em diferentes velocidades v.

características quando a velocidade de deformação aumenta:

- Aumenta a tensão de início de escoamento σ_E;
- Aumenta a tensão de ruptura;
- Aumenta o módulo de elasticidade. Em alguns materiais, como aços e alguns polímeros, essa variação pode ser pequena e é frequentemente desprezada;
- Redução de deformação máxima da fratura. Isso significa que em altas velocidades o material se comporta de forma mais frágil que em baixas velocidades.

Considerações complementares.

Uma longa série de outros fenômenos físicos associados a comportamento de material não são comentados aqui: viscoelasticidade (linear e não-linear), viscoplasticidade, fadiga superficial, fadiga sob corrosão, envelhecimento em polímeros, corrosão, falhas por ataques químicos, entre outros. Um fenômeno adicional, as falhas por **flambagem e instabilidade**, que não são associadas ao material, são vistas de forma introdutória para barras no Capítulo 13.

Em cursos de graduação de engenharia mecânica é comum a existência de uma disciplina introdutória para estudos de vibração e outra para aplicação de fadiga em elementos de máquinas. Os demais fenômenos e falhas comentadas nessa seção são vistos em disciplinas de pós-graduação ou apenas em leituras de material didático apropriado. Cada fenômeno, como plasticidade, por exemplo, apresenta diferentes aspectos conforme o tipo de material e outras condições. Isso torna necessário o desenvolvimento de dezenas de teorias com suas variantes.

6.2 O problema fundamental dos critérios de falha

Os modos de falha de material, como o escoamento, são determinados pelo *estado do material* numa porção definida deste, de dimensões diferenciais: o estado de tensões e de deformações no ponto. Consideramos aqui as teorias que se baseiam apenas no estado de tensões para prever o início de escoamento do material no ponto.

A falha então é considerada ser desencadeada pelo **tensor tensão aplicado no ponto da peça** (cf. Figura 6.6a):

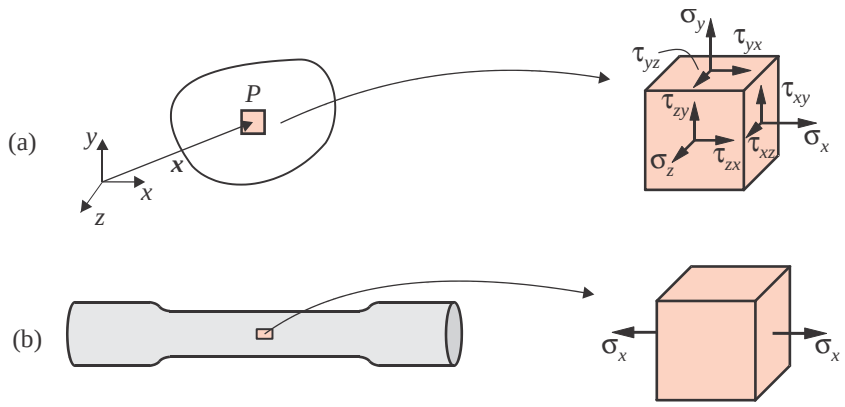


Figura 6.6: (a) Estado triaxial de tensões num ponto de uma peça e (b) num ponto de um corpo de provas em ensaio uniaxial.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Por outro lado, o material isotrópico-homogêneo é testado quanto ao início do escoamento por um **ensaio uniaxial**, através da determinação da tensão de início de escoamento, σ_E. Uma vez que o material é homogêneo e isotrópico, basta um teste uniaxial, em que o estado de tensões é

$$\boldsymbol{\sigma}_{CP} = \begin{bmatrix} \sigma_{CP} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o escoamento inicia-se no **corpo de provas** quando $\sigma_{CP} = \sigma_E$.

Uma teoria de falha é uma teoria que propõe um critério para identificar se um dado estado triaxial de tensões atuando num ponto de uma peça leva o material nesse ponto ao escoamento. A dificuldade principal na elaboração de qualquer critério é o fato de que a solicitação na peça é dada pelas seis componentes de tensão, enquanto a "resistência" do material é dada por apenas um valor, σ_E. O critério de falha deve fornecer uma comparação do tipo

$$\underbrace{\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \sigma_{xx}\ \tau_{yz}}_{\text{solicitação, peça}} \longleftarrow \quad \begin{matrix}\text{Critério} \\ \text{de falha}\end{matrix} \quad \longrightarrow \underbrace{\sigma_E}_{\text{resistência, C.P., material}} \tag{6.2}$$

Observe que não se pode garantir que o material esteja elástico apenas pelo fato de que, por exemplo, $\sigma_x < \sigma_E$, e/ou $\sigma_y < \sigma_E$, etc. Mesmo que todas as componentes de tensão estejam abaixo do limite elástico, é possível ocorrer plastificação no ponto.

O que as teorias de falha fazem é fornecer uma formulação que calcula uma **tensão equivalente** σ_{EQ}. *O objetivo é que essa tensão equivalente, caso fosse aplicada como estado uniaxial no material, como na Figura 6.7, produziria o mesmo dano no material que aquele provocado pelo estado triaxial de tensões.* As diversas teorias existentes não conseguem determinar tensões perfeitamente equivalentes, mas apenas aproximação mais ou menos acuradas para os diversos tensores tensão possíveis.

Tendo então uma estimativa uniaxial para a solicitação no material, o critério para identificar se o material no ponto considerado da peça está no campo elástico torna-se simplesmente uma comparação, i.e.,

$$\begin{aligned} &\text{se } \sigma_{EQ} < \sigma_E \longrightarrow \text{material elástico no ponto;} \\ &\text{se } \sigma_{EQ} = \sigma_E \longrightarrow \text{material no início do escoamento.} \end{aligned} \tag{6.3}$$

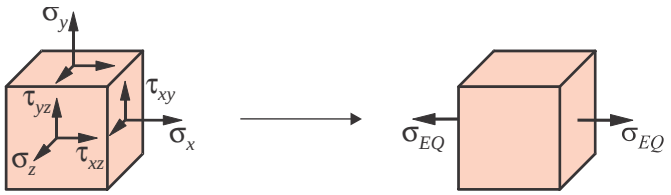


Figura 6.7: Estado de tensão triaxial no corpo e o estado de tensão uniaxial equivalente.

Nas próximas seções serão apresentadas duas teorias de início de escoamento e uma de ruptura de materiais frágeis.

6.3 Teoria da máxima tensão normal - TMTN

Essa é uma teoria de previsão de falha por ruptura em materiais frágeis. Apesar de ter sido enunciada em meados do século XIX, por W.J.M. Rankine, ainda é bastante aplicada, tanto em materiais como rochas, vidro, cerâmicos, quanto em materiais modernos frágeis como fibras de alto desempenho (como as fibras de vidro e de carbono, usadas nos materiais compostos).

A partir de observações experimentais, a teoria indica que a falha por ruptura, a separação, decorre diretamente da maior das tensões principais atuando no ponto.

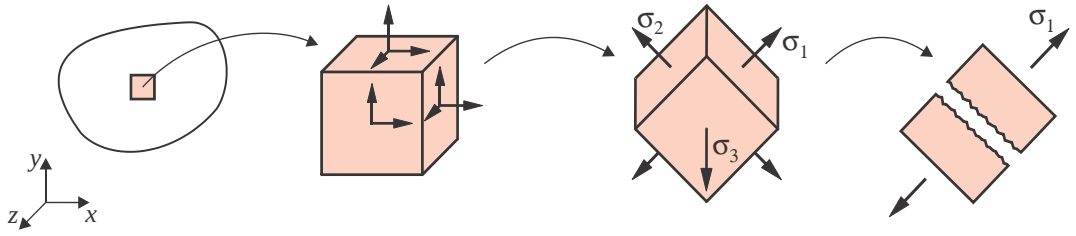


Figura 6.8: Tensões principais num elemento de material numa peça.

Por exemplo, se $\sigma_1 > \sigma_2$ e $\sigma_1 > \sigma_3$, quando σ_1 ultrapassa certo valor crítico deve ocorrer a ruptura, como ilustrado na Figura 6.8. O valor crítico é obtido num ensaio uniaxial: a tensão de ruptura do corpo de provas fornece o limite de ruptura σ_R do material.

As etapas de cálculo para verificação de segurança quanto a falha por ruptura usando essa teoria são as seguintes:

- *Etapa 1* - Determinar as componentes do tensor tensão solicitante, num ponto da peça, $\sigma = \{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$;
- *Etapa 2* - Determinar a tensões principais $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\}$;
- *Etapa 3* - Determinar a tensão equivalente como

$$\sigma_{EQ} = \text{Max}\left\{|\sigma_1|\,;|\sigma_2|\,;|\sigma_3|\right\} \tag{6.4}$$

- *Etapa 4* - Aplicar o critério de falha:

$$\begin{aligned} &\text{se } \sigma_{EQ} \;<\; \sigma_R \longrightarrow \text{ não há ruptura frágil naquele ponto da peça;} \\ &\text{se } \sigma_{EQ} \;=\; \sigma_R \longrightarrow \text{ o ponto da peça sofre ruptura.} \end{aligned} \tag{6.5}$$

- O critério pode ser adaptado ao cálculo de um **coeficiente de segurança** n, dado por

$$n = \frac{\sigma_R}{\sigma_{EQ}} \tag{6.6}$$

Via de regra os materiais frágeis são mais resistentes à compressão que à tração. Assim, torna-se mais interessante realizar ensaios uniaxiais distintos em tração e compressão, obtendo as tensões limites σ_{RT} e σ_{RC} respectivas. Nota-se que a ruptura por separação só ocorre na tração, enquanto que a falha na compressão é geralmente caracterizada por esmagamento, trituração e granulação de material. Nesse caso, o critério pode ser adaptado da eq. (6.5) para a seguinte forma:

- *Etapa 5* - Critério para material com diferentes valores de resistência à tração e compressão:

$$\boxed{\text{se } -\sigma_{RC} \leq \{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} \leq \sigma_{RT} \;\Rightarrow\; \text{sem falha.}} \tag{6.7}$$

Note que um material com diferentes propriedades em tração e compressão não é isotrópico.

O domínio de tensões principais seguras pode ser visualizado graficamente para o estado plano de tensões como a região interna de um retângulo no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, como visto na Figura 6.9 para o caso de $\sigma_3 = 0$.

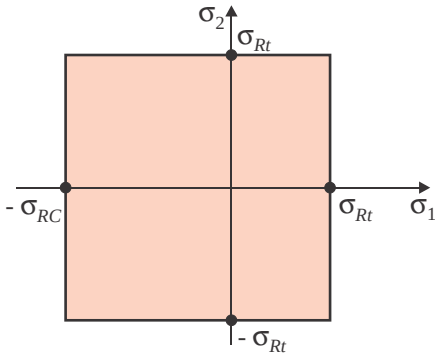


Figura 6.9: Região de segurança pela TMTN, para $\sigma_3 = 0$.

6.4 Teoria da máxima tensão cisalhante - TMTC

Esta também é chamada teoria de Tresca (H. Tresca), que a apresentou em 1868, embora ela tenha sido anteriormente proposta por C.A. Coulomb em 1773. Essa teoria decorre de observações experimentais que mostram que em **materiais dúcteis**, quando a solicitação atinge um calor crítico, ocorre deslizamento de planos atômicos com orientação adequadas em relação ao tensor tensão. Dois aspectos podem ser apontados:

1. Como o processo envolve deslizamento de planos, na rede cristalina do material, o tipo de tensão importante é a tensão cisalhante.

2. Uma vez que um plano desliza sobre outro, ele assim permanece, mesmo que ocorra um descarregamento das tensões. Isso significa que esse tipo de deformação é permanente, diferentemente do comportamento elástico, que ocorre por afastamento ou aproximação dos planos atômicos em presença de tensão normal trativa ou compressiva.

O fenômeno é ilustrado na Figura 6.10 para um volume diferencial de material com uma rede cristalina orientada nas direções da tensão cisalhante τ. Se τ for menor que o valor crítico τ_E o material apenas sofre deformações cisalhantes, elásticas. Se $\tau \geq \tau_E$, ocorre deslizamento em um ou mais planos cristalinos.

τ_E é a **tensão cisalhante de início do escoamento** do material. Sua determinação para um material isotrópico é feita, geralmente, por ensaio de tração. A tensão na direção axial é simplesmente σ_x, porém em eixos a $\pm 45^0$ desenvolvem-se a tensão cisalhante máxima $\tau_{\max} = \sigma_x/2$ como visto no círculo de Mohr da Figura 6.11. Conforme a força no ensaio cresce, σ_x cresce até

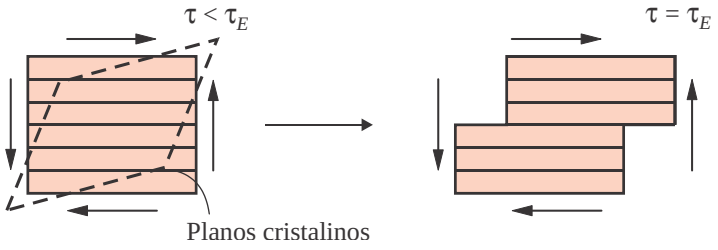


Figura 6.10: Idealização do deslizamento do plano cristalino em presença de tensão cisalhante.

atingir a tensão normal de início de escoamento σ_E. Nesse ponto a tensão cisalhante atinge seu valor crítico $\tau_E = \sigma_E/2$. Considera-se então que esse valor caracteriza o material quanto à falha por início de escoamento.

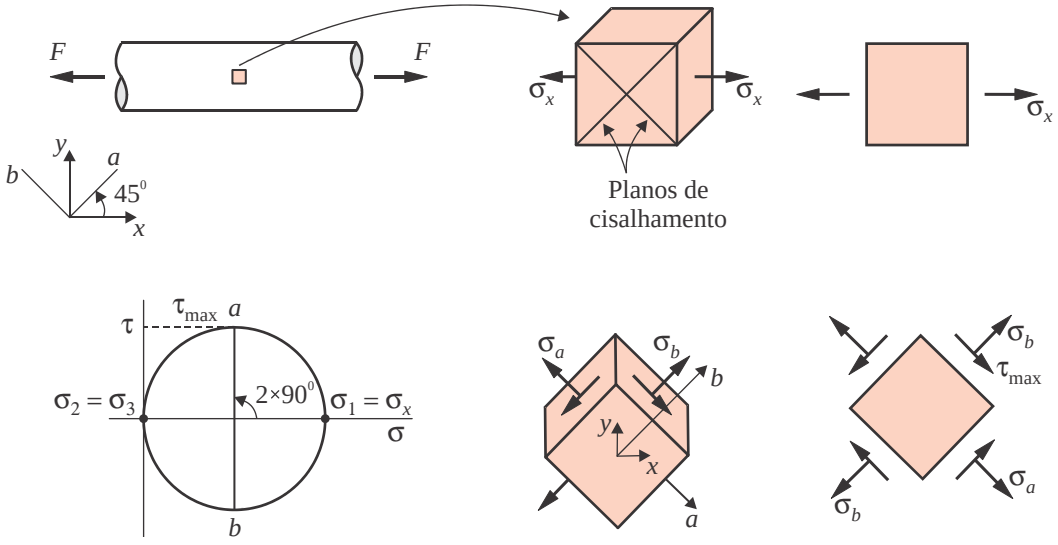


Figura 6.11: Estado de tensões no ensaio uniaxial, círculo de Mohr e tensão cisalhante máxima.

Para o material num ponto de uma peça, submetido a um estado triaxial de tensões, o critério para identificar se há *falha por início de escoamento* pode ser resumido nas seguintes etapas:

- *Etapa 1* - Determinar as componentes do tensor tensão solicitante no ponto em análise na peça, $\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas pré-estabelecidas, xyz;

- *Etapa 2* - Determinar as tensões principais, σ_1, σ_2 e σ_3. Caso seja de interesse, também os eixos principais 1, 2, 3.

- *Etapa 3* - Determinar a tensão cisalhante máxima por

$$\tau_{\max}^{abs} = \frac{1}{2}\text{Max}\left\{|\sigma_1 - \sigma_2|\,; |\sigma_1 - \sigma_3|\,; |\sigma_2 - \sigma_3|\right\}. \tag{6.8}$$

  Essa é a tensão equivalente gerada pela TMTC.

- Etapa 4 - Aplicar o critério de falha de início de escoamento:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{se } \tau_{\max}^{abs} < \tau_E \longrightarrow \text{o material no ponto de corpo é elástico} \\ \text{se } \tau_{\max}^{abs} = \tau_E \longrightarrow \text{o material inicia escoamento, sendo que } \tau_E = \sigma_E/2.\end{array}} \tag{6.9}$$

O plano em que ocorrerá o escoamento é aquele orientado a 45° entre os eixos 1-2, 1-3 ou 2-3, dependendo de qual das diferenças for máxima na eq. (6.8), se $|\sigma_1 - \sigma_2|$, $|\sigma_1 - \sigma_3|$ ou $|\sigma_2 - \sigma_3|$.

O critério pode ser expresso em forma de desiguladades, como em (6.9), mas pode também ser colocado em termos de um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento:

$$n = \frac{\tau_E/2}{\tau_{\max}^{abs}} \tag{6.10}$$

A região de segurança quanto à falha por início do escoamento, também chamada **domínio elástico**, pode ser identificado graficamente num plano cartesiano $\sigma_1 - \sigma_2$ para um estado plano de tensões com $\sigma_3 = 0$. Existem seis possibilidades, conforme as magnitudes relativas entre σ_1, σ_2 e σ_3.

$$\textbf{Caso 1}\text{: } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}. \tag{6.11}$$

Logo, a região elástica é dada por $\sigma_1/2 \leq \sigma_E/2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_1 \leq \sigma_E}$.

Da mesma forma, tem-se outras combinações:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Caso2} \;:\; \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\sigma_2 \leq \sigma_E} \\
&\textbf{Caso 3} \;:\; \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\sigma_1 \geq -\sigma_E} \\
&\textbf{Caso 4} \;:\; \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3 = 0 \longrightarrow \boxed{\sigma_2 \geq -\sigma_E} \\
&\textbf{Caso 5} \;:\; \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \text{ sendo } \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Então, como $\tau_{\max} \leq \sigma_E/2$, tem-se que $\boxed{\sigma_2 \geq \sigma_1 - \sigma_E}$.
Finalmente, no **Caso 6**, $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$, com $\sigma_3 = 0$, se obtém $\tau_{\max} = \left(\sigma_2 - \sigma_1\right)/2$, o que resulta $\sigma_2 \leq \sigma_1 + \sigma_E$.

Com isso tem-se seis desigualdades que geram a região interna do polígono mostrado na Figura 6.12, cujas coordenadas indicam os possíveis estados planos de tensão seguros quanto à falha por início do escoamento, conforme previsto pelo TMTC. Pontos sobre o polígono indicam que o material se encontra em escoamento.

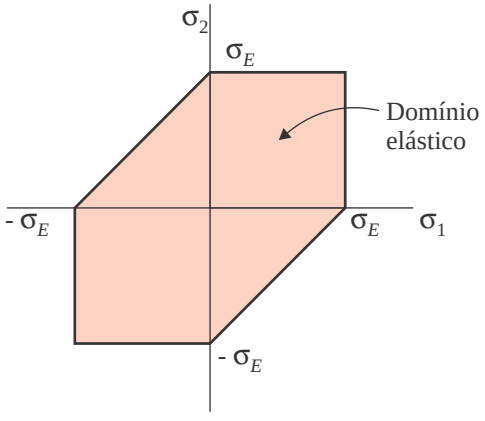


Figura 6.12: Domínio elástico para EPT pela TMTC.

6.5 Teoria da máxima energia de distorção - von Mises

Essa teoria é também conhecida como teoria de von Mises, que a desenvolveu em 1913 a partir do trabalho do polonês T.M. Huber em 1904. Ele partiu de uma decomposição da d*ensidade de energia de deformação elástica* em um material isotrópico em duas partes, uma associada inteiramente à

variação de volume (denominada energia de deformação volumétrica) e outra à variação de forma do elemento diferencial de massa, (denominada *energia deviatórica*). Note que o desenvolvimento da teoria que apresentaremos a seguir faz uso de conceitos de energia, que só serão apresentados no Capítulo 14, pagina 509 entre as eqs.(14.1) e (14.18). Entretanto, o desenvolvimento abaixo pode ser seguido em suas etapas principais.

Parte-se do estado de tensões triaxial no ponto, dado pelas componentes $\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\}$. Uma vez que nos restringimos a **materiais isotrópicos**, o efeito dessas componentes é o mesmo causado pelas tensões principais. Então pode-se trabalhar com as componentes do tensor tensão nas direções principais

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Um estado de tensões incorpora diferentes tipos de comportamento físico aplicado ao material. O tipo mais comum de identificação de comportamentos consiste na decomposição do tensor em uma soma de dois tensores, um representando o efeito de mudança de volume no elemento diferencial, $\boldsymbol{\sigma}^h$, e outro associado à sua distorção angular, $\boldsymbol{\sigma}^d$, i.e.:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^h + \boldsymbol{\sigma}^d. \tag{6.14}$$

A **tensão hidrostática** (ou volumétrica) é definida pelo escalar

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \tag{6.15}$$

Define-se o **estado de tensões esféricas** *ou* **hidrostáticas** por

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \begin{bmatrix} \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\sigma} \end{bmatrix} = \overline{\sigma}\mathbf{I}, \tag{6.16}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Um elemento diferencial de material isotrópico submetido a essas componentes, que são iguais nas três direções, sofre apenas variação de volume. Não sofre variações de forma devida a cisalhamento (Figura 6.13a).

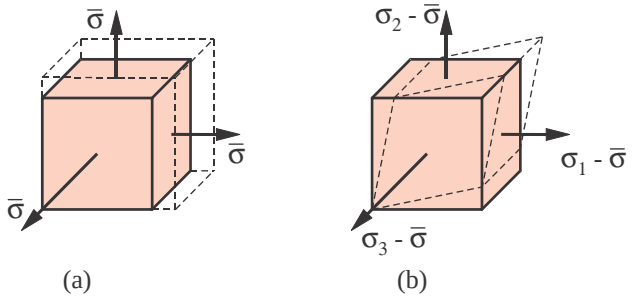


Figura 6.13: Deformação (a) volumétrica e (b) deviatórica.

Define-se em seguida o **tensor tensão deviatórico** como

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \overline{\sigma} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} - \overline{\sigma}\mathbf{I}. \tag{6.17}$$

O efeito dessas tensões é uma variação de forma, através de deformações cisalhantes, com volume constante. Isso é ilustrado na Figura 6.13b.

Com essas definições é possível representar o tensor tensão arbitrário (6.13) como uma combinação de um estado de tensão volumétrico e de outro deviatório, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^h + \boldsymbol{\sigma}^d$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \overline{\sigma} \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

Por outro lado, a *densidade de energia de deformação elástica* pode ser escrita em termos das tensões principais, como será detalhado no Capítulo 14, pagina 509 entre as eqs.(14.1) e (14.18), (com as componentes cisalhantes nulas) por

$$U = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right). \tag{6.19}$$

Caso se tenha um estado hidrostático de tensão, a *densidade de energia de dilatação (ou volumétrica, ou hidrostática)* é dada por $U^h = 3(1-2v)\overline{\sigma}^2/2E$ (basta fazer $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \overline{\sigma}$ em (6.19) e simplificar). Como $\overline{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, tem-se

$$U^h = \frac{(1-2v)}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2. \tag{6.20}$$

A parcela de **energia** correspondente às **distorções** é obtida subtraindo a energia total pela volumétrica, $U^d = U - U^h$ que, simplificando de (6.19) e (6.20), é dada por

$$\boxed{U^d = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2\right]} \tag{6.21}$$

para um estado triaxial de tensões. Já para um **estado uniaxial de tensões** como aquele obtido num ensaio de *corpos de provas* em tração, o estado de tensões é $\sigma_1 = \sigma_E$, e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ no ponto de início de escoamento. Então, a **energia de distorção no ensaio de tração**, no início do escoamento do corpo de provas é obtido simplificando (6.21) para $\sigma_1 = \sigma_E$, e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$:

$$U_E^d = \frac{2\sigma_E^2}{12G}. \tag{6.22}$$

A hipótese de von Mises é que um ponto de uma peça, sob estado triaxial de tensões, atingirá o início de escoamento se a energia de distorção atingir o valor crítico U_E^d. Então, comparando as equações (6.21) e (6.22) obtém-se o **critério da máxima energia de distorções** como:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \sigma_{EQ} < \sigma_E \longrightarrow \text{material elástico} \\ \text{Se } \sigma_{EQ} = \sigma_E \longrightarrow \text{início de escoamento} \\ \text{onde } \sigma_{EQ} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2\right]} \end{array}} \tag{6.23}$$

σ_{EQ} é a **tensão equivalente** estimada pela teoria. Para um **estado plano de tensões**, com $\sigma_3 = 0$, a expressão da tensão equivalente é simplificada. Incorporando também o **coeficiente de segurança** n quanto ao início de escoamento no ponto da peça, o critério pode ser posto como

$$\boxed{\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_E}{n}} \tag{6.24}$$

Representando as tensões principais em termos das componentes de tensão nas direções xy, essa expressão toma a forma:

$$\boxed{\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_E}{n}} \tag{6.25}$$

A segunda igualdade em (6.24) com $n > 1$ define a região elástica para o EPT. No caso, $n = 1$, o limiar do escoamento, a equação $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_E^2$ é uma elipse no plano $\sigma_1 - \sigma_2$, como mostrado na Figura 6.14. Para efeito de comparação, a mesma figura mostra a estimativa de domínio elástico fornecida pela teoria de máxima tensão cisalhante. Tensões no interior da elipse

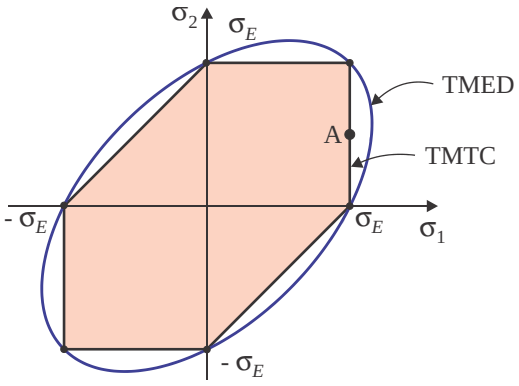


Figura 6.14: Domínios elásticos previstos pelas teorias de Tresca e de von Mises.

indicam que o material se comporta elasticamente, e pontos sobre a elipse indicam que o material está em escoamento.

Algumas observações podem ser feitas.

1. Nos casos uniaxiais, ($\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_2 = 0$), ambas as teorias (von Mises e Tresca) produzem o mesmo resultado;

2. A TMTC é o que se chama de teoria *mais conservativa* que a TMED. Isto significa que, para um ponto material submetido a um estado de tensões, dado por exemplo, por $\sigma_1 = \sigma_E$ e $\sigma_2 = \sigma_E/2$, (o ponto A na Figura 6.14), a TMTC já prevê início de escoamento, enquanto a TMED prevê que o material ainda é elástico. Como existem muitas incertezas, tanto na determinação experimental de σ_E quanto nas próprias teorias, a TMTC é mais segura que a TMED. Entretanto, os resultados experimentais para materiais dúcteis indicam que a TMED é mais precisa em prever o início do escoamento;

3. Ambas as teorias são correntemente usadas em projetos de engenharia;

4. Ambas as teorias consideram que o início do escoamento independe da parcela volumétrica do tensor tensão. Isso pode ser observado tomando a eq. (6.23) para a tensão equivalente associada a um estado de tensões dado por σ_1, σ_2 e σ_3. Se definirmos um segundo estado de tensões σ^* somando uma tensão hidrostática σ_h, teríamos

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 + \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 + \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^* \end{bmatrix}$$

Ambos os estados de tensão são visualizados no plano de Mohr na Figura 6.15. De fato, os três círculos associados a σ^* correspondem a uma translação σ_h dos círculos de $\boldsymbol{\sigma}$.Observando

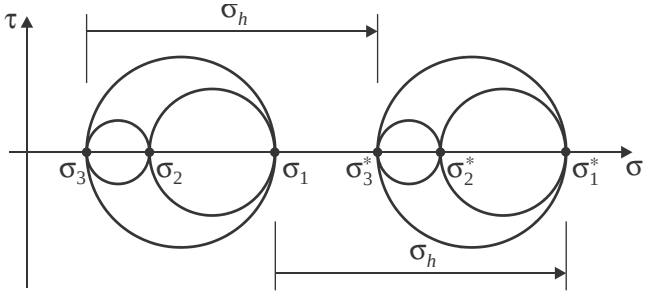


Figura 6.15: Círculos de Mohr sob efeito de tensão hidrostática.

a eq. (6.23) nota-se que a tensão equivalente não se altera pela adição da tensão hidrostática: σ_{EQ} é a mesma tanto para o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ quanto para $\boldsymbol{\sigma}^*$. Isso significa que não importa a posição do círculo de Mohr: pela teoria de von Mises, ele pode ser transladado arbitrariamente para $-\infty$ ou $+\infty$ sem que isso afete o início do escoamento.

5. Observando a expressão da tensão equivalente da TMTC, eq. (6.8), nota-se que o mesmo efeito do item anterior se aplica: não importa a posição do círculo de Mohr, apenas seu diâmetro máximo, que define $\tau_{\max}^{abs}$.

6. Observações experimentais mostram que essa hipótese é aproximadamente correta para os metais dúcteis. Entretanto nota-se que os polímeros rígidos (PVC, PP, etc) têm o início do escoamento sensível à tensão hidrostática.

7. Outros tipos de materiais são sensíveis à tensão hidrostática, como os solos e materiais granulados. Para esses casos existem outras teorias adequadas, como a de *Mohr-Coulomb* e a de *Drucker-Prager*.

Exemplo 6.1 - Aplicação dos critérios de falha

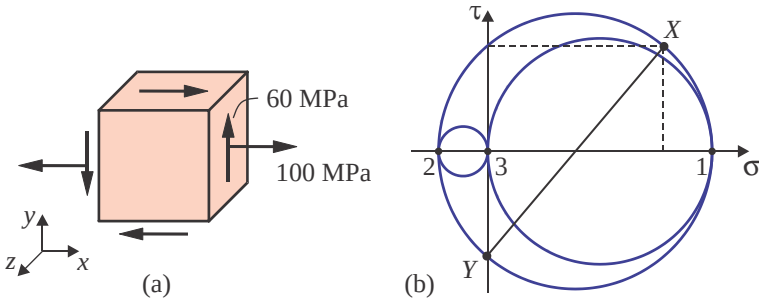


Figura 6.16: Dados e resultados do Exemplo 1.

Considere um ponto de uma peça submetido às tensões indicadas na Figura 6.16a. Determine o coeficiente de segurança para os seguintes casos. (a) Caso o material seja frágil, com tensão de ruptura $\sigma_R = 150$ MPa. (b) Caso o material seja dúctil, com tensão de escoamento $\sigma_E = 220$ MPa.

Solução:

O estado de tensões é plano, dado por $\{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\} = \{100; 0; 60\}$ MPa, $\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, i.e., o tensor tensão é

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 60 & 0 \\ 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A *primeira etapa* consiste em determinar as tensões principais, que são obtidas pela eq. (5.44), página (185):

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$= \frac{100 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + 60^2}.$$

Logo, $\sigma_1 = 128,1$ MPa, $\sigma_2 = -28,1$ MPa e $\sigma_3 = 0$. Essas componentes são ilustradas nos círculos da Figura 6.16b. As tensões também podem ser obtidas pelo seguinte problema de autovalor, conforme a eq. (5.51):

$$\det\left[\sigma - I\right] = \det\begin{bmatrix} 100-\sigma & 60 & 0 \\ 60 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0.$$

Isso gera o polinômio $p(\sigma) = \sigma\left[(100-0)\,\sigma + 60^2\right] = 0$ cujas raízes são exatamente as tensões principais já obtidas.

A segunda etapa, para o **material frágil**, consiste em determinar a tensão equivalente pela TMTN. Pela eq. (6.4), $\sigma_{EQ} = 128,1$ MPa. O coeficiente de segurança quanto à ruptura é obtido de (6.6):

$$n = \frac{\sigma_R}{\sigma_{EQ}} = \frac{150}{128,1} = 1,17.$$

Para o **material dúctil**, as tensões equivalentes pelos critérios de Tresca e de von Mises vêm das equações (6.8) e (6.24):

$$\begin{aligned} \tau_{amx}^{abs} &= \frac{1}{2}\max\left\{\left|\sigma_1-\sigma_2\right|;\left|\sigma_1-\sigma_3\right|;\left|\sigma_2-\sigma_3\right|\right\}, \\ &= \frac{1}{2}\max\left\{\left|128,1+28,1\right|;\left|128,1-0\right|;\left|-28,1-0\right|\right\} = 78,1 \text{ MPa.}, \\ \sigma_{EQ} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2\right]} = 144,2 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Os coeficientes de segurança previstos no ponto do corpo são

$$\begin{aligned} \text{Tresca} \quad &\longrightarrow \quad n = \frac{\tau_E}{\tau_{\max}^{abs}} = \frac{\sigma_E 2}{\tau_{\max}^{abs}} = \frac{220/2}{78,1} = 1,41, \\ \text{von Mises} \quad &\longrightarrow \quad n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{EQ}} = \frac{220}{144,2} = 1,53. \end{aligned}$$

O ponto que representa a solicitação, $\sigma_1 = 128,1$ MPa, $\sigma_2 = -28,1$ MPa, está representado no ponto A do diagrama da Figura 6.17. Os pontos B e C indicam os pontos de resistência previstos por cada uma das teorias. Isso significa que, num eventual caso de incidente que leve a uma sobrecarga inesperada na peça, a tensão solicitante cresce ao longo da linha OA, e quando atingir o ponto B, ou C, dependendo da teoria, haveria o início do escoamento no material. Isso pressupõe o chamado **carregamento proporcional**. Nesse tipo de carregamento todas as forças aplicadas crescem conforme um mesmo fator, de forma a manterem entre si as mesmas proporções. Assim, todas as componentes de tensão em todos os pontos da peça também crescem mantendo a mesma proporção entre si.

6.6 Vasos de pressão cilíndricos de paredes finas

Um dos dispositivos mecânicos mais usados na indústria são os vasos de pressão e as tubulações pressurizadas (Figura 6.18). Embora o detalhamento desses projetos esteja além do escopo de um texto introdutório, o dimensionamento da parede é feito por procedimento simples de cálculo, conforme será descrito nessa seção. Um vaso de pressão é uma casca fechada submetida a pressão interna ou externa pela ação de gases ou líquidos. Aplicações típicas vão desde aparatos bastante corriqueiros até outros de extrema responsabilidade e sofisticação:

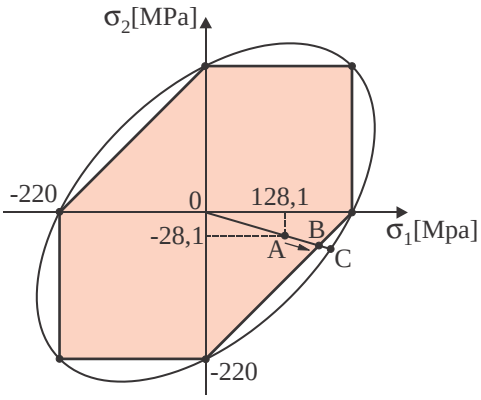


Figura 6.17: Pontos de solicitação e resistência ao início do escoamento pela TMTC e TMED, no Exemplo 1.

- Panelas de pressão usadas em cozinhas;
- Extintores de incêndio;
- Botijões de gás domesticos e comerciais;
- Containers pressurizados para transporte em caminhões tanque;
- Vasos de grandes dimensões usados em plantas industriais (Figuras 6.18b e 6.19);
- Vasos de contenção de usinas nucleares.

(a) (b)

Figura 6.18: (a) Tubos de aço com flange; (b) parte de instalação industrial com tubulações e vasos de pressão.

O modelo matemático descrito a seguir tem as seguintes características:

1. **A parede do vaso é fina** em relação ao seu raio. Tipicamente isso significa relações espessura/raio da ordem $R/h \gtrsim 10$ ou maiores. Em geral os exemplos listados acima caem nessa categoria. Outros tipos de vasos, de paredes espessas, têm distribuições de tensão mais complexas e serão vistos no Capítulo 11.

2. O **comportamento** do vaso é inteiramente **de membrana**. Isso se caracteriza pela ausência de flexões localizadas na parede. Assim, a única carga admissível é a pressão, e não são admitidas cargas concentradas, que gerariam flexão.

3. A **geometria básica do vaso é de revolução**, com uma região cilíndrica e tampas em formatos esféricos (pouco usado), parabólicos ou toroidais. Existem também os vasos inteiramente esféricos. As tubulações são modeladas de forma similar aos vasos cilíndricos, com os cuidados adequados. A Figura 6.19 mostra vasos de pressão cilíndricos típicos de armazenamento de gás. Notam-se as extremidades fechadas em forma de calotas, e bocais com flange na parte superior, para eventual conexão com derivações.

Figura 6.19: Vasos de pressão cil\indricos de armazenamento de gás.

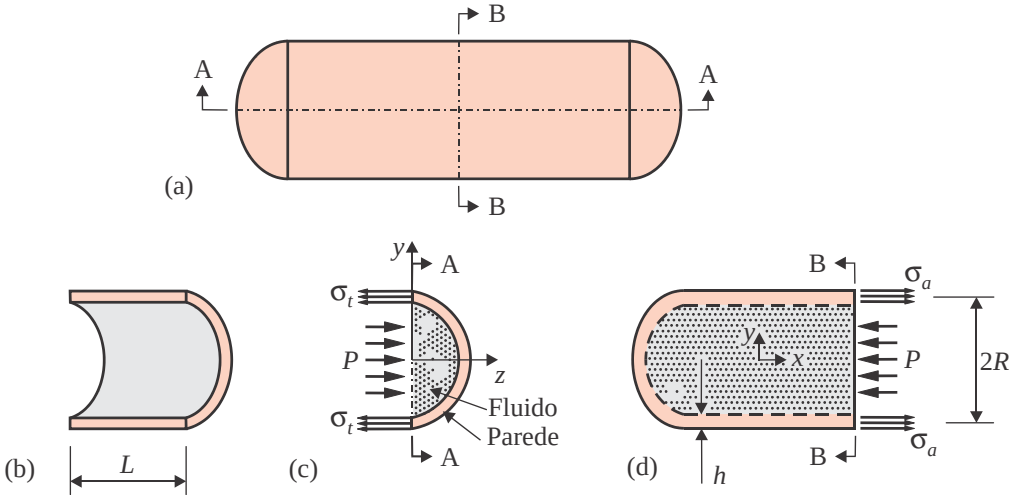


Figura 6.20: (a) Vista de um vaso arbitrário; (b,c) Tensões num corte longitudinal AA; (d) Tensões num corte transversal BB.

A determinação do estado de tensões no vaso pressurizado de paredes finas é feita por simples aplicação do **método das seções**. A Figura 6.20 mostra um corte longitudinal e um outro transversal da estrutura, e as pressões atuando no sistema casca-fluido delimitados pela superfície de controle.

Corte longitudinal AA, mostrado nas Figuras 6.20a e (b). Tem-se um segmento semi-cilíndrico de comprimento arbitrário L, raio da superfície média da parede R e espessura de parede h. A

dedução considerará apenas pressão interna P. As forças aplicadas sobre o material delimitado pelo corte são as seguintes:

1. A porção de fluido do lado esquerdo da superfície de corte AA (Figura 6.20c) aplica pressão P sobre a parte do fluido dentro do volume de controle. A força total devida ao fluido é igual à pressão vezes a área $2RL$, i.e., $F_z = 2PRL$. Essa força atua no sentido $+z$.

2. A força do fluido, F_z, é equilibrada pelas forças na parede do tubo. Devido às hipóteses de parede fina e ausência de flexão local, pode-se considerar que a **tensão tangencial** σ_t é uniforme ao longo da espessura da parede. Assim, a força total na parede é $F_P = 2hL\sigma_t$. O equilíbrio de forças na direção axial z é $F_z - F_P = 0$. Logo,

$$\Sigma F_z \quad \longrightarrow \quad 2hL\sigma_t = 2PRL \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_t = \frac{PR}{h}} \tag{6.26}$$

Corte transversal BB. Consideram-se em seguida as forças atuando no volume de controle parede-fluido, na **direção axial**, como mostrado na Figura 6.20d. A força atuando na porção de fluido atua numa área circular, e é $P\pi R^2$. A força axial na parede é dada pela **tensão normal axial** σ_a. Considerando σ_a uniforme na espessura, a força na parede é $\sigma_t A$, onde A é a área do anel de raio R e espessura h. Essa área é dada por $A = \pi(R_e^2 - P_i^2)$, onde $R_e = R + h/2$ e $R_i = R - h/2$ são os raios externo e interno do cilindro. Substituindo as expressões do raio e simplificando, obtém-se $A = 2\pi Rh$.

Então, o **equilíbrio na direção axial** é

$$(\pi R^2)P = (2\pi Rh)\sigma_a \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_a = \frac{PR}{2h}} \tag{6.27}$$

As equações (6.26) e (6.27) são sumarizadas por

$$\boxed{\text{Tensão tangencial } \sigma_t = \frac{PR}{h}, \qquad \text{Tensão axial } \sigma_a = \frac{PR}{2h} \qquad \text{Tensão radial } \sigma_r = 0} \tag{6.28}$$

onde P é a pressão interna, R o raio médio da parede e h é a espessura. σ_r é a tensão na direção da espessura da parede. Essas equações definem completamente o estado de tensões em qualquer ponto de um cilindro pressurizado com extremidades fechadas, nas direções tangencial, axial e radial, sendo as componentes cisalhantes todas nulas. A Figura 6.21 ilustra essas tensões em dois pontos arbitrários, um na superfície interna e outro na externa do tubo. A componentes coplanares, σ_t e σ_a, são supostas uniformes ao longo da parede.

As componentes de tensão em dois elementos diferenciais localizados nas superfícies interna e externa de um tubo pressurizado, são mostradas na Figura (6.21) para o caso em que a pressão na parede externa é nula, $P_e = 0$. As componentes de tensão são em relação ao sistema de coordenadas de eixos a-t-r, nas direções axial-tangencial-radial. Note que, de uma forma estrita, σ_r não é zero ao longo de toda a espessura como considerado na dedução acima, mas vale $\sigma_r = -P$ na superfície interna e $\sigma_r = 0$ na superfície externa da parede, como ilustrado na Figura 6.21. Esses valores são conhecidos, pois são necessários para garantir o equilíbrio do elemento diferencial qualquer em uma das superfícies da parede. Por exemplo, observando o elemento diferencial localizado na superfície interna do tubo, como na Figura 6.21b, nota-se que o equilíbrio de forças na direção radial requer que $\sigma_r = -P$, enquanto para o material na superfície externa, é necessário que $\sigma_r = 0$. Como consequência, σ_r varia de um valor compressivo até um valor nulo entre as duas superfícies. Ocorre que, quando se substituem valores numéricos realistas nas equações (6.28) para um dado valor de pressão, nota-se que σ_t e σ_a **são tipicamente uma centena de vezes maiores que o valor de** P, i.e., maiores que o máximo de σ_r. Isso é o que explica o motivo de se desprezar σ_r em tubos de parede fina.

O tensor tensão tem componentes nas direções axial-tangencial-radial, a-t-r, na forma

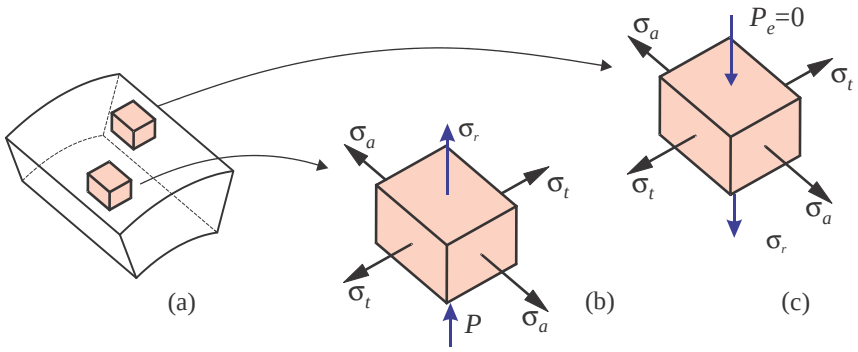


Figura 6.21: Tensões em elementos diferenciais localizados nas superfícies interna e externa de um tubo pressurizado, sendo a pressão na parede externa nula, $P_e = 0$. Componentes em relação ao sistema de coordenadas de eixos *a*-*t*-*r*, nas direções axial-tangencial-radial.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{at} & \tau_{ar} \\ & \sigma_t & \tau_{tr} \\ sim. & & \sigma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{PR}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{PR}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Na presente análise todas as tensões cisalhantes são consideradas nulas. Os motivos se tornam claros apenas quando se observa a solução completa do problema, levando em conta as equações tridimensionais de elasticidade. Grosso modo, esses resultados são consequência da axisimetria do problema e da pequena espessura da parede.

Observa-se em (6.29) que as tensões σ_a, σ_t e σ_r são tensões principais em qualquer ponto do cilindro, pois nesse sistema de coordenadas todas as tensões cisalhantes são nulas. Então,

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{PR}{h}, \qquad \sigma_2 = \sigma_a = \frac{PR}{2h}, \qquad \sigma_3 = \sigma_r = 0. \tag{6.30}$$

Esse é então um problema de **estado plano de tensões**. A representação desse estado de tensões no plano de Mohr é vista na Figura 6.22.

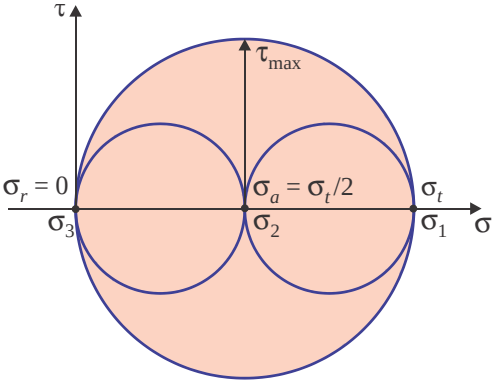


Figura 6.22: Círculo de Mohr para cilindro pressurizado.

A pressão crítica que leva ao **início do escoamento** pode ser estimada pelas teorias de Tresca e de von Mises.

- **Teoria da máxima tensão cisalhante**. A expressão do critério é que há segurança quanto ao início do escoamento se $\tau_{\max} \leq \sigma_E/2$. Da solução do problema de cilindro pressurizado, a tensão cisalhante aplicada máxima é:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{PR}{2h} \tag{6.31}$$

Logo, critério de falha de Tresca indica:

$$n = \frac{\sigma_E/2}{\tau_{\max}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{PR}{h} = \frac{\sigma_E}{n}} \tag{6.32}$$

onde n é o coeficiente de segurança.

- **Teoria da máxima energia de distorção**. A tensão equivalente de von Mises para estado plano vem de (6.24):

$$\begin{aligned} \sigma_{EQ}^2 &= \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2. \text{ Substituindo as tensões principais,} \\ &= \left(\frac{PR}{h}\right)^2 - \left(\frac{PR}{h}\right)\left(\frac{PR}{2h}\right) + \left(\frac{PR}{2h}\right)^2, \\ &= 3\left(\frac{PR}{2h}\right)^2 \qquad \longrightarrow \boxed{\sigma_{EQ} = \sqrt{3}\frac{PR}{2h}} \end{aligned}$$

Logo, o critério de falha de von Mises fica

$$n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{EQ}} \qquad \longrightarrow \boxed{\frac{PR}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_E}{n} \approx 1,155\frac{\sigma_E}{n}} \tag{6.33}$$

Comparando as previsões de ambos os critérios, equações (6.32) e (6.33), observa-se que diferem por um fator de 15,5%.

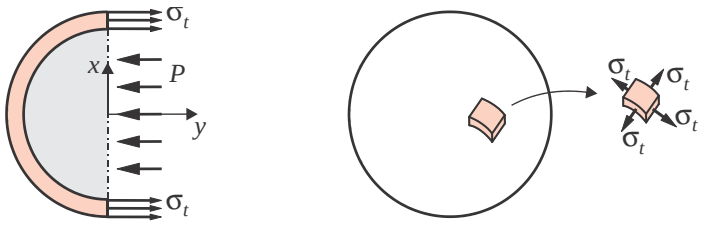
6.6.1 Vasos de pressão esféricos

A Figura 6.23 mostra um vaso de pressão esférico de armazenamento de gás. Notam-se também as tubulações de transferência, acopadas num bocal flangeado no polo superior.

Figura 6.23: Vaso de pressão esférico de armazenamento de gás.

As tensões de membrana para um vaso de pressão esférico de paredes finas constituem um caso particular de casca cilíndrica. Pode-se seguir o mesmo procedimento usado na casca cilíndrica. Entretanto, a casca esférica é simétrica em relação a qualquer plano que passe pelo seu centro. Assim, existe apenas um corte possível, mostrado na Figura 6.24, com as tensões atuantes no conjunto casca-fluido delimitado pela superfície de controle. **Também como consequência da simetria, as tensões são iguais a σ_t em qualquer ponto da casca, e em qualquer direção tangencial**.
As tensões tangenciais σ_t são obtidas por equilíbrio, de forma similar ao caso do cilindro:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\pi R^2\right) P = (2\pi Rh)\sigma_t \qquad \Longrightarrow \boxed{\sigma_t = \frac{PR}{2h}} \tag{6.34}$$



(a) (b)

Figura 6.24: Corte diametral numa casca esférica e tensões num elemento diferencial arbitrário.

onde

$$\begin{aligned} P &= \text{pressão interna;} \\ R &= \text{raio da superfície média da parede;} \\ h &= \text{espessura da parede.} \end{aligned}$$

Nota-se que a tensão tangencial no vaso esférico é igual à tensão axial do vaso cilíndrico. Isso é esperado devido à necessidade de haver continuidade de tensões entre a parte cilíndrica e a parte esférica de um vaso, como ilustrado na Figura 6.25. Essa continuidade é necessária por equilíbrio, e deve ser satisfeita mesmo que a calota não seja esférica. No caso de calotas não esféricas, apenas em sua borda as tensões têm os valores mostrados na Figura 6.25, e as tensões nas demais partes devem ser obtidas por outras formulações, e serão dependentes de cada geometria.

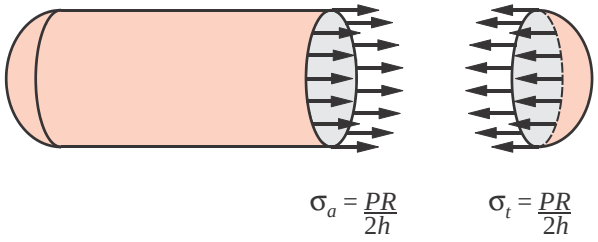


Figura 6.25: Continuidade de tensões entre a porção cilíndrica e sua calota.

6.6.2 Observações e limitações nas fórmulas

As fórmulas deduzidas utilizam a hipótese de ausência de flexão, i.e., são chamadas fórmulas de tensão de membrana. Entretanto, quando um segmento de tubo é soldado a uma calota, e pressurizado, inevitavelmente são desenvolvidas deformações de flexão na região da junção entre as duas partes. Isso pode ser visto na Figura 6.26. Sob o mesmo nível de pressão, a tensão tangencial na parte cilíndrica é o dobro daquela na parte esférica. Isso significa que, se as partes cilíndricas e esféricas estivessem desacopladas e livres para se deformarem, se teria que a variação de diâmetro da parte cilíndrica seria o dobro daquela da parte esférica. A Figura 6.26a ilustra, em escala exagerada, as variações de diâmetro que cada parte sofreria se fossem pressurizadas separadamente. Entretanto, as bordas estão soldadas, o que gera flexão na parede ao longo de uma certa extensão, tanto na região cilíndrica quanto na calota. O comprimento dessa extensão sob flexão é, via de regra, da ordem de duas a três vezes o valor da espessura. Nessa região, além das tensões de membrana, atuam tensões de flexão, que se caracterizam por variarem ao longo da espessura. Fora dessa região de flexão, i.e., em toda a extensão do cilindro e do calote, atuam as tensões bastante similares às calculadas pela teoria de membrana.

Com isso, o procedimento de cálculo consiste em primeiro determinar a espessura geral do vaso,

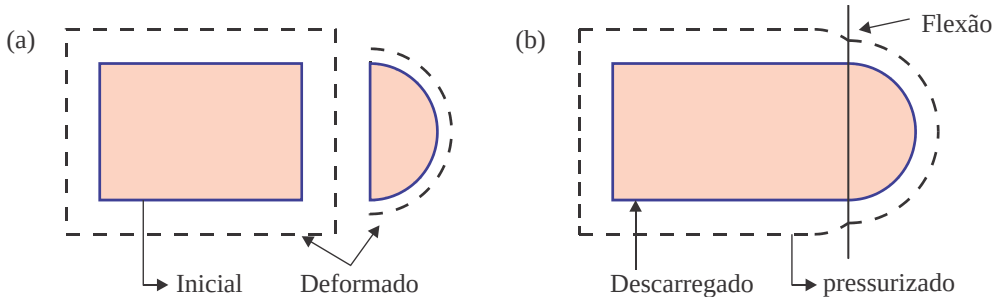


Figura 6.26: Flexão induzida pela mudança de geometria.

para a pressão e raio pré-estabelecidos, e **em seguida determinar correções para as regiões sujeitas a flexão e outras cargas concentradas**. Isso é feito usando formulações que fogem do escopo desse texto, e normalmente formam parte substancial das normas padronizas de projeto de vasos. Essa etapa de detalhamento da espessura em regiões localizadas normalmente é feita de forma simultânea com o **dimensionamento dos acessórios do vaso** que, em geral são os seguintes:

- bocais com flanges;
- suportes de acessórios;
- apoios de sustentação do vaso numa base.

Os bocais permitem a conexão do vaso com o resto do sistema, via tubulações, que permitem a transferência do fluido em carga/descarga do vaso. Os apoios são sapatas, chapas ou outros tipos de estruturas que transferem o peso do vaso à base.
Frequentemente o próprio vaso é usado para suportar equipamentos acessórios, como andaimes, escadas, motores, bombas, etc. Esses equipamentos possuem seu próprio peso, que é transmitido à casca por suportes adequados que são dimensionados de forma a minimizar os efeitos locais de flexão.
Em conclusão, deve-se notar que todos os detalhes e acessórios de um vaso induzem tensões de flexão na casca. O tratamento desses casos é geralmente feito adicionando espessura localizadamente, seguindo procedimentos de normas, como as de ASME para vasos de pressão.

Exemplo 6.2 - Pressão máxima em cilindro pressurizado

Dado um cilindro pressurizado com raio médio de parede $R = 100$ mm, espessura $h = 6$ mm, de aço com $\sigma_E = 250$ MPa. Determine a máxima pressão admissível P_{adm} para um coeficiente de segurança $n = 1,25$.

Solução:

A pressão máxima admissível pode ser obtida pela teoria de Tresca ou de von Mises, equações (6.32) e (6.33):

$$\begin{aligned} \text{Tresca} \quad &\longrightarrow \quad P_{adm} = \frac{\sigma_E h}{nR} = \frac{250 \cdot 6}{1,25 \times 100} = 12,0 \text{ MPa}, \\ \text{von Mises} \quad &\longrightarrow \quad P_{adm} = 1,155 \frac{\sigma_E h}{nR} = 1,155 \times 12,0 = 13,8 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Como esperado, a TMTC é mais conservativa que a de von Mises na estimativa de carga máxima.

Exemplo 6.3 - Dimensionamento de vaso pressurizado

Determine as espessuras de parede de dois vasos cilíndricos de aço com $\sigma_{adm} = 350$ MPa com raio $R = 100$ mm, para suportar pressões de 200 atm e 2.000 atm.

Solução:

Nesse problema será arbitrado o uso do critério de Tresca, como poderia ter sido optado pelo do von Mises. Uma vez que foi especificada a tensão admissível, deve-se usar coeficiente de segurança unitário nas equações. Então, a espessura vem de (6.32) na forma

$$h = \frac{PR}{\sigma_{adm}}. \tag{6.36}$$

As pressões $P = 200$ atm e $P = 2.000$ atm, são equivalentes a 20 MPa e 200 MPa. Assim,

$$\begin{aligned} \text{para } P &= 20 \text{ MPa} \quad \longrightarrow h = \frac{20 \times 100}{350} = 5,71 \text{ mm}, \\ \text{para } P &= 200 \text{ MPa} \quad \longrightarrow h = \frac{200 \times 100}{350} = 57,1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Observa-se que o primeiro vaso, para $P = 20$ MPa, tem relação $h/R = 5,71/100 = 0,057$, o que é uma relação adequada para caracterizá-la como casca de parede fina. Entretanto, a estimativa do vaso de $P = 200$ MPa mostra relação $h/R = 57,1/100 = 0,571$, o que o caracteriza uma casca de parede espessa, e não pode ser calculada pela presente formulação, i.e., o valor de espessura obtida, $h = 57,1$ mm não tem validade. Um modelo para tubos pressurizados de parede espessa é apresentado na seção 11.2.2.

6.6.3 Variação do diâmetro devido à pressurização

As tensões no tubo pressurizado foram obtidas em (6.28) como tensão tangencial $\sigma_t = PR/h$, tensão axial $\sigma_a = PR/2h$ e tensão radial $\sigma_r = 0$. A deformação de um elemento diferencial na direção tangencial pode ser obtida pela Lei de Hooke para estado plano de tensões, eqs.(4.89), pg. 126, construindo uma tríade de eixos ortogonais na superfície do tubo, nominando o eixo x como t e y como a. Então, obtém-se as deformações de um elemento diferencial de material nas direções circunferencial e axial do tubo:

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_a\right) \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_a = \frac{1}{E}\left(\sigma_a - \nu\sigma_t\right)} \tag{6.37}$$

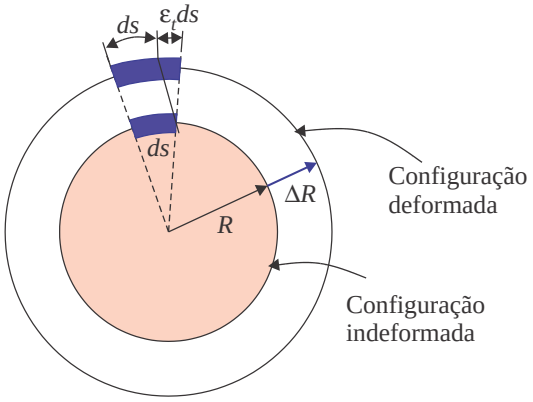


Figura 6.27: Aumento do perímetro, $\varepsilon_t ds$, associado ao aumento do raio ΔR da superfície média do tubo pressurizado.

A deformação tangencial ε_t é visualizada na Figura 6.27. Ela é associada a um aumento do comprimento inicial ds do elemento diferencial de arco na superfície média do tubo. Esse aumento de comprimento é igual a $\varepsilon_t ds$, e está diretamente relacionado ao aumento do raio médio do tubo, ΔR. A relação entre ΔR e a deformação pode ser obtida de maneira indireta, considerando que, como ε_t é uniforme ao longo da circunferência, ela pode ser calculada como a variação do comprimento do perímetro médio Δp, dividido pelo perímetro inicial p, i.e.,

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2\pi(R+\Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R}. \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta R = R\varepsilon_t} \tag{6.38}$$

Então, para uma dada pressão, se pode calcular as tensões e em seguida a deformação tangencial e a variação do raio do tubo. De fato, essa expressão para ΔR é válida tanto para **vasos de pressão esféricos quanto cilíndricos**.

Exemplo 6.4 - Tubo pressurizado sob flexão

Considere um tubo de aço com $\sigma_E = 200$ MPa, sob pressão interna $P = 5$ MPa. O tubo é montado horizontalmente sobre apoios simples, deslizantes com espaçamento $L = 3$ mm. O raio médio e a espessura são $R = 100$ mm e $h = 2$ mm. Determinar o coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento no tubo, levando em conta o peso próprio do tubo e do líquido. O fluido e o aço tem densidades $\rho_f = 1.000$ kg/m^3 e $\rho_a = 7.800$ kg/m^3, respectivamente.

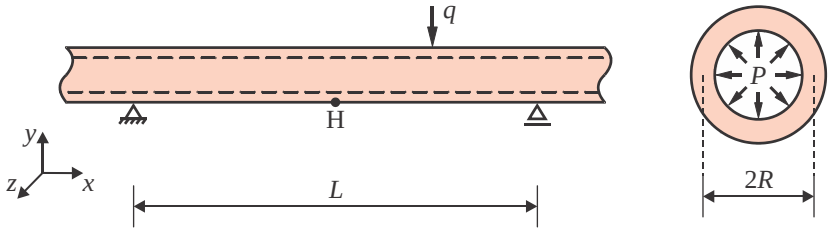


Figura 6.28: Tubo do exemplo 4.

Solução:

O tubo está submetido a dois tipos de carregamento: pressão interna e flexão devido ao peso próprio. Quanto à **pressão**, as tensões são

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{PR}{2h} = \frac{5 \times 100}{2 \times 2} = 50 \text{ MPa}, \\ \sigma_t &= \frac{PR}{h} = \frac{5 \times 100}{2} = 100 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Os raios interno e externo do tubo são: $R_e = 101$ mm e $R_i = 99$ mm. Logo,

- a área da seção transversal do tubo é $A_a = \pi(R_e^2 - R_i^2) = \pi(101^2 - 99^2) = 1,26 \cdot 10^{-3}$ m^2;
- a área de seção transversal de fluido, área interna, é $A_f = \pi R_i^2 = \pi \times 99^2 = 3,08 \cdot 10^{-2}$ m^2;

A carga distribuída q são os **pesos próprios** do tubo, P_a e do fluido, P_f, para um segmento de comprimento L:

$$q = \frac{P_a + P_f}{L} = \frac{g}{L}(\rho_a A_a + \rho_f A_f)L = 9,8(7.800 \times 1,26 \cdot 10^{-3} + 1.000 \times 3,08 \cdot 10^{-2}) = 398 \text{ N/m}.$$

Consideremos a flexão do tubo. As tensões devidas a flexão em vigas é um tópico que será desenvolvido apenas no Capítulo 8, mas no momento podemos buscar a equação chave para o

problema. O modelo mais usado considera que apenas uma das componentes do tensões tensão é não nula, σ_x^F, na direção axial da viga. Essa componente é calculada por

$$\sigma_x^F(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I}y, \tag{6.39}$$

onde $M_z(x)$ é o esforço de momento fletor na direção z na seção transversal da viga de coordenada x. y é a coordenada cuja origem deve ser no centroide da seção. I é o segundo momento de inércia da seção em relação ao eixo z. Ele será definido e detalhado no Capítulo 8, eqs. (8.31), mas para uma seção circular tubular, sua expressão em termos dos raios interno e externo é

$$I = \frac{\pi}{4}(R_e^4 - R_i^4)$$

Para os dados do problema se obtém $I = 6{,}28{\cdot}10^{-6}$ m^4.

Observe que o tubo mostrado é apoiado em posições periódicas. Quando consideramos um único vão, seu comportamento é tal que as seções em cada apoio sofrem rotação da normal nula. **Então cada vão** comporta-se exatamente como uma **viga bi-engastada**. Uma dificuldade nesse ponto da solução do problema, é que vigas bi-engastadas se constituem em problemas hiperestáticos, cuja determinação dos esforços será vista apenas nos capítulos seguintes (ver, por exemplo, o Capítulo 12). Entretanto, podemos buscar a solução pronta utilizando a teoria vista ali: no Apêndice, tomamos a solução do caso 15, de viga bi-engastada sob carga distribuída uniforme. O **momento fletor** máximo ocorre nos apoios, e vale em módulo $M_z = qL^2/12$. Para os dados do problema, tem-se

$$M_z = \frac{qL^2}{12} = \frac{0,398 \text{ N/mm} \times (3.000 \text{ mm})^2}{12} = 2,99 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

A tensão normal máxima de flexão na seção do apoio ocorre no ponto H, na Figura 6.28, que é o ponto inferior da seção central da viga em que y é máximo, $y = -R_e$. Nesse ponto a tensão normal de flexão máxima na viga é

$$\sigma_x^F = -\frac{M_z R_e}{I} = \frac{2,99 \cdot 10^5 \text{ Nmm} \times (-101 \text{ mm})}{6,28 \cdot 10^6 \text{ m}^4} = 4,81 \text{ MPa}.$$

O estado de tensões no ponto H é visto na Figura 6.29, com ambas as contribuições, de pressão e de flexão.

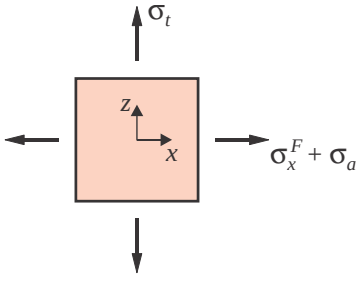


Figura 6.29: Estado de tensões no ponto H.

O **estado de tensões é plano**, dado por $\sigma_x = \sigma_x^r + \sigma_a = 4,81 + 50 = 54,8$ MPa, de forma que as componentes do tensor tensão no ponto H, nas direções xy, fica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 54,8 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Nota-se que essas são as tensões principais, i.e., $\sigma_1 = 100$ MPa, $\sigma_2 = 54,8$ MPa, $\sigma_3 = 0$. Então, usando o critério de escoamento de von Mises, eq. (6.24), tem-se o coeficiente de segurança como:

$$n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{EQ}} = \frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} = \frac{200}{\sqrt{100^2 - 100 \times 54,8 + 54,8^2}} = \frac{200}{86,7} = 2,3.$$

6.7 Exercícios

6.1 Considere o estado de tensões do Exercício 5.16. Para um material dúctil com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 200$ MPa, determine o coeficiente de segurança pelos critérios da máxima tensão cisalhante e da máxima energia de distorção.

6.2 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.17.

6.3 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.18.

6.4 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.19.

6.5 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.20.

6.6 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.21.

6.7 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.22.

6.8 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.23.

6.9 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.24.

6.10 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.25.

6.11 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.26.

6.12 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.27.

6.13 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.28.

6.14 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.29.

6.15 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.30.

Estado triaxial de tensões

6.16 Considere o estado triaxial de tensões do Exercício 5.47. Para um material dúctil com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 200$ MPa, determine o coeficiente de segurança pelos critérios da máxima tensão cisalhante e da máxima energia de distorção. Esboce os círculos de Mohr e indique as tensões limites em cada critério.

6.17 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.48.

6.18 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.49.

6.19 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.50.

6.20 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.51.

6.21 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.52.

6.22 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.53.

6.23 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.54.

6.24 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.55.

6.25 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.56.

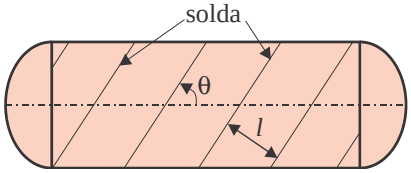
6.26 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.57.

6.27 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.58.

6.28 Repita o Exercício 1 para os dados do Exercício 5.59.

6.29 Considere um vaso de pressão em que a parte cilíndrica é fabricada a partir de uma faixa contínua de aço, enrolada helicoidalmente e soldada nas juntas, como ilustrado na Figura, com um ângulo $\theta = 55°$. O diâmetro interno é $d = 200$ mm, a espessura da parede é $h = 5$ mm e a pressão

aplicada é $p = 4$ MPa. Determine a tensão normal e tangente à junta da solda.



6.30 Repita o Exercício 29 para $\theta = 55°$, $d = 250$ mm, $h = 6$ mm e $p = 4$ MPa.

6.31 Repita o Exercício 29 para $\theta = 55°$, $d = 250$ mm, $h = 6$ mm e $p = 8$ MPa.

6.32 Repita o Exercício 29 para $\theta = 50°$, $d = 200$ mm, $h = 5$ mm e $p = 4$ MPa.

6.33 Repita o Exercício 29 para $\theta = 50°$, $d = 250$ mm, $h = 6$ mm e $p = 8$ MPa.

6.34 Considere um vaso de pressão cilíndrico, longo, fabricado por uma faixa contínua de plástico de largura l como no Exercício 29. As bordas são unidas por fusão. Qual a máxima largura l para que a tensão normal à junção seja $f = 0,75$ da tensão normal máxima devida à pressão na região do plástico distante da junta? Note que a resposta fica em termos do raio interno do tubo. Dica: note que ao longo da circunferência do tubo, só pode existir um número inteiro n de espiras. Também, o ângulo de hélice é relacionado a l.

6.35 Repita o Exercício 34 para $f = 0,85$.

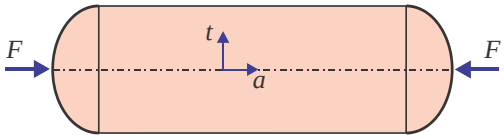
6.36 Para o Exercício 34, para $f = 0,75$, se o raio interno do cilindro for $r = 200$ mm, qual o ângulo θ de enrolamento da espiral? Qual a largura da faixa? Considere que o cilindro com apenas $n = 1$ faixa ao longo de sua circunferência.

6.37 Para o Exercício 34, para $f = 0,85$, se o raio interno do cilindro for $r = 200$ mm, qual o ângulo θ de enrolamento da espiral? Qual a largura da faixa? Considere que o cilindro com apenas $n = 1$ faixa ao longo de sua circunferência.

6.38 Repita o Exercício 34 para $n = 2$ espiras no tubo.

6.39 Repita o Exercício 36 para $n = 2$ espiras no tubo.

6.40 Considere um vaso de pressão submetido a pressão interna p e a forças F axiais de compressão como na Figura.



Mostre que as tensões na parede do da parte cilíndrica, nas direções axial, circunferencial e normal, são

$$\sigma_a = \frac{pr}{2h} - \frac{F}{A}, \qquad \sigma_t = \frac{pr}{h}, \qquad \sigma_3 = 0, \tag{6.40}$$

onde A é a área da seção transversal axial do cilindro. Esboce os círculos de Mohr.

6.41 No Exercício 40, qual o valor de F que faria a tensão cisalhante máxima ser igual à tensão normal máxima na parte cilíndrica?

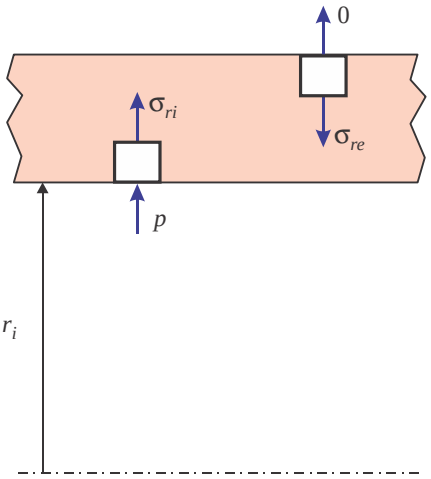
6.42 Considere o Exercício 40, porém com a força axial F tracionando o cilindro. Determine a tensão cisalhante máxima absoluta $\tau^{abs}_{\max}$ e o coeficiente de segurança pelo critério de Tresca. Use os valores $F = 100$ kN, diâmetro $d = 200$ mm, espessura $h = 5$ mm, pressão $p = 6$ MPa, $\sigma_E = 200$ MPa.

6.43 Resolva o Exercício 42 usando $F = 250$ kN.

6.44 Um tanque em forma de um cilindro circular vertical é usado para armazenamento de água. O nível da coluna d'água é $H = 15$ m, seu diâmetro interno é $d = 3$ m, e a espessura da parede é $h = 18$ mm. Determine as tensões principais e a cisalhante máxima absoluta $\tau^{abs}_{\max}$ devida à pressão hidrostática, e o coeficiente de segurança pelo critério de Tresca para $\sigma_E = 200$ MPa.

6.45 Na dedução das equações para vasos de pressão de parede fina foi usada a hipótese de que a tensão na direção normal à parede é nula, i.e., $\sigma_r = 0$. Do ponto de vista físico, essa tensão não pode ser nula em todo ponto ao longo da espessura. De fato, na superfície interna a tensão deve equilibrar a pressão aplicada, $\sigma_r|_{r_i} = -p$, e na superfície externa ela deve equilibrar a pressão externa, que é nula: $\sigma_r|_{r_e} = 0$, onde r_i e r_e são os raios interno e externo do

vaso.



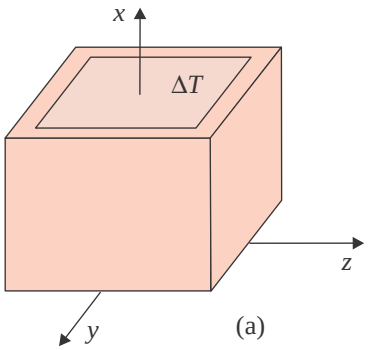
Considere as tensões axial e tangencial do modelo visto, e inclua $\sigma_r = -p$ na superfície interna da parede cilíndrica. Identifique as tensões principais e mostre que a tensão cisalhante máxima absoluta é dada por

$$\tau_{\max}^{abs} = \frac{pr}{2h}\left(1 + \frac{h}{r}\right). \qquad (6.41)$$

6.46 No Exercício 45, como varia o erro incorrido em $\tau_{\max}^{abs}$ com o uso do modelo que ignora a tensão radial?

6.47 Refaça o Exercício 45 para um vaso de pressão esférico.

6.48 Considere o Exemplo 4.1.1, de um bloco ortogonal de material elástico linear, de dimensões $A \times B \times C$ nas direções cartesianas, respectivamente. Ele é montado numa cavidade que consideraremos infinitamente rígida, como na Figura 4.25. O bloco é ajustado à cavidade de forma a manter contato em 5 de suas faces, podendo se deformar sem atrito. Na face superior, uma pressão p é aplicada na direção x. Encontre a relação entre a pressão p_E que leva o bloco ao início do escoamento e a tensão de início de escoamento do material em ensaio uniaxial, σ_E e coeficiente de Poisson. Resolva para os critérios de Tresca e de von Mises.



6.49 Considere o bloco do Exercícios 6.48 e 4.38. Determine o incremento de temperatura ΔT_E que leva o bloco a iniciar plastificação. Use o critério de Tresca. Qual o valor de ΔT_E se $E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$, $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}$ °C, $\sigma_E = 200$ MPa?

6.50 Um vaso de pressão cilíndrico de aço tem diâmetro interno $d = 900$ mm e espessura $h = 12$ mm. Qual a pressão admissível com um coeficiente de segurança $n = 1,8$, quanto ao início de escoamento do material. Use $\sigma_E = 400$ MPa.

6.51 Para o Exercício 50, qual a variação de diâmetro do tubo? Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$.

6.52 Um tubo de aço conduz água para uma turbina hidroelétrica, e opera sob uma coluna de água de $H = 100$ m. O diâmetro é $D = 1$ m e o aço tem tensão admissível $\sigma_{adm} = 70$ MPa e densidade $\rho = 7.800$ kg/m^3. Qual a espessura necessária?

6.53 Para o Exercício 52, qual a variação de diâmetro do tubo? Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0,25$.

6.54 Um vaso de pressão cilíndrico deve suportar uma pressão de 25 atm. A tensão limite de ruptura do material é $\sigma_R = 450$ MPa, e a espessura é limitada a $h = 18$ mm. (a) Determine o máximo diâmetro possível para o vaso, com um coeficiente de segurança $n = 4,5$. (b) Determine a variação de diâmetro.

Capítulo 7

Torção em eixos de seção circular

Depois do problema de barra sob carga axial, o próximo tipo de problema estrutural mais simples que existe é o de barra reta de seção circular sob torção. Uma visualização qualitativa do processo de torção pode ser obtida com a ajuda da Figura 7.1, onde se torce, manualmente, uma barra de borracha. O carregamento, no caso aplicado pelas duas mãos, consiste de forças tangenciais distribuídas numa certa área. O momento torçor provocado por essas forças distribuídas pode ser representado por dois binários de força, tal que o torque aplicado em cada extremidade seja $T = Fd$, onde d é o diâmetro da barra.

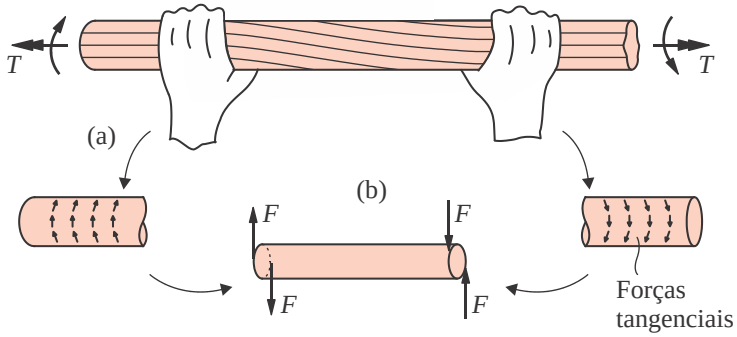


Figura 7.1: (a) Barra de borracha sendo torcida; (b) representação do torque aplicado de dois binários de força. As linhas inicialmente longitudinais na superfície tornam-se helicoidais.

Uma grande diversidade de sistemas em engenharias (tais como mecânica, elétrica, civil e naval) contém componentes submetidos a torção. Alguns desses sistemas são:

- Eixos de transmissão ou eixos motrizes usados em veículos e máquinas. Por exemplo, o sistema esquemático de propulsão da Figura 7.4 ou o sistema de eixo-polias da Figura 7.6, ou sistemas eixo-engrenagens em redutores de velocidade. A Figura 7.2 mostra a foto de um detalhe de uma das duas **juntas de um eixo cardan** de caminhão, que transmite potência da caixa de câmbio ao diferencial. Esses eixos transmitem o torque desenvolvendo únicamente esforços uniformes de momento torçor em suas seções transversais. As duas juntas nas extremidades permitem que os eixos conectados a ambas as juntas estejam desalinhados. A Figura 7.3 ilustra um conjunto completo desalinhado.

- Barras pertencentes a pórticos espaciais ou em pórticos planos sob certos tipos de cargas transversais.

No presente capítulo desenvolveremos duas fórmulas clássicas para barras de seção circular sob torção, uma delas para determinar a distribuição de tensões e outra para determinar o campo de deslocamento associado (o ângulo de torção).

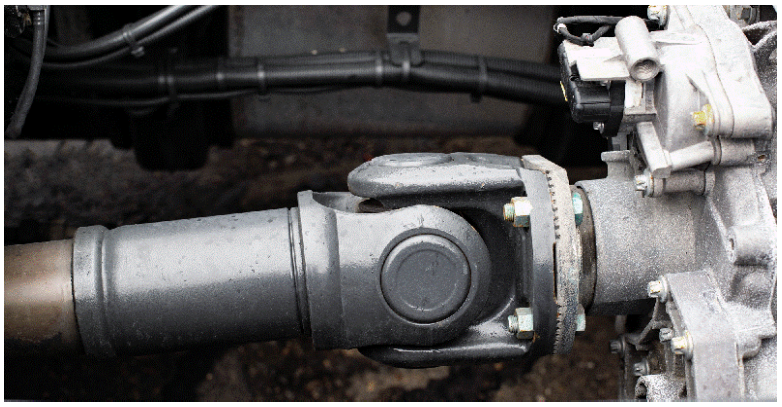


Figura 7.2: Detalhe de uma das duas juntas de um eixo cardan de caminhão, que transmite potência da caixa de câmbio ao diferencial.

Figura 7.3: Vista de um conjunto completo de eixo cardan e juntas.

7.1 Hipóteses cinemáticas

A cinemática de um segmento reto de barra de seção circular sob torção pode ser obtida experimentalmente, inspecionando o comportamento de um modelo bastante flexível, como uma barra de espuma polimérica ou borracha, por exemplo. O processo consiste em desenhar linhas longitudinais e circunferenciais na superfície do modelo, como na Figura 7.4b. Quando aplicamos a torção, observamos um resultado como o da Figura 7.4c. **As linhas longitudinais inicialmente retas deformam-se tomando a forma de linhas helicoidais**. Medições cuidadosas indicam que, dentro de certas condições, **a seção transversal circular permanece circular e com mesmo diâmetro**.

Adicionalmente, outras hipóteses são tão facilmente visualizáveis e formuladas. Considera-se que:

- Cada seção transversal permanece indeformada, sofrendo apenas uma rotação de corpo rígido, i.e., move-se como um disco rígido de seção circular girando em torno de seu próprio centro.

Assim, **cada segmento reto de material ao longo da linha radial permanece reto e com o mesmo comprimento. Apenas sofre uma rotação**. Isso pode ser visualizado na Figura 7.5. Ali temos dois segmentos radiais, AB e CD, situados a uma distância axial Δx entre si. Com a aplicação do torque T, cada seção sofre uma rotação diferente. O segmento AB rotaciona-se para Ab e o CD rotaciona-se para Cd. Assim, a seção na coordenada x sofre um **ângulo de torção** $\varphi(x)$, enquanto na seção em $x + \Delta x$ o ângulo de torção é $\varphi(x) + \Delta\varphi$.

Análises mais precisas, usando solução tridimensional da teoria de elasticidade, indicam que essa hipótese é correta, dentro das seguintes condições:

- O material comporta-se no regime elástico-linear;

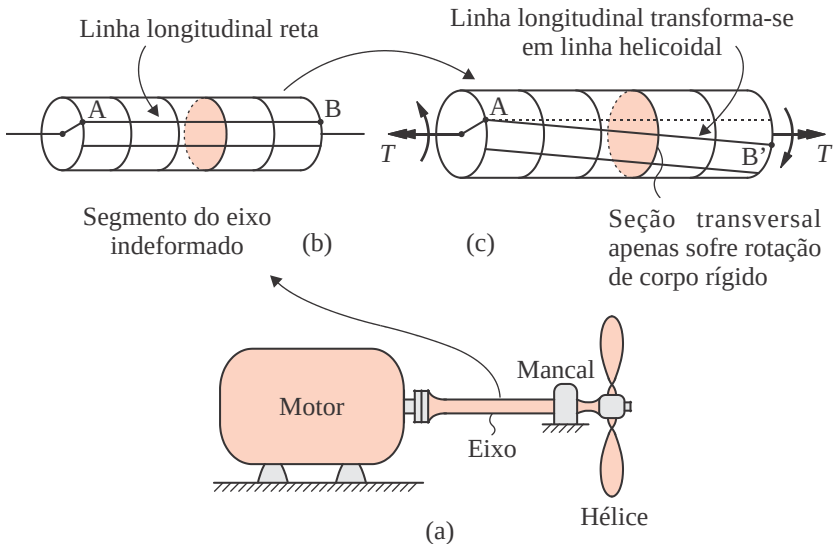


Figura 7.4: (a) Conjunto propulsor motor, eixo, mancal e hélice. Em (b) e (c) tem-se um segmento do eixo indeformado e torcionado, respectivamente.

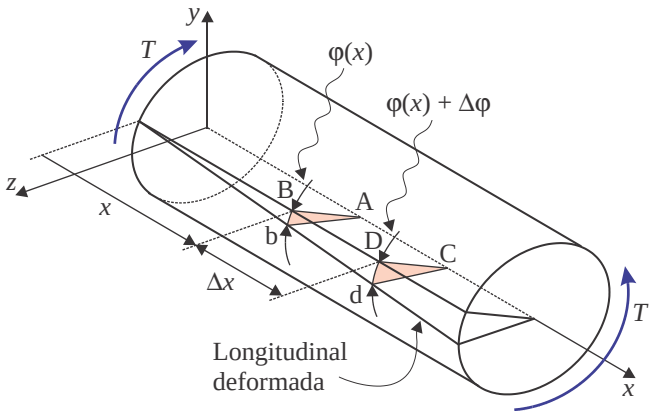


Figura 7.5: Ângulo de torção φ em duas seções vizinhas.

- O ângulo de torção e as deformações são pequenas;

Sem dúvida que todas essas hipóteses, tanto quanto a teoria sendo desenvolvida nesse capítulo, tem validade e **aplicabilidade apenas nos trechos da barra distantes dos pontos de aplicação das cargas e de irregularidades geométricas**.

7.2 Transmissão de potência

Como frequentemente as barras sob torção usadas no presente texto são eixos rotativos, faremos aqui uma revisão de algumas definições básicas. Um sistema de transmissão de potência consiste num conjunto que contém uma **unidade geradora de potência mecânica, o motor**, e uma ou mais **unidades consumidoras** daquela potência, como:

- Ventilador;
- Pás de hélices de barcos ou agitadores industriais de líquidos e pastas;
- Bombas hidráulicas e compressores;
- Equipamentos de elevação de carga (esteiras rolantes, elevadores, guindastes etc.)

Considere um motor girando com velocidade angular ω [rad/s] constante, sem carga. Nesse caso, ele não produz nenhum trabalho. Se consideramos o motor acoplado a um equipamento como uma bomba hidráulica, temos uma engrenagem acoplada ao eixo do motor. Acoplado a essa engrenagem existe um equipamento conectado que opõe resistência à rotação do eixo. Assim, para que o motor gire com velocidade ω, ele deve simultaneamente aplicar um torque T no eixo, na mesma direção da rotação, de forma a vencer a resistência T oferecida pelo equipamento acoplado à engrenagem.

O **trabalho** realizado pelo motor durante um certo intervalo de tempo é

$$W = T\alpha, \tag{7.1}$$

onde T é o torque, em [Nm], α é o ângulo de rotação do eixo do motor ao longo do intervalo de tempo, em [radianos], e W é o trabalho realizado, em [Joules], i.e., [Nm].

A **potência** é definida como a taxa de variação do trabalho, i.e.,

$$P \doteq \frac{dW}{dt} \quad \rightarrow \quad P = T\frac{d\alpha}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{P = T\omega} \tag{7.2}$$

onde ω é a velocidade angular do eixo, em [rad/s] e P a potência, em [Watts], i.e. [Nm/s].

No **Sistema Internacional de Unidades (S.I.)** temos simplesmente a equação (7.2), que é realmente simples, uma vez que as unidades são todas compatíveis entre si, i.e., 1 J = 1 Nm e 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s. Infelizmente, existe toda uma herança de unidades coloniais, ainda em uso, que obrigam o uso de fatores de conversão de unidades, algumas das quais sumarizamos a seguir:

O **cavado-vapor**, CV, é definido como

$$1 \text{ CV} \doteq 75 \text{ kgf m/s}, \tag{7.3}$$

e o **horse-power**, hp, é definido por

$$1 \text{ hp} \doteq 550 \text{ lbf pé/s}, \tag{7.4}$$

onde lbf é libra-força. Assim, as seguintes fórmulas podem ser obtidas em lugar de (7.2):

$$P_{CV} = \frac{T_k\ w_r}{716,20} \qquad \text{onde} \qquad \left| \begin{array}{l} P_{CV} = \text{Potência em CV}, \\ w_r = \text{Rotação em rpm}, \\ T_k = \text{Torque em kgf m}. \end{array} \right. \tag{7.5}$$

$$P_{hp} = \frac{Tw_r}{7.120,9} \qquad \text{com} \qquad P_{hp} \text{ em [hp] e } T \text{ em [Nm]} \tag{7.6}$$

$$P = \frac{T_k\ w_r}{973,60} \qquad \text{com} \qquad P \text{ em [Watts]} \tag{7.7}$$

Além disso,

$$1 \text{ hp} = 745{,}7 \text{ W} \qquad \text{e} \qquad 1 \text{ CV} = 735 \text{ W}. \tag{7.8}$$

7.3 Diagramas de esforços de torção

Antes de prosseguirmos no desenvolvimento da teoria para a determinação do ângulo de torção e das tensões, consideraremos de forma cuidadosa a determinação dos esforços de torção numa barra e a determinação do diagrama de esforços. Os procedimentos são os mesmos usados para os diagramas de esforços normal, cortante e de momentos fletores já vistos no Capítulo 2. Basicamente, utiliza-se o **método das seções** e as equações de equilíbrio, como visto nos exemplos do presente capítulo.

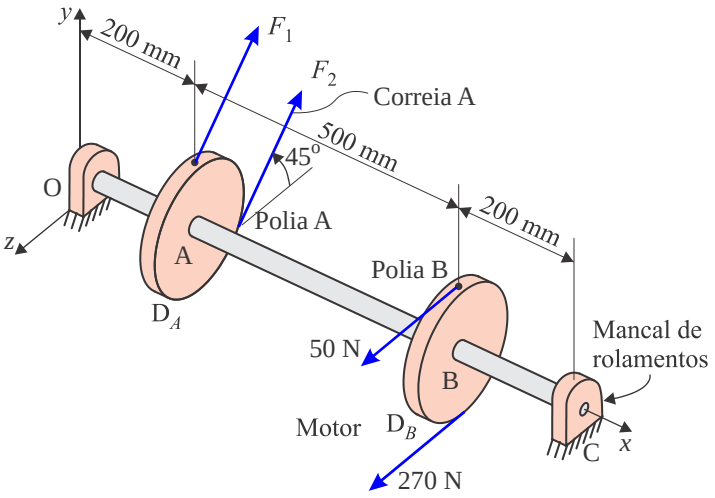


Figura 7.6: Eixo com polias e correias do Exemplo 7.1.

Exemplo 7.1 – Esforços em eixo de transmissão por polias

Considere o eixo OC (Figura 7.6) de seção transversal circular e uniforme, que suporta duas polias, A e B, para correias em V. O eixo é montado em mancais de rolamento nas extremidades O e C e gira a $N_w = 1.200$ rpm. Seu material é aço-carbono, com módulo de elasticidade cisalhante $G = 80$ GPa. A força de tração no lado frouxo da correia A é tomado como 15% da força de tração do lado distendido, i.e., $F_1 = 0,15F_2$. Um motor é acoplado à polia B, e sabe-se que as trações na correia são 50 N e 270 N, como indicado na figura.

(a) Determine a potência suprida pelo motor;

(b) Determine as trações na correia da polia A e os esforços de torção no eixo.

Ambos os lados da correia na polia B são paralelas ao eixo z e a correia em A faz um ângulo de 45^o com z. Os diâmetros das polias são $D_A = 250$ mm e $D_B = 300$ mm.

Solução:

O torque aplicado pelo motor na polia B é:

$$T_B = (270 - 50)\frac{D_B}{2} = (270 - 50)\frac{300}{2} = 33.000 \text{ Nmm}.$$

A potência aplicada vem de (7.2)

$$P = T_B w = 33 \text{ Nm} \times \left(1.200\frac{\text{rot}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rot}}\right) = 4.146{,}9 \text{ W}$$

ou, usando (7.8), a potência é $P_{hp} = 5,56$ hp.

O torque aplicado em A deve ser obtido por equilíbrio torcional do eixo. Note que o eixo é suportado em mancais de rolamento, de forma que não há reações de apoio de momento axial R_{mx}. Assim, os torques aplicados ao longo dos diversos pontos do eixo devem ser auto equilibrantes. O sistema da Figura 7.6 pode ser simplificado para aquele da Figura 7.7a, onde indicamos os torques aplicados em A e B da barra.

O equilíbrio de momento rotacional no eixo é:

$$\sum M_x = 0 \;\rightarrow\; T_A - T_B = 0.$$

Logo, o torque aplicado pela polia A é $T_A = 33$ Nm. As forças na correia A são obtidas de:

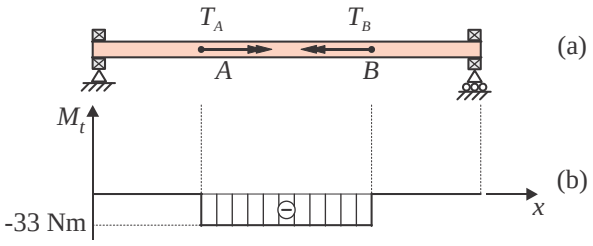


Figura 7.7: (a) Torques aplicados; (b) diagrama de esforços de torção no Exemplo 7.1.

$$\begin{cases} T_A = (F_2 - F_1)\dfrac{D_A}{2}, \\ F_1 = 0,15F_2. \end{cases}$$

Esse é um sistema de algébrico, que pode ser resolvido para $T_A = 33$ Nm e $D_A = 250$ mm, resultando: $F_2 = T_A/(0,425D_A) = 310{,}6$ N e $F_1 = 46{,}6$ N.

7.4 Fórmula de torção

Nessa seção aplicamos as hipóteses cinemáticas vistas na seção 7.1 para, primeiramente, determinar o campo de deformações na barra, e em seguida determinar as tensões.

Como a barra tem formato cilíndrico, é mais conveniente utilizar um sistema de coordenadas cilíndrico, como indicado na Figura 7.8. Num problema arbitrário, podemos tomar um ponto genérico P de coordenadas (x, r, θ) e definir um sistema cartesiano local de eixos, $x - r - t$, tal que x é na direção axial, r na direção radial e t na direção tangencial. Prova-se [9] que a relação deformação-deslocamentos em coordenadas cilíndricas é tal que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ & \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \text{Sim.} & & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial r} + \dfrac{\partial u_r}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{r\partial\theta} + \dfrac{\partial u_t}{\partial x}\right) \\ & \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \dfrac{\partial u_t}{\partial r} - \dfrac{u_t}{r}\right) \\ \text{Sim.} & & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_t}{\partial\theta} \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

onde

$$\left|\begin{array}{ll} u_x(x,r,\theta) = & \text{componente do deslocamento de P na direção } x, \\ u_r(x,r,\theta) = & \text{componente do deslocamento de P na direção } r, \\ u_t(x,r,\theta) = & \text{componente do deslocamento de P na direção } t. \end{array}\right. \tag{7.10}$$

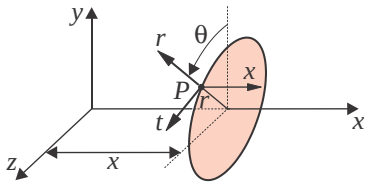


Figura 7.8: Sistema local de coordenadas num ponto P da barra.

A hipótese fundamental de que cada seção transversal rotaciona-se como um corpo rígido indica que os deslocamentos em (7.10) são, de fato, independentes de θ, de forma que nas deformações (7.9) pode-se fazer $\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$. Como o diâmetro permanece inalterado, o **deslocamento radial**

é nulo em qualquer ponto, i.e., $u_r = 0$, de forma que $\varepsilon_r = 0$. Nesse ponto das simplificações as deformações estão na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ & \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \text{Sim.} & & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial r} + 0\right) & \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{\partial u_t}{\partial x}\right) \\ & 0 & \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{\partial u_t}{\partial r} - \dfrac{u_t}{r}\right) \\ \text{Sim.} & & 0 \end{bmatrix}$$

Como a seção permanece plana, **nenhum ponto sofre deslocamento axial**, i.e., $u_x = 0$, o que significa $\varepsilon_x = 0$.

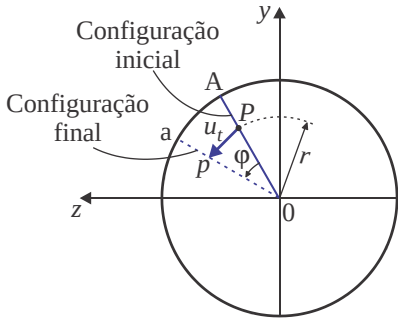


Figura 7.9: Deslocamento tangencial u_t de um ponto genérico em coordenada r.

Então com a aplicação das hipóteses cinemáticas, o tensor deformação fica reduzido a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ & \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \text{Sim.} & & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_t}{\partial x} \\ & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_t}{\partial r} - \dfrac{u_t}{r}\right) \\ \text{Sim.} & & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.11}$$

i.e., todas as componentes são nulas, exceto $\varepsilon_{x\theta}$ e $\varepsilon_{r\theta}$, ambas dependentes da componente de deslocamento tangencial u_t, que é o único deslocamento não nulo, dependente apenas de (x, r), i.e., $u_t = u_t(x, r)$.

A forma da função $u_t(x, r)$ também pode ser obtida a partir das hipóteses: como a seção gira como um corpo rígido, num ângulo $\varphi(x)$, **cada segmento radial reto permanece reto**, i.e., o campo de deslocamento é completamente tangencial, dado por (Figura 7.9)

$$u_t(x, r) = r\varphi(x), \tag{7.12}$$

i.e., o **deslocamento tangencial varia linearmente ao longo do raio**. Aqui é usual trabalhar com a deformação cisalhante de engenharia, γ, em lugar de ε. Assim, como $\gamma_{x\theta} = 2\varepsilon_{x\theta}$, temos que

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u_t}{\partial x}. \tag{7.13}$$

Nesse caso, a deformação $\gamma_{x\theta}$ também varia linearmente, i.e., de (7.12).

$$\boxed{\gamma_{x\theta}(x, r) = r\frac{d\varphi(x)}{dx}} \tag{7.14}$$

Essa relação é ilustrada na Figura 7.10. Nota-se que o valor incremental usado, $\Delta\varphi$ em lugar de $d\varphi$, é um ângulo inscrito a partir do centro da circunferência, enquanto $\gamma_{x\theta}$ é descrito sobre a superfície cilíndrica de raio r.

Finalmente, a deformação $\varepsilon_{r\theta}$ é nula, como pode ser visto tomando sua definição em (7.11) e usando (7.12):

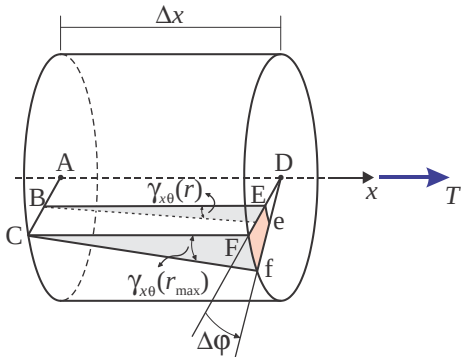


Figura 7.10: Relação entre o ângulo de torção $\Delta\varphi$ e o ângulo de cisalhamento γ.

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_t}{\partial r} - \frac{u_t}{r}\right) = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi) = 0.$$

Com isso tem-se a forma final da relação deformação-deslocamento para um ponto arbitrário de uma barra de seção circular

$$\boxed{\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xr} & \varepsilon_{x\theta} \\ & \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} \\ \text{Sim.} & & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} r \frac{d\varphi}{dx} \\ & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & 0 \end{bmatrix}} \tag{7.15}$$

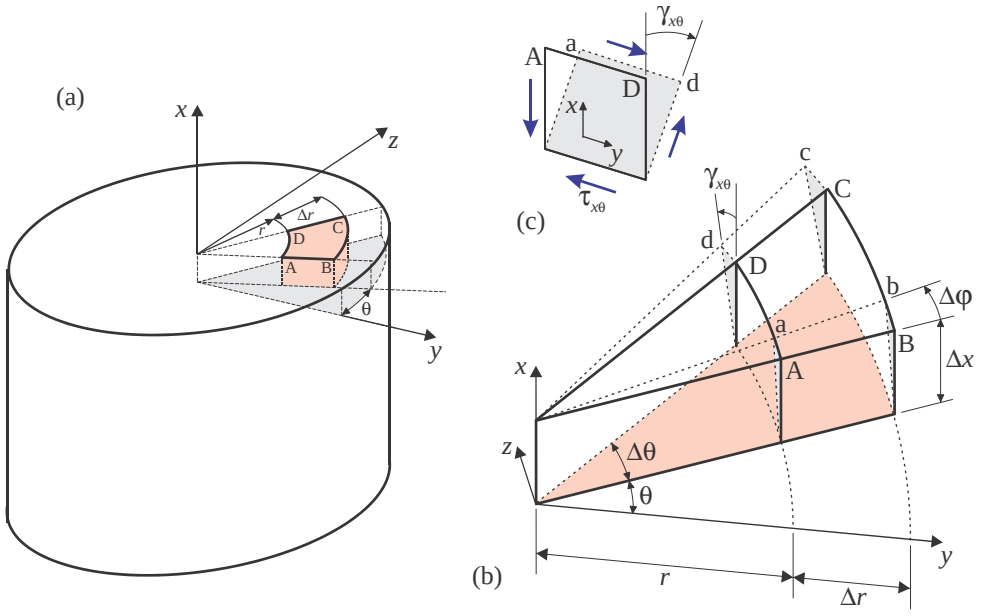


Figura 7.11: Ângulos de torção $\Delta\varphi$ e de cisalhamento γ. Sistema de coordenadas $x - r - \theta$, nas direções axial, radial e tangencial.

A Figura 7.11 ilustra o campo de deformação $\gamma_{x\theta}$ num elemento diferencial da barra. Nesse ponto é feito uma **última hipótese**, de que o **material é homogêneo, isotrópico e elástico-linear**. Isso significa que a relação tensão-deformação é dada pela Lei de Hooke generalizada (4.62):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right], & \gamma_{xr} &= \frac{1}{G}\tau_{xr}, \\
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)\right], & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta}, \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_r)\right], & \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{x\theta}.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

onde E, G e ν são os módulos de elasticidade normal e cisalhante e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente. As componentes de tensão são visualizadas na Figura 7.12.

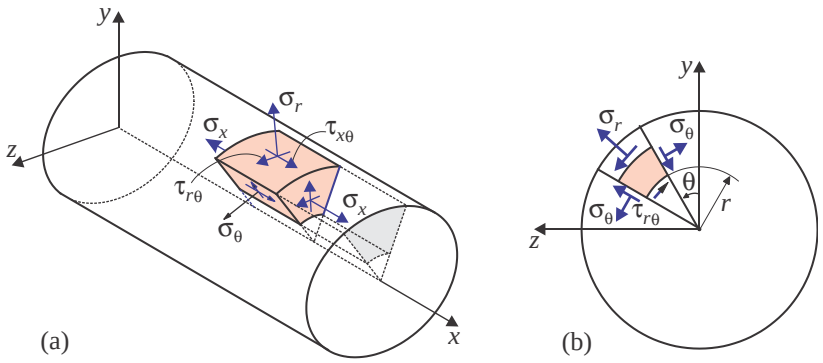


Figura 7.12: Componentes de tensão no sistema cilíndrico de coordenadas.

Substituindo as deformações (7.11) e (7.14) em (7.16), temos que o tensor tensão é todo nulo exceto por $\tau_{x\theta}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ & \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \text{Sim.} & & \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

onde

$$\tau_{x\theta}(x, r) = G\frac{d\varphi(x)}{dx}r. \tag{7.18}$$

Isso mostra claramente que, numa seção de coordenadas x, a **tensão cisalhante varia linearmente com o raio**. A variação da tensão é ilustrada nas Figuras 7.12 e 7.13, onde também fica visível a independência de $\tau_{x\theta}$ (e consequentemente de $\tau_{x\theta}$) com θ.

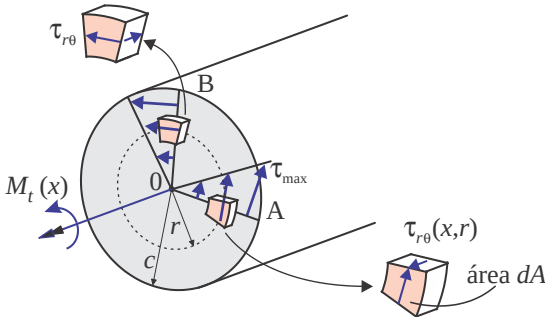


Figura 7.13: A tensão cisalhante varia linearmente com o raio, e independe de θ na seção $x = const.$

Observamos na Figura 7.13 que em cada elemento diferencial volumétrico com área dA sobre a seção transversal, atua uma força $\tau_{x\theta}\, dA$ na direção tangente. Essa força gera um momento em torno do eixo x, de valor $r\tau_{x\theta}dA$. Assim, somando as contribuições de todos os elementos diferenciais de área da seção, o momento torçor total na seção é dado por

$$M_t(x) = \int_A r \underbrace{\tau_{x\theta}\, dA}_{dF_\theta}$$

Substituindo $\tau_{x\theta}$ de (7.18) temos

$$M_t(x) = G\frac{d\varphi(x)}{dx} \underbrace{\int_A r^2\, dA}_{J(x)}. \tag{7.19}$$

A integral é uma quantidade puramente geométrica, dependente apenas da forma e das dimensões da seção transversal. Ela é universalmente denominada J, **momento polar de inércia da seção**, i.e.,

$$\boxed{J \doteq \int_A r^2\, dA} \tag{7.20}$$

A equação (7.19) então toma a forma mais compacta

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t(x)}{GJ}} \tag{7.21}$$

que, substituída em (7.18) resulta em

$$\boxed{\tau_{x\theta}(x, r) = \frac{M_t(x)}{J(x)} r} \tag{7.22}$$

As duas equações acima são fundamentais no cálculo de barras de seção circular sob torção. A equação (7.21), quando integrada, produz o **ângulo de torção** $\varphi = \varphi(x)$, enquanto (7.22) é a chamada **fórmula de torção**, que produz as tensões cisalhantes numa seção x, ao longo do raio r. Em ambas as equações, frequentemente a equação da distribuição dos momentos torçores $M_t(x)$ em cada seção pode ser previamente determinada a partir do diagrama de momentos obtidos do método das seções e da equação de equilíbrio torcional. Nessa e nas próximas seções desenvolveremos e aplicaremos cada uma das duas equações.

7.4.1 Seções maciças e tubulares – Momento polar e tensão máxima

No caso de uma **seção circular maciça de raio** r_e, a tensão máxima numa seção de coordenada axial x é obtida diretamente de (7.22), uma vez que $\tau_{\max}(x) = \tau_{x\theta}(x, r = r_e)$:

$$\boxed{\tau_{\max}(x) = \frac{M_t(x)}{J} r_e.} \tag{7.23}$$

No caso de uma **seção tubular** de raios interno r_i e externo r_e, deve-se observar que todas as hipóteses feitas para a barra maciça também são válidas, particularmente as equações (7.21) e (7.22). A distribuição de tensões, em lugar daquela da Figura 7.13, é aquela vista na Figura 7.14a. As tensões variam linearmente de $\tau_{\min}$ a $\tau_{\max}$, da borda interna à externa, segundo a equação (7.22).

O **momento polar de inércia** da seção vazada pode ser obtido com o auxílio da Figura 7.14b. Na definição (7.20), tomamos um elemento de área com formato adequado, que nesse caso é anular, dado por $dA = 2\pi r dr$. Então o momento fica

$$\begin{aligned} J &= \int_A r^2\, dA = 2\pi \int_{r=r_i}^{r_e} r^3\, dA, \\ &\rightarrow \boxed{J = \frac{\pi}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right) \qquad \text{ou ainda} \qquad J = \frac{\pi}{32}\left(d_e^4 - d_i^4\right),} \end{aligned} \tag{7.24}$$

onde d_i e d_e são os diâmetros interno e externo da seção.

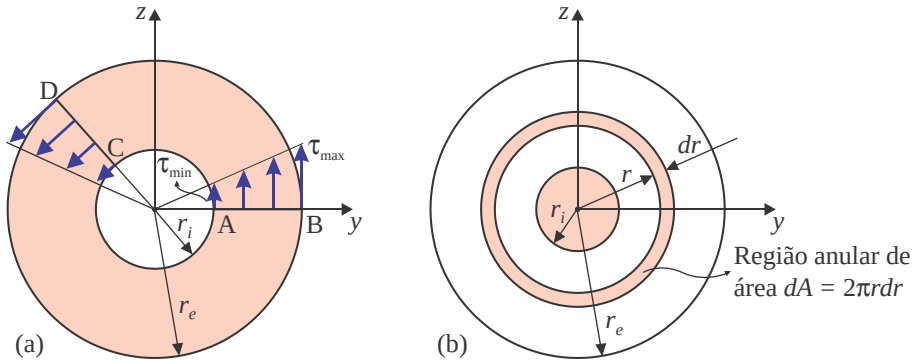


Figura 7.14: Distribuição de tensões numa seção tubular.

Para **seção maciça** de raio c e diâmetro d, basta usar $r_i = d_i = 0$:

$$\boxed{J = \frac{\pi}{2}c^4 \qquad \text{ou} \qquad J = \frac{\pi d^4}{32}.} \tag{7.25}$$

Para uma **seção tubular de parede delgada** de espessura h, se pode obter uma expressão mais simples que (7.24). Para isso, definimos um diâmetro médio d, tal que os diâmetros interno e externo são $d_i = d - h$ e $d_e = d_e + h$. Substituindo em (7.24) se obtém

$$J = \frac{\pi}{4}\left(d^3 h + d h^3\right). \tag{7.26}$$

Fazendo o limite $h \to 0$ em $J/h = \dfrac{\pi}{4}\left(d^3 + d h^2\right)$, o último termo se anula e se obtém a estimativa para o momento polar de inércia de uma seção anular delgada:

$$\boxed{J = \frac{\pi}{4}d^3 h = 2\pi r^3 h, \qquad \text{onde } r = d/2 \text{ é o raio médio}} \tag{7.27}$$

Exemplo 7.2 – Tensão máxima e coeficiente de segurança

Considere o eixo mostrado na Figura 7.15, suportado por dois mancais de rolamento e sujeito à ação de três torques aplicados através das engrenagens A, B e C, sendo $T_A = 100$ Nm, $T_B = 50$ Nm. O material do eixo é aço, com tensão de escoamento $\sigma_E = 600$ MPa. A seção é maciça, com diâmetro $d = 15$ mm. (a) Determine a tensão cisalhante máxima devida à torção; (b) Determine o coeficiente de segurança usando os critérios de Tresca e de von Mises.

Solução:

A **primeira etapa** consiste em determinar o diagrama de esforços internos de momento torçor. Como os mancais não oferecem reação à rotação axial, os torques externos aplicados, T_A, T_B e T_c, devem ser auto equilibrados. Assim, a equação de equilíbrio produz o valor de T_c:

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow \quad T_A + T_B - T_c = 0 \quad \rightarrow \quad T_c = T_A + T_B = 100 + 50 = 150 \text{ Nm}.$$

Em seguida aplicamos o método das seções para os esforços em cada trecho. Como não há carga torcional distribuída, os esforços serão uniformes em cada trecho. Assim, basta realizar um corte em cada trecho.

Trecho OA - Realizando o corte s_1 (Figura 7.15) e tomando o lado esquerdo como na Figura 7.16a.

$$\sum M_x \quad \rightarrow \quad \boxed{M_x^{0A} = 0},$$

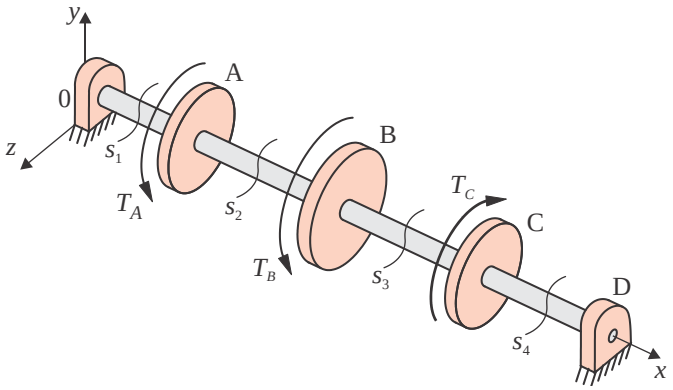


Figura 7.15: Eixo do Exemplo 7.2.

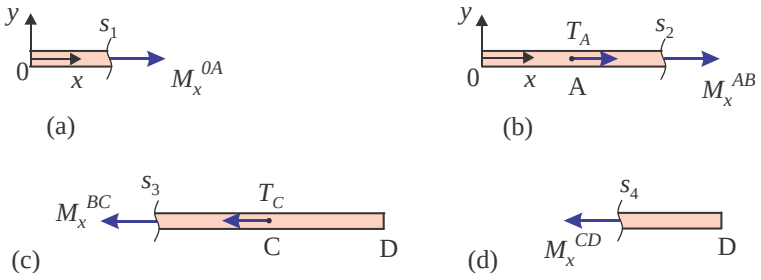


Figura 7.16: Cortes do método das seções para o Exemplo 7.2.

Trecho AB - Fazendo o corte s_2 e tomando o lado esquerdo como na Figura 7.16b,

$$\sum M_x \rightarrow M_x^{AB} + T_A = 0 \quad \rightarrow \quad M_x^{AB} = -T_A \quad \rightarrow \quad \boxed{M_x^{AB} = -100 \text{ Nm}}$$

Trecho BC - Na Figura 7.16c temos o lado direito do corte s_3. O equilíbrio leva a

$$\sum M_x \rightarrow M_x^{BC} + T_c = 0 \quad \rightarrow \quad M_x^{BC} = -T_c \quad \rightarrow \quad \boxed{M_x^{BC} = -150 \text{ Nm}}$$

Trecho CD - Da figura 7.16d para o lado direito do corte s_4, o equilíbrio produz

$$\sum M_x \quad \rightarrow \quad \boxed{M_x^{CD} = 0}$$

O diagrama de esforço de torção é ilustrado na Figura 7.17, e o máximo esforço ocorre em qualquer seção do trecho BC, dado por $M_{\max} = -150$ Nm.

Como a seção da barra é uniforme, a tensão máxima ocorrerá na seção de maior esforço, i.e., em uma seção qualquer do trecho BC, com $M_t = -150$ Nm. A tensão máxima na seção vem de (7.23), onde o raio é $c = d/2 = 15/2 = 7,5$ mm e o momento polar vem de (7.25):

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 15^4}{32} = 4.970 \text{ mm}^4.$$

Então o módulo da tensão é:

$$\tau^t_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{J} c = \frac{150 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{4.970 \text{ mm}^4} 7,5 \text{ mm} = 226,3 \text{ MPa}.$$

O "t" em $\tau^t_{\max}$ indica torção.

Para a aplicação dos **critérios de falha** precisamos previamente determinar a tensão cisalhante máxima absoluta e as tensões principais. Plotando os pontos $X(\sigma_x; \tau^t_{\max})$ e $T(\sigma_\theta; -\tau^t_{\max})$ no plano $\sigma - \tau$, com $\sigma_\theta = \sigma_x = 0$ e $\tau^t_{\max} = 226,3$ MPa, temos o círculo de Mohr externo mostrado na Figura 7.18. Esse círculo identifica duas das tensões principais, σ_1 e σ_2. A outra tensão principal, σ_3, é

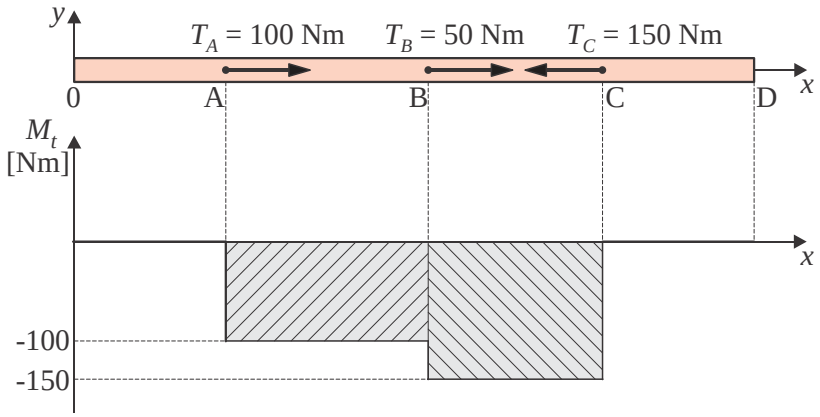


Figura 7.17: Diagrama de esforços de momento torçor do exemplo 7.2.

nula. Assim,

$$\left|\begin{array}{l}\tau_{\max} = \tau^t_{\max} = 226,3 \text{ MPa},\\ \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau^t_{\max} = 226,3 \text{ MPa},\\ \sigma_3 = 0.\end{array}\right.$$

Na mesma figura aparecem os outros dois círculos de Mohr, que são internos, entre os pontos 13 e 23. Então, a tensão cisalhante máxima absoluta é definida pelo plano 12, e tem valor $\tau^{abs}_{\max} = \tau^t_{\max} = 226,3$ MPa.

Observe que isso é regra em eixos de seção circular sob torção pura: a tensão cisalhante máxima absoluta $\tau^{abs}_{\max}$ é sempre igual à tensão cisalhante máxima de torção $\tau^t_{\max}$ na seção.

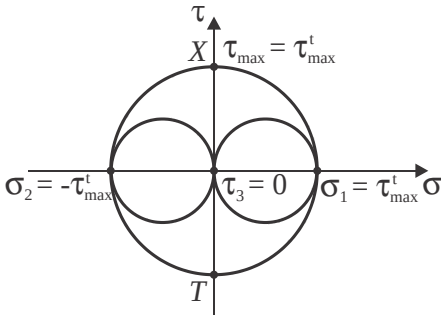


Figura 7.18: Círculos de Mohr para o ponto crítico do Exemplo.7.2.

O coeficiente de segurança pelo critério de Tresca fica

$$n = \frac{\sigma_E/2}{\tau_{\max}} = \frac{600/2}{226,3} = 1,33.$$

Pelo critério de von Mises, a tensão equivalente é

$$\sigma_{EQ} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{3}\tau^t_{\max} = \sqrt{3}\ 226,3 = 391,9 \text{ MPa},$$

de forma que o coeficiente de segurança previsto pelo critério é: $n = \sigma_E/\sigma_{EQ} = 1,53$.

7.4.2 Dimensionamento

Observe no Exemplo 7.2 que a tensão de torção máxima na seção, $\tau^t_{\max}$, já corresponde à tensão cisalhante máxima no círculo de Mohr $\tau_{\max}$. Assim, a aplicação do critério de Tresca para torção pura é equivalente à simples comparação entre a tensão cisalhante de torção, $\tau^t_{\max}$, e a tensão de escoamento do material, $\sigma_E/2$, uma vez que existe um estado simples de tensão na barra, onde a única componente de tensão não nula é $\tau_{x\theta}$.

Quadro 1: Por isso, frequentemente os cálculos de barras em torção pura são feitos usando diretamente $\tau^t_{\max}$, sem o uso explícito de transformação de tensões e o critério de falha é tomado simplesmente como $n = \sigma_E/2\tau^t_{\max}$.

Quadro 2: Adicionalmente, uma vez que em torção pura existe apenas uma componente de tensão e de deformação, usaremos apenas a notação simplificada τ e γ em lugar de $\tau_{x\theta}$ e $\gamma_{x\theta}$ e $\tau_{\max}$ para indicar $\tau_{x\theta}(x, r = c)$ e $\gamma_{x\theta}(x, r = c)$.

Quando se trata de **eixos maciços**, as equações (7.23) e (7.25) podem ser ajuntadas, resultando uma forma mais eficiente:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t c}{J} = \frac{M_t d/2}{\pi d^4/32} \quad \rightarrow \quad \boxed{\underbrace{\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}}_{\text{Solicitação}} = \underbrace{\frac{\sigma_E/2}{n}}_{\text{Resistência}}} \tag{7.28}$$

onde n é o **coeficiente de segurança** e σ_E a **tensão normal de início de escoamento do material**. Com a segunda igualdade pode-se tanto determinar o coeficiente de segurança quanto fazer o dimensionamento da seção, determinando o diâmetro d.

Exemplo 7.3 – Eixo vazado

Considere um eixo de seção vazada para suportar os torques do Exemplo 7.2. Determine o diâmetro externo necessário para que o coeficiente de segurança seja o mesmo do eixo maciço do Exemplo 7.2. Como recomendação de projeto, use um diâmetro interno igual a 60 % do externo.

Solução:

Do Exemplo 7.2 temos que $M_t = M_{\max} = 150 \cdot 10^3$ Nmm e a tensão máxima é $\tau_{\max} = 226,3$ MPa no eixo maciço. Para o eixo tubular usamos as equações (7.23) e (7.24):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max} d_e/2}{J} \qquad \text{onde} \qquad J = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4).$$

Como foi estipulado $d_i = \alpha\ d_e$, para $\alpha = 0,6$, temos que o momento polar de inércia fica $J = (1 - \alpha^4)\pi d_e^4/32$, e a tensão,

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{16 M_{\max}}{(1 - \alpha^4)\pi d_e^3}} \tag{7.29}$$

O diâmetro externo pode ser extraído:

$$d_e^3 = \frac{16 M_{\max}}{(1 - \alpha^4)\pi \tau_{\max}} = \frac{16 \times 150 \cdot 10^3}{(1 - \alpha^4)\pi \times 226,3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d_e = 15,7 \text{ mm}}$$

Logo, o diâmetro interno é $d_i = 0,6\ d_e = 9,43$ mm, e a área da seção é $A_v = \pi(d_e^2 - d_i^2)/4 = 123,8$ mm^2. Como a área da seção do eixo maciço é $A_m = \pi d^2/4 = \pi \times 15^2/4 = 176,7$ mm^2, temos relação entre as áreas

$$\frac{A_{vazado}}{A_{macico}} = \frac{123,8\ \text{mm}^2}{176,7\ \text{mm}^2} = 0,70,$$

Isso significa que, usando o tubo indicado, precisamos de apenas 70% da quantidade de material necessária em um eixo maciço para obter o mesmo nível de segurança.

Quando observamos a equação (7.29) para a tensão máxima num tubo, para o caso em que $\alpha = d_i/d_e$, notamos que quanto maior α, i.e., quanto mais fina for a parede, menor será a tensão, para um dado momento $M_{\max}$ na seção. Por outro lado, área da seção é

$$A = \frac{\pi}{4}(d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi d_o^2}{4}(1-\alpha^2).$$

Isolando d_e e substituindo em (7.29) temos

$$\tau_{\max} = \frac{16\pi^{1/2} M_{\max}}{(4A)^{3/2}} \left[\frac{(1-\alpha^8)^{3/2}}{(1-\alpha^4)}\right] \tag{7.30}$$

Observação: Note que o termo em colchetes tende a zero conforme $\alpha \to 1$. Isso significa que, hipoteticamente, se poderia produzir tubos da mesma área de seção, com diâmetros médios cada vez maiores e espessuras cada vez menores, tal que a tensão de torção fosse tão pequena quanto se desejasse. Na prática esse processo tem um limite. Quando a parede se torna demasiada fina, outros mecanismos de falha entram em ação. Para visualizar isto, basta tentar aplicar torção num tubo feito com uma folha de papel enrolada. O que se observa é uma instabilidade da parede. A parede apresenta flexão local, e o tubo logo abandona sua forma cilíndrica perfeita e se torna enrugado. **Nesse caso as fórmulas vistas aqui perdem a validade.**

Entretanto, até um certo limite, é recomendável o uso de eixos tubulares para suportar torção. Quando o processo de fabricação permitir, podem-se usar eixos com fatores α de 0,4 a 0,7.

Exemplo 7.4 – Dimensionamento de eixo em motor

Considere um eixo maciço usado para transmitir 10 hp de um motor, à velocidade de $w_r = 1.800$ rpm. Determine o diâmetro d do eixo se o material tem tensão admissível $\tau_{adm} = 60$ MPa.

Solução:

Note que o dimensionamento será feito através da tensão cisalhante de torção. Como o eixo é maciço, podemos usar a equação (7.28), com $\sigma_E/2n$ sendo igual a τ_{adm}. Para usar essa equação, precisamos inicialmente determinar o torque T aplicado e o esforço na seção crítica M_t.

O **torque transmitido** no eixo é associado à potência e à rotação via equação (7.6):

$$T = \frac{7.120,9\ P_{hp}}{w_r} = \frac{7.120,9 \times (10\ \text{hp})}{(1.800\ \text{rpm})} = 39,56\ \text{Nm}. \tag{7.31}$$

Usando o método das seções, temos que o **esforço torcional** em qualquer seção do eixo é $M_t = T$, i.e., $M_t = 39,56$ Nm. Finalmente, o dimensionamento é feito de (7.28):

$$\tau_{adm} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad \to \quad d^3 = \frac{16M_t}{\pi\tau_{adm}} = \frac{16 \times 39,56 \cdot 10^3\ \text{Nmm}}{\pi 60\text{N/mm}^2}. \tag{7.32}$$

Logo, obtemos o diâmetro do eixo $d = 21,93$ mm, que pode ser construído com $d = 22$ mm.

Exemplo 7.5 – Efeito da velocidade de rotação

Considere o Exemplo 7.4, porém suponha que a mesma potência seja transmitida a uma rotação de apenas $w_r = 18$ rpm. O que acontece com o diâmetro necessário de eixo?

Solução:

O Exemplo 7.4 pode ser rapidamente refeito, simplesmente reavaliando as equações (7.31) e (7.32):

$$T = \frac{7.120,9\ P_{hp}}{w_r} = \frac{7.120,9 \times 10\ \text{hp}}{18\ \text{rpm}} = 3.956\ \text{Nm}.$$

Logo, o esforço nas seções é $M_t = 3.456$ Nm, e (7.32) fica

$$d^3 = \frac{16M_t}{\pi\tau_{adm}} = \frac{16 \times 3.956 \cdot 10^3}{\pi 60} \rightarrow \boxed{d = 69,5\ \text{mm}}$$

Observe que quando a rotação era 1.800 rpm, precisávamos de um diâmetro de eixo de apenas $d = 22$ mm, enquanto agora, transmitindo a potência em 18 rpm, precisamos de $d = 69,5$ mm.

> Isto significa que para transmitir uma certa potência com uma rotação mais baixa precisamos da seção transversal mais robusta.

De fato, uma equação fechada para o diâmetro necessário de uma seção maciça pode ser facilmente determinada, substituindo (7.6) em (7.28):

$$\boxed{d^3 = \frac{16n}{\pi\sigma_{_E}} \frac{7.120,9}{w_r} P_{hp}} \tag{7.33}$$

onde n é o coeficiente de segurança, $\sigma_{_E}$ a tensão normal de escoamento em N/m^2, w_r é a rotação em rpm, P_{hp} a potência em hp e d o diâmetro necessário em metros.

7.5 Concentração de tensões em torção

O efeito de concentração de tensões em peças foi introduzido na seção 4.10, associado ao problema de tensões normais axiais em barras sob tração com entalhes e irregularidades geométrica. De fato, a concentração de tensões ocorre em todas as situações de carregamento, desde que a geometria possua irregularidades. No caso de barras de seção circular sendo tratado no presente capítulo, o efeito de concentração é representado pelo fato que a tensão cisalhante transversal máxima efetivamente atuando numa seção de entalhe é superior àquela calculada usando as fórmulas usuais de cálculo, i.e., a eq. (7.23), que colocamos na forma $\tau_o = M_t r/J$. Esse efeito é ilustrado na Figura 7.19. Na figura (a), temos um caso típico de uma seção de transição de um eixo escalonado, em que a transição entre os dois diâmetros é feita com o raio de concordância r. Na figura (b) temos a distribuição radialmente linear entre a tensão cisalhante e o raio, dada pela fórmula de torção τ_o. Consideremos que a peça esteja na faixa de validade da teoria vista (problema linear com pequenos deslocamentos, rotações e deformações, material elástico linear isotrópico homogêneo. Então, sabe-se que nas seções na região do entalhe, a distribuição de real de tensões não varia linearmente. De fato, ela varia como ilustrado na Figura 7.19b. O aspecto importante no momento é que o valor máximo é superior ao máximo nominal.

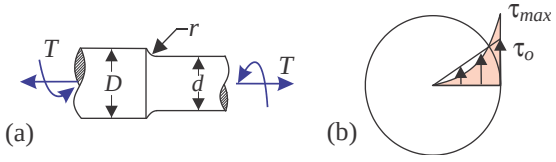


Figura 7.19: (a) Seção de transição de um eixo escalonado, com o raio de concordância r. (b) Distribuição de tensões nominais e reais na seção mínima do entalhe.

A relação entre a tensão máxima $\tau_{\max}$ e a **tensão nominal** τ_0 é o **fator de concentração de**

tensões K_t, que é definido por

$$\boxed{K_t = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}} \tag{7.34}$$

A tensão nominal é calculada de forma que ignora o efeito da concentração de tensões. Dessa definição, se pode obter a estimativa da tensão máxima como

$$\boxed{\tau_{\max} = K_t \tau_0} \tag{7.35}$$

Dentro das hipóteses, o valor de K_t depende apenas dos invariantes geométricos do entalhe. Por exemplo, na transição mostrada na Figura 7.19a, o K_t não depende dos valores individuais de D, d e r, ou mesmo do valor do carregamento T. Em vez disso, depende apenas dos invariantes D/d e r/d. Valores de K_t para presente geometria são vistas na Figura 7.20, e gráficos para outras geometrias e carregamentos são resumidos no Apêndice.

Observação - Deve-se observar que cada gráfico de K_t deve definir qual a forma adequada de determinar a tensão nominal. No caso da Figura 7.20, o K_t deve ser usado com τ_0 calculado pela seção mínima da transição, i.e., $\tau_0 = T(d/2)/J$, onde $J = \pi d^4/32$.

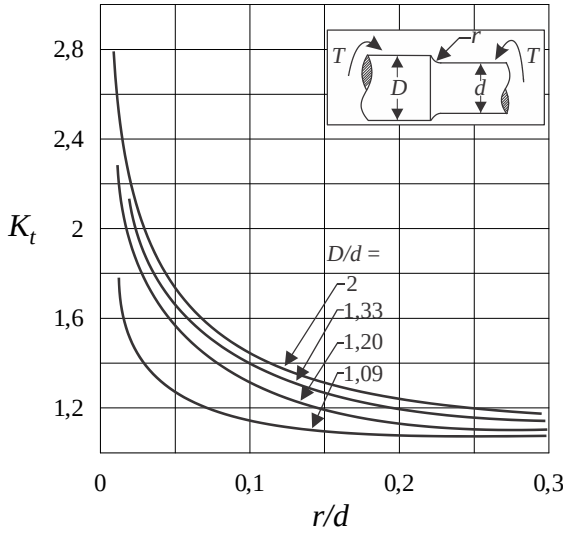


Figura 7.20: Fator de concentração de tensão para eixo de seção circular escalonado com filete. Tensão nominal baseada na seção mínima.

Exemplo 7.5.1 – Tensão concentrada em filete de eixo escalonado

Considere uma barra de aço, escalonada como na Figura 7.21, suportando torques $T_1 = 2.700$ Nm e $T_2 = 900$ Nm. Determine o coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento, levando em consideração o efeito de concentração de tensões na seção B. Os diâmetros em cada trecho são $d_1 = 80$ mm, $d_2 = 50$ mm, e o raio de concordância em B é $r = 2$ mm. Use os dados: $L_1 = 5$ m, $L_2 = 2$ m, $G = 80$ GPa, $\sigma_E = 120$ MPa.

Solução:

Como o problema é isostático, a **primeira etapa** do processo de solução é a determinação da reação torcional no apoio, R_{mx}, e do diagrama de esforços. Por equilíbrio global,

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{mx} - T_1 + T_2 = 0. \qquad \rightarrow \qquad R_{mx} = 1.800 \text{ Nm}.$$

Usando o método das seções temos que os **esforços** numa seção qualquer do trecho AB é $M_1 = 1.800$ Nm, e no trecho BC é $M_2 = -900$ Nm. Esses esforços são plotados na Figura 7.22.

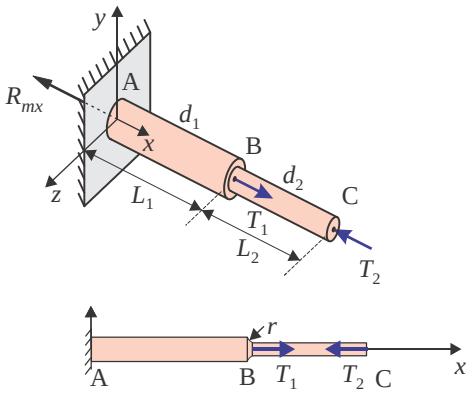


Figura 7.21: Barra escalonada com raio de concordância do Exemplo 7.5.1.

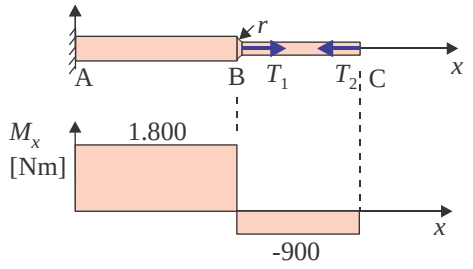


Figura 7.22: Esforços de torção na barra do Exemplo 7.5.1.

As tensões cisalhantes nominais devidas à torção são uniformes em cada trecho. Os momentos polares de inércia em cada trecho são:

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} = 4,02 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad \text{e} \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = 0,614 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Então, as tensões nominais em cada trecho, em módulo, são

$$\tau_1 = \frac{M_1}{J_1}(d_1/2) = 26,9 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{|M_2|}{J_2}(d_2/2) = 36,7 \text{ MPa}.$$

O cálculo da tensão máxima na seção B inicia com o cálculo de K_t, que pode ser feito pela Figura 7.20. O valores adimensionais geométricos necessários são $r/d = 2/50 = 0,04$ e $D/d = 80/50 = 1,6$. Como resultado, temos aproximadamente $K_t = 1,8$. O mesmo gráfico indica como a tensão nominal deve ser calculada. No presente caso, ela deve ser obtida a partir da seção mínima em torno da seção B, i.e., devemos usar a tensão calculada à direita de B, $\tau_2 = 36,7$ MPa. Então, a tensão máxima no entalhe é obtida por (7.35)

$$\tau_{\max} = K_t \tau_2 = 1,8 \times 36,7 \text{ MPa} = 66,1 \text{ MPa}.$$

Essa é a tensão máxima na seção B, como na Figura 7.19b. Deve-se lembrar que esse é o valor máximo real apenas dentro das condições previstas na teoria. Caso alguma das hipóteses não seja satisfeita essa estimativa não é correta. Por exemplo, se o material não for linear, ou for anisotrópico, ou heterogêneo.

7.6 Ângulo de torção

Barras submetidas a torção precisam não apenas serem capazes de suportar o torque sem sofrerem plastificação ou outro tipo de falha dependente das tensões, mas também não devem apresentar

deformação excessiva. Frequentemente o dimensionamento de um eixo deve ser feito para satisfazer simultaneamente dois critérios, em vez de apenas um:

$$\begin{cases} \text{Critério de tensão} & \rightarrow & \tau_{aplic} \leq \tau_{adm} \\ \text{Critério de rigidez torsional} & \rightarrow & \varphi_{aplic} \leq \varphi_{adm} \end{cases} \tag{7.36}$$

Sobre a aplicação do primeiro critério, sobre tensões, o tratamento já foi feito nas seções anteriores, de forma que trataremos aqui do método de determinação do ângulo de torção φ e do seu uso em dimensionamento. Nesse caso temos uma restrição de projeto, que uma certa barra deve suportar os torques aplicados sem que seu ângulo de torção φ exceda um certo valor, por exemplo, $\varphi_{adm} = 0,0175$ rad ($\simeq 1^o$). É mais usual, entretanto, ter um valor admissível por unidade de comprimento de barra, φ^o, em (rad/m).

Em diversas situações o cálculo do ângulo de torção é importante, ou mesmo fundamental. Algumas dessas situações são:

- Cálculo de vibrações torcionais;
- Componentes de máquinas ferramentas;
- Componentes de robôs e braços manipuladores;
- Sistemas estaticamente indeterminados (hiperestáticos).

A determinação do ângulo de torção é feita integrando a equação (7.21), $d\varphi/dx = M_t/GJ$ onde, em problemas isostáticos a função $M_t = M_t(x)$ é previamente determinada, e a função para o momento polar de inércia, $J = J(x)$ é determinada a partir do conhecimento do diâmetro da seção, i.e., dado $d_i = d_i(x)$ e $d_e = d_e(x)$, o momento polar é obtido por

$$J(x) = \frac{\pi}{32}(d_e^4(x) - d_i^4(x)). \tag{7.37}$$

Integrando (7.21) entre duas seções, de coordenadas x_o e x, temos

$$\boxed{\underbrace{\varphi(x) - \varphi(x_o)}_{\Delta\varphi} = \int_{\bar{x}=x_o}^{x} \frac{M_x(\bar{x})}{GJ(\bar{x})}\, d\bar{x}} \tag{7.38}$$

O resultado da integral produz o ângulo de rotação (em radianos), de seção x em relação à rotação da seção x_o, i.e., a **variação de ângulo de torção $\Delta\varphi$ entre as duas seções**.

Alguns casos particulares de (7.38) são dignos de nota. Primeiro, o caso mais simples de uma **barra em balanço** como na Figura 7.23. Como o torque é concentrado, o esforço de torção M_t é uniforme, $M_t = cte = T$. A seção é uniforme, logo $J(x) = cte = J$. O engaste na seção $x_o = 0$ indica $\varphi(x_o) = 0$. Logo (7.38) reduz-se a

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi(L) = \frac{TL}{GJ}} \tag{7.39}$$

Uma barra desse tipo pode ser vista como uma **mola torcional** em que a relação torque $\times$ ângulo de torção é dada por (7.39). Dessa equação também pode-se extrair uma **constante de rigidez torcional**:

$$\boxed{k_t = \frac{GJ}{L}, \text{ em } \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}\right] \qquad \text{tal que} \qquad T = k_t\varphi.} \tag{7.40}$$

Essa constante pode ser interpretada como uma propriedade do componente, que representa sua rigidez à torção. Essa rigidez é completamente descrita pelo valor de k_t, i.e., conhecido k_t, todo o comportamento cinemático da barra pode ser determinado sem o conhecimento dos valores individuais de G, J o do seu comprimento L.

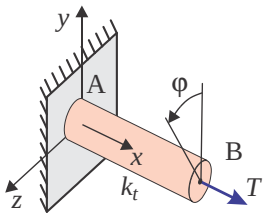


Figura 7.23: Barra sob torção como equivalente a uma mola torcional.

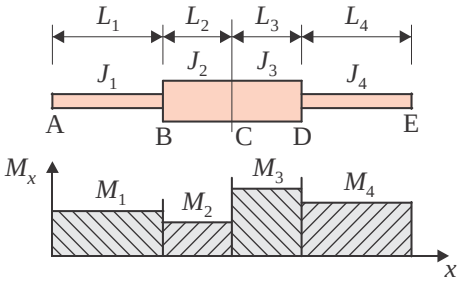


Figura 7.24: Barra escalonada.

Barra escalonada

Eixos em redutores de engrenagens são geralmente de forma "escalonada", como na Figura 7.24, i.e., a seção não é totalmente uniforme, porém é constante ao longo de intervalos, como mostrado. Se o carregamento for constituído por torques concentrados nas seções marcadas, A, B, C,..., o esforço de torção será uniforme em cada trecho. Então, definimos cada trecho por k, para $k = 1, .., n$, de forma que o momento polar é J_k, o esforço de momento torçor é M_k e o comprimento do trecho é L_k. Assim (7.38) pode ser integrada trecho a trecho, resultando na rotação da última seção (seção E no exemplo da Figura 7.24) em relação à seção A:

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi(L) - \varphi(x_o) = \frac{M_1 L_1}{GJ_1} + \frac{M_2 L_2}{GJ_2} + \frac{M_3 L_3}{GJ_3} \cdots = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k L_k}{GJ_k}} \tag{7.41}$$

Observe que o número de termos no somatório depende da seção em que se deseja calcular a rotação. Por exemplo, para a seção C, teríamos que incluir apenas as rotações dos trechos AB e BC, de forma que a rotação de C relativa a A seria dada por:

$$\Delta\varphi_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = \frac{M_1 L_1}{GJ_1} + \frac{M_2 L_2}{GJ_2}.$$

Exemplo 7.6 – Dimensionamento de barra de controlador por Rigidez Torsional

Considere uma barra utilizada num dispositivo de controle de posição de um mecanismo, em que as forças devem ser suportadas com deformações bastante pequenas. A barra é de aço, escalonada como na Figura 7.25, e suporta torques $T_1 = 2.700$ Nm e $T_2 = 900$ Nm. Determine o diâmetro d_1 necessário no trecho AB, se $\tau_{adm} = 40$ MPa e a torção total entre A e C é limitada a 3^o. (Dados: $L_1 = 5$ m, $L_2 = 2$ m, $d_2 = 50$ mm, $G = 80$ GPa.) Para o diâmetro determinado, qual o ângulo de torção das seções B e C?

Solução:

A **primeira etapa** do processo de solução é a determinação da reação torcional no apoio, R_t, e do diagrama de esforços. Por equilíbrio global, $\sum M_x = 0 \rightarrow R_t = T_1 + T_2 = 3.600$ Nm. Usando o método das seções, como no Exemplo 7.2, temos os esforços, que são plotados na Figura 7.26. O

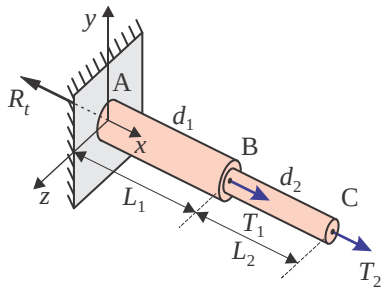


Figura 7.25: Barra escalonada do Exemplo 7.6.

esforço numa seção qualquer do trecho AB é $M_1 = 3.600$ Nm, e no trecho BC é $M_2 = 900$ Nm.
A **segunda etapa** é determinar o diâmetro em AB, d_1, necessário para suportar as tensões. Usando (7.28) temos

$$d_1^3 = \frac{16M_1}{\pi\tau_{adm}} = \frac{16 \times 3.600 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi \times 40 \text{ N/mm}^2} \qquad \rightarrow \qquad d_1 = 77,1 \text{ mm}.$$

Observe que usamos a tensão nominal para fazer o dimensionamento, ignorando o **efeito de concentração de tensões** no entalhe em B. Isso foi feito devido a termo usado τ_{adm} em vez de τ_E, que seria superior. A relação entre os dois deve ser capaz de absorver o erro incorrido no cálculo da tensão máxima aplicada usando o valor nominal.
A **terceira etapa** é a determinação do diâmetro d_1 necessário para satisfazer à condição de ângulo de torção máximo. Usando (7.36) e (7.41) temos

$$\Delta\varphi_{apl} \leq \Delta\varphi_{adm} \tag{7.42}$$

onde $\Delta\varphi_{adm} = 3^o \times \pi/180^o = 0,0524$ rad, e

$$\Delta\varphi_{apl} = \frac{M_1L_1}{GJ_1} + \frac{M_2L_2}{GJ_2}. \tag{7.43}$$

No segmento BC, a seção é conhecida, tal que $J_2 = \pi d_2^4/32 = \pi 50^4/32 = 0,614 \cdot 10^6$ mm^4. No trecho AB, o diâmetro d_1 é a incógnita do problema, logo $J_1 = \pi d_1^4/32$. Juntando as equações (7.42) e (7.43) temos

$$\frac{M_1L_1}{GJ_1} + \frac{M_2L_2}{GJ_2} \leq \Delta\varphi_{adm}.$$

Substituindo os valores,

$$\frac{3.600 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times (\pi d_1^4/32)} + \frac{900 \times 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 0,614 \cdot 10^6} \leq 52,4 \cdot 10^{-3}.$$

Resolvendo, obtemos $d_1 \geq 110$ mm. Comparando com o valor necessário para satisfazer o critério de tensão, $d_1 = 77,1$ mm, tem-se que o diâmetro mínimo necessário para satisfazer ambos os critérios é definido pela rigidez: $d_1 \geq 110$ mm, que pode ser arredondado para $d_1 = 84$ mm.

Com isso podemos calcular os ângulos de torção relativos em cada trecho e a rotação em C para o diâmetro $d_1 = 110$ mm. Para esse diâmetro, o momento polar de inércia no trecho AB é $J_1 = \pi d_1^4/32 = 14,70 \cdot 10^6$ mm^4.

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_{BA} &= \frac{M_1L_1}{GJ_1} = \frac{3.600 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 14,70 \cdot 10^6} = 15,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (0{,}899^\circ). \\
\Delta\varphi_{CB} &= \frac{M_2L_2}{GJ_2} = \frac{900 \times 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \times 0,614 \cdot 10^6} = 36,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (2{,}10^\circ),
\end{aligned}$$

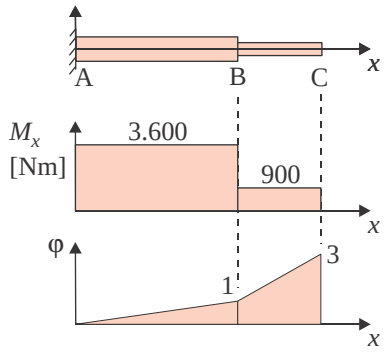


Figura 7.26: Esforços e ângulos de torção do Exemplo 6.

O ângulo de torção da seção C é $\varphi_C = \Delta\varphi_{BA} + \Delta\varphi_{CB} = 52,4 \cdot 10^{-3}$ rad (3°) que, como esperado é igual ao valor admissível. Para esse diâmetro $d_1 = 110$ mm, a tensão cisalhante máxima nominal no trecho AB é $\tau_1 = 13,8$ MPa.

Observação: Note que essa tensão é nominal, i.e., não leva em conta explicitamente o efeito de concentração de tensões na concordância entre os dois diâmetros na seção B. Esse efeito deve ter sido incorporado na definição da tensão admissível $\tau_{adm} = 40$ MPa, i.e., τ_{adm} deve ter sido obtido reduzindo a tensão de escoamento de tal forma a compensar o fator de concentração de tensões solicitantes na seção. A influência da concentração de tensões na seção B é bastante localizada em relação ao comprimento total do eixo. Assim, seu efeito nos ângulos de torção calculados é geralmente considerado desprezível.

7.6.1 Problemas hiperestáticos de torção

Por sua própria definição, problemas hiperestáticos não permitem a determinação das reações nos apoios a partir apenas das equações globais de equilíbrio. Nesses casos, uma equação adicional é obtida com o uso das fórmulas de ângulo de torção, equações (7.38)-(7.41). O processo de solução é ilustrado a seguir através de exemplos.

Exemplo 7.7 – Barra hiperestática sob torção

A barra de aço na Figura 7.27a é de seção transversal circular uniforme, com diâmetro $d = 40$ mm. Se ela for submetida ao binário indicado, com força $F = 3$ kN aplicadas nas direções $\pm z$, determine: (a) as reações nos apoios; (b) a tensão máxima de torção e o coeficiente de segurança ($\sigma_E = 150$ MPa); (c) o ângulo de torção da barra na seção B, e o coeficiente de segurança para $\varphi_{adm} = 0,3^o$ ($G = 79{,}6$ GPa).

Solução:

Etapa 1 - Equações globais de equilíbrio.

A barra é engastada nas extremidades e submetida apenas a um torque em B, igual a $T = 100 \cdot F = 3 \cdot 10^5$ Nmm. As reações não nulas nos apoios são apenas de torção, R_{MA} e R_{MC}, como indicado na figura 7.27b. A única equação global de equilíbrio não trivial é

$$\sum M_x \rightarrow R_{MA} + R_{MC} - T = 0. \tag{7.44}$$

Etapa 2 - Esforços.

Apesar de não termos as reações determinados, é possível escrever os esforços (e montar o diagrama) em termos de uma das reações. Por exemplo, escolhemos R_{MC} para servir de parâmetro, (que só no final será determinado), e determinemos todo o resto em função dele. Assim, de (7.44) a reação R_{MA} é

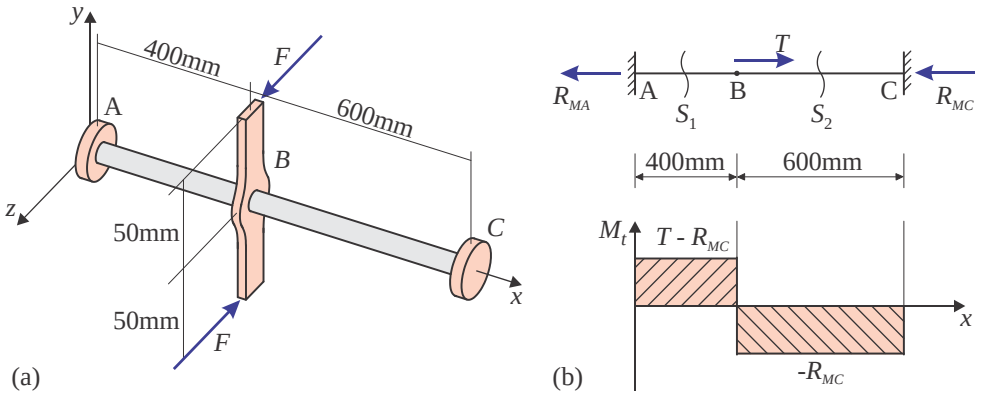


Figura 7.27: Barra do Exemplo 7.7.

$$R_{MA} = T - R_{MC} \tag{7.45}$$

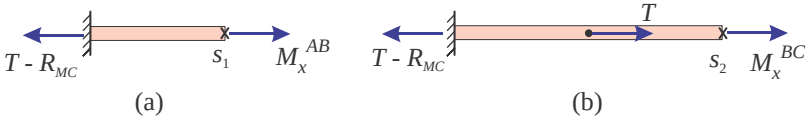


Figura 7.28: Aplicação do método das seções no Exemplo 7.7.

Os esforços de torção podem ser obtidos pelo método das seções. Fazendo dois cortes, s_1 e s_2, como ilustrado na Figura 7.28, temos os esforços em cada trecho em termos de uma das reações:

$$\begin{array}{lcll} \text{Trecho AB} & \rightarrow & M_x^{AB} = cte = T - R_{MC}, & \forall x \in (0; 400 \text{ mm}), \\ \text{Trecho BC} & \rightarrow & M_x^{BC} = cte = -R_{MC}, & \forall x \in (400 \text{ mm}; 1000 \text{ mm}). \end{array} \tag{7.46}$$

O diagrama é mostrado na Figura 7.27b, supondo $0 < R_{MC} < R_{MA}$.

Etapa 3 - Equação cinemática

Podemos usar (7.41) para determinar o ângulo de rotação da seção C em relação ao da seção A, $\Delta\varphi$, sabendo previamente que $\Delta\varphi = 0$:

$$\Delta\varphi = \frac{L_1 M_x^{AB}}{GJ} + \frac{L_2 M_x^{BC}}{GJ} = 0,$$

onde $L_1 = 400$ mm, $L_2 = 600$ mm, $M_x^{AB} = T - R_{MC}$ e $M_x^{BC} = -R_{MC}$. Logo,

$$400\ (3 \cdot 10^5 - R_{MC}) + 600\ (-R_{MC}) = 0. \tag{7.47}$$

As equações (7.45) e (7.47) formam então um sistema de duas equações e duas incógnitas, cuja solução são as reações: $R_{MA} = 1,8 \cdot 10^5$ Nmm e $R_{MC} = 1,2 \cdot 10^5$ Nmm.

Etapa 4 - Tensões.

Os esforços podem agora serem calculados de (7.46): $M_x^{AB} = 1,8 \cdot 10^5$ Nmm e $M_x^{BC} = -1,2 \cdot 10^5$ Nmm. Logo, o momento máximo é $M_{\max} = 1,8 \cdot 10^5$ Nmm, e ocorre em qualquer seção do trecho AB. Também ai é onde ocorre a máxima tensão cisalhante, na borda da seção, em $r = d/2 = 20$ mm. De (7.28),

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \times 1,8 \cdot 10^5}{\pi 40^3} = 14,32 \text{ MPa}.$$

O coeficiente de segurança quanto a tensão é: $n = \sigma_E / 2\tau_{\max} = 150/(2 \times 14,32) = 5,24$.

Etapa 5 - Ângulo de torção em B. De (7.39), o ângulo de torção de B em relação a A é

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{L_1 M_x^{AB}}{GJ},$$

onde sabe-se que $\varphi_A = 0$ e de (7.25), $J = \pi d^4/32 = \pi 40^4/32 = 2,51 \cdot 10^5$ mm^4. Logo,

$$\varphi_B = \frac{400 \times 1,8 \cdot 10^5}{79,6 \cdot 10^3 \times 2,51 \cdot 10^5} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (\text{ou, } \varphi_B = 0,206^o).$$

O coeficiente de segurança quanto à rotação é $n = \varphi_{adm}/\varphi_B = 0,3^o/0,206^o = 1,45$.

7.7 Exemplos adicionais

Exemplo 7.8 – Torção em barra de seção variável.

Considere a barra tronco-cônica da Figura 7.29a, de aço, suportando o torque T na extremidade. Determine uma expressão para o ângulo torção em termos de T, G, L, r_o e r_1.

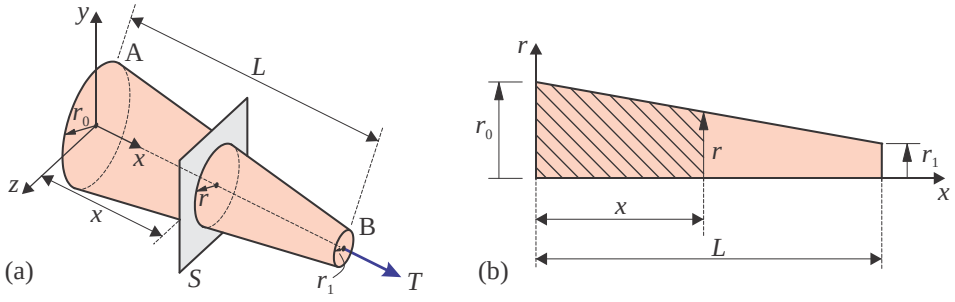


Figura 7.29: Barra de seção variável do Exemplo 7.8.

Solução:

Usaremos diretamente a expressão (7.38), onde apenas o momento polar de inércia é dependente de x. Então, a primeira tarefa consiste em determinar a função $J = J(x)$. Como a seção é maciça, (7.25) produz J, bastando determinar a expressão para o diâmetro, $d = d(x)$. A Figura 7.29b mostra a variação do raio r com x, para um segmento tomado desde o engaste até uma seção genérica de coordenadas x. Como a geratriz do tronco-cone é reta, a equação para o raio em termos de x é a equação de uma reta:

$$r(x) = r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L}\right) x. \tag{7.48}$$

De (7.25), $J = \pi r^4/2$, logo

$$\boxed{J(x) = \frac{\pi}{2}\left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L}\right) x\right]^4} \tag{7.49}$$

que é a expressão para o momento polar de inércia de uma seção x de um tronco-cone de raios r_o e r_1 e comprimento L.

Aplicando (7.38) obtemos

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_{x=0}^{L} \frac{T}{G \cdot \frac{\pi}{2}\left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L}\right) x\right]^4} dx,$$

onde $\varphi_A = 0$. A integração pode ser realizada, resultando

$$\varphi_B = \frac{2T}{\pi G} \frac{1}{3\left(\frac{r_o - r_1}{L}\right)\left[r_o - \left(\frac{r_o - r_1}{L}\right)x\right]^3}\Bigg|_{x=0}^{L}.$$

Simplificando temos

$$\boxed{\varphi_B = \frac{2TL}{3\pi G}\left[\frac{r_1^2 + r_o r_1 + r_o^2}{r_o^3 r_1^3}\right]} \tag{7.50}$$

Exemplo 7.9 – Perfuratriz - barra sob torque distribuído

Considere o tubo de aço AB usado numa perfuratriz, mostrado na Figura 7.30a, com raios interno/externo r_i/r_e e comprimento L. Durante a perfuração o atrito com o solo provoca um torque distribuído, que pode-se admitir variando linearmente como ilustrado, variando desde zero até t_o [Newton·metro/metro]. Adicionalmente, a broca encontra resistência torcional T_B. (a) Determine o torque necessário T_A a ser aplicado no topo; (b) O ângulo de torção relativo entre as extremidades.

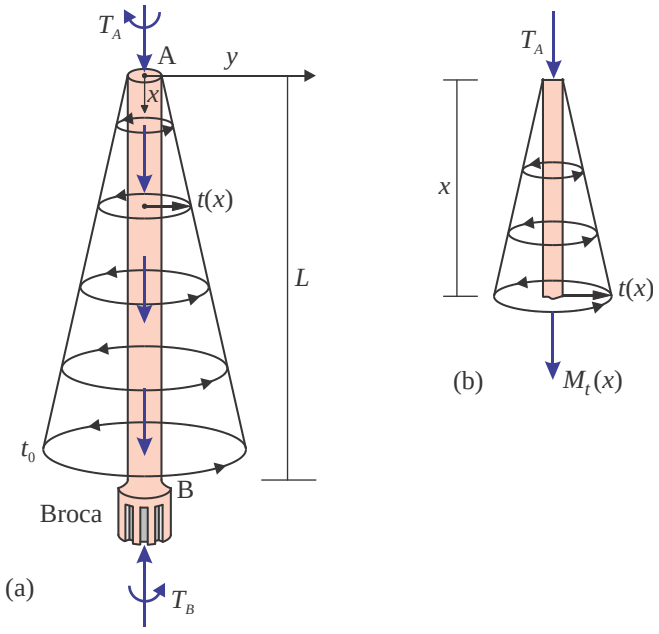


Figura 7.30: Tubo do Exemplo 7.9.

Solução:

Etapa 1 - Equação para o torque distribuído, que varia linearmente. Por semelhança de triângulos, ilustrados na Figura 7.30, tem-se o torque por unidade de comprimento numa seção arbitrária x:

$$t(x) = \frac{t_o}{L}x \quad [\text{Nm/m}]. \tag{7.51}$$

Etapa 2 - Torque aplicado T_A, que deve ser determinado de forma a satisfazer o equilíbrio torcional global:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_A = T_B + \int_{\overline{x}=0}^{L} t(\overline{x})\, d\overline{x}.$$

O último termo vem do fato de que $t(x)$ é um torque por unidade de comprimento de tubo, tal que

$t(x)dx$ é um elemento diferencial de torque aplicado. Integrando, tem-se o torque total aplicado, tal que

$$\boxed{T_A = T_B + \frac{t_o L}{2}} \tag{7.52}$$

Etapa 3 - Esforços. Usamos o método das seções, realizando um corte numa seção de coordenadas x e montando um diagrama de corpo livre como na Figura 7.30(b). A equação de equilíbrio torcional é:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_t(x) + T_A = \int_{\overline{x}=0}^{x} t(\overline{x})\, dx.$$

Tomando $t(x)$ de (7.51) e realizando a integração temos

$$M_t(x) = -T_A + \frac{t_o x^2}{2L}, \tag{7.53}$$

que, eliminando T_A com o uso de (7.52), resulta em

$$M_t(x) = \frac{t_o}{2L}\left(x^2 - L^2\right) - T_B. \tag{7.54}$$

Etapa 4 - Ângulo de torção, que é obtido integrando (7.38)

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \int_{\overline{x}=0}^{L} \frac{M_t(\overline{x})dx}{GJ} = \frac{1}{GJ}\int_{\overline{x}=0}^{L}\left[\frac{t_o}{2L}\left(x^2 - L^2\right) - T_B\right]dx,$$

onde $J = \pi(r_e^4 - r_i^4)/2$. Integrando e simplificando obtemos

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{L}{3GJ}(3T_B + t_o L)} \tag{7.55}$$

Exemplo 7.10 – Transmissão entre eixos

Um motor de 10 hp e 1.800 rpm aciona uma bomba hidráulica através de um redutor de velocidade constituindo por apenas um par de engrenagens, B e C como na Figura 7.31, com diâmetros $D_B = 100$ mm e $D_C = 250$ mm. Determine: (a) Os esforços nos eixos AB e BC; (b) a tensão torcional máxima; (c) o ângulo torcional entre a seção D e A. Os eixos são de aço carbono, com diâmetros $d_1 = 15$ mm e $d_2 = 22$ mm, comprimentos $L_1 = 1$ m e $L_2 = 2$ m e $G = 80$ GPa.

Solução:

Para simplificar os cálculos convertemos os dados do motor para o sistema internacional de unidades. Assim de (7.8) a potência é $P = (745,7\text{ W/hp})\times 10\text{ hp}$=7.457 W, e a rotação do eixo AB é $w_{AB} = 1.800\text{ rpm} \times (2\pi/60\text{s}) = 188,5\text{ rad/s}$. O torque do motor vem de (7.2):

$$\text{Torque no motor } T_{AB} = \frac{P}{w_{AB}} = \frac{7.457\text{ Nm/s}}{188,5\text{ rad/s}} = 39,6\text{ Nm}.$$

No eixo CD a potência transmitida é a mesma de AB (devido à conservação de energia), porém o torque e a velocidade de rotação são diferentes, alterados pelo par de engrenagens. Isso pode ser visto com a ajuda da Figura 7.32. Na figura (a), o segmento de contato ds por segundo é o mesmo para as duas engrenagens. Assim, as velocidades tangenciais são idênticas. Assim, pode-se representar essa velocidade para cada engrenagem, em termos de suas velocidades de rotação e diâmetros:

$$V_{\text{tangencial}} = \frac{D_B}{2}w_{AB} = \frac{D_C}{2}w_{CD} \quad \rightarrow \quad \boxed{w_{CD} = \frac{D_B}{D_C}w_{AB}} \tag{7.56}$$

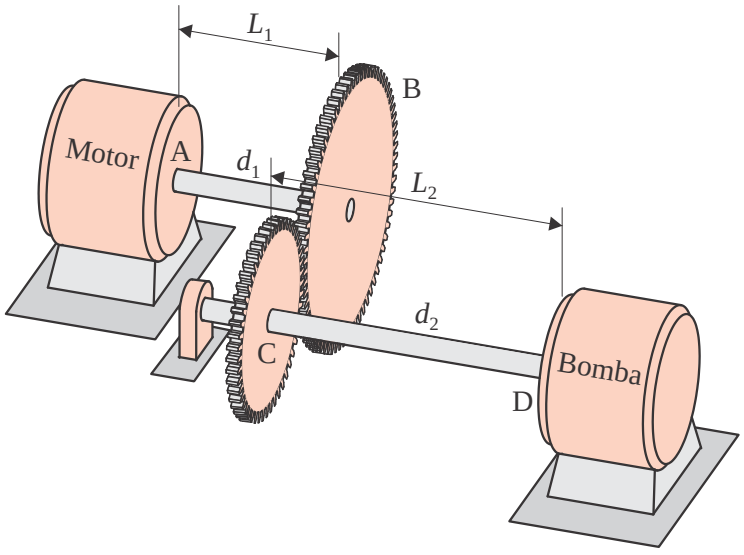


Figura 7.31: Transmissão do Exemplo 7.10.

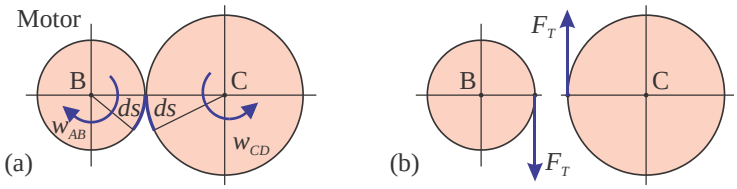


Figura 7.32: Segmento de contato *ds* e forças tangenciais num par engrenado.

Então, **a relação entre as velocidades tangenciais num par engrenado é dada pela inversa da relação entre os diâmetros**.

Da Figura 7.32b observa-se que, pela lei da ação e reação, as forças tangenciais que atuam no par de engrenagens são idênticas. Então, pode-se representar essa força em cada engrenagem, em termos de seus torques e diâmetros:

$$F_t = \frac{T_{AB}}{D_B/2} = \frac{T_{CD}}{D_C/2} \quad \rightarrow \quad \boxed{T_{AB} = \frac{D_B}{D_C} T_{CD}} \tag{7.57}$$

Então, **a relação entre os torques num par engrenado é dada pela relação direta entre os diâmetros**.

Substituindo os valores do problema obtém-se que a velocidade do eixo CD é $w_{CD} = (100\text{ mm}) \times (188{,}5\text{ rad/s})/250\text{ mm}$, $w_{CD} = 75{,}4\text{ rad/s}$. Com isso o torque transmitido no eixo CD pode ser obtido de (7.2):

$$T_{CD} = \frac{P}{w_{CD}} = \frac{7.457\text{ Nm/s}}{75,4\text{ rad/s}} = 98,9\text{ Nm}.$$

Os esforços são obtidos pelo método das seções, e são: $M_t^{AB} = T_{AB} = 39,6$ Nm e $M_t^{CD} = T_{CD} = 98,9$ Nm, em seções nos eixos AB e CD respectivamente.

A tensão torcional em cada eixo é:

$$\tau_{BA} = \frac{16M_t^{AB}}{\pi d_1^3} = \frac{16 \times 39,6}{\pi 0,015^3} = 59,8 \text{ MPa},$$
$$\tau_{DC} = \frac{16M_t^{CD}}{\pi d_2^3} = \frac{16 \times 98,9}{\pi 0,020^3} = 47,3 \text{ MPa}.$$

Logo, a tensão máxima ocorre nas seções do eixo AB, embora o esforço torcional **não** seja máximo nesse eixo. O esforço é máximo no eixo CD, porém a tensão ali não é máxima pois ele tem maior robustez.
O **ângulo de torção** em cada eixo é obtido aplicando (7.41):

$$\varphi_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{M_t^{AB} L_1}{GJ_1} = \frac{39,6 \text{ Nm} \times 1 \text{ m}}{80 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \times 4,97 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4} = 0,10,$$
$$\varphi_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \frac{M_t^{CD} L_2}{GJ_2} = \frac{98,9 \text{ Nm} \times 2 \text{ m}}{80 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \times 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} = 0,1075.$$

(Os momentos polar de inércia em cada eixo usados foram: $J_1 = \pi d_1^4/32 = \pi \times 0,015^4/32 = 4{,}97{\cdot}10^{-9}$ m^4 e $J_2 = \pi d_2^4/32 = \pi \times 0,022^4/32 = 2{,}3{\cdot}10^{-8}$ m^4.)

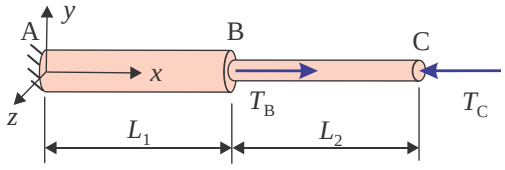
O cálculo do ângulo relativo entre D e A deve ser feito de forma cuidadosa, levando em conta dois fatos: (a) a rotação de corpo rígido dos eixos é oposta entre eles (um gira "horário" e o outro "anti-horário"), porém o sentido de rotação da deformação torcional é o mesmo; (b) como as engrenagens tem diferentes diâmetros, elas geram um fator de transmissão que altera o ângulo de rotação. Assim, o ângulo de deformação torcional φ_{DA} é dado por

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC}\frac{D_B}{D_C} + \varphi_{BA} = 0,10\frac{100 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} + 0,1075 = 0,1475 \text{ rad} \qquad (8{,}45^\circ).$$

onde D_B e D_C são os diâmetros das engrenagens. Observe que esse é um ângulo excessivo, e um redimensionamento da transmissão deve ser efetuado.

7.8 Exercícios

7.1 Uma barra escalonada tubular como na figura, é constituído por um trecho AB de alumínio e um trecho BC de latão. Ela é engastada em A e suporta dois torques concentrados, $T_B = 500$ kNmm e $T_C = 300$ kNmm nas seções B e C respectivamente. Os dados para o trecho AB são: diâmetros interno e externo $d_1 = 25$ mm e $D_1 = 50$ mm, comprimento $L_1 = 400$ mm, módulo de elasticidade cisalhante e tensão de início de escoamento $G_1 = 26,2$ GPa, $\sigma_{E1} = 180$ MPa. Para o trecho BC, $d_2 = 12$ mm e $D_2 = 25$ mm, $L_2 = 250$ mm, $G_2 = 40$ GPa, $\sigma_{E2} = 70$ MPa. Determine (a) os esforços e a máxima tensão cisalhante; (b) a rotação relativa da seção B em relação a A e de C em relação a B e a rotação absoluta de C; (c) o coeficiente de segurança em relação ao início do escoamento, usando os critérios de Tresca e de von Mises.



7.2 Resolva o Exercício 7.1 para o caso em que os trechos AB e BC sejam de alumínio e aço, respectivamente, com as propriedades $G_1 = 26,2$ GPa, $\sigma_{E1} = 180$ MPa, $G_2 = 80$ GPa, $\sigma_{E2} = 270$ MPa.

7.3 Resolva o Exercício 7.1 para o caso em que $d_2 = 12$ mm e $D_2 = 35$ mm.

7.4 Para os dados do Exercício 7.1, determine o diâmetro d necessário para o trecho BC se este fosse maciço. (a) Use o critério de Tresca com coeficiente de segurança $n = 1,2$. (b) Determine o coeficiente de segurança pelo critério de von Mises com o

diâmetro obtido no item (a).

7.5 No Exemplo 7.2, determine os ângulos de torção da seção A em relação a 0, e da seção C em relação a A. Os comprimentos dos trechos AB e BC são $L_{AB} = 200$ mm e $L_{BC} = 300$ mm, e o material tem $G = 80$ GPa. Determine o coeficiente de segurança se a tensão de escoamento $\sigma_E = 600$ MPa e o ângulo admissível de torção é $\varphi_{adm} = 2°$.

7.6 Resolva o Exercício 5, considerando que os diâmetros nos trechos são: $d_{AB} = 20$ mm e $d_{BC} = 30$ mm.

7.7 Resolva o Exercício 5, considerando que os trechos AB e BC são tubulares, com diâmetros interno e externos: $d_{AB} = 10$ mm, $D_{AB} = 20$ mm, $d_{BC} = 15$ mm e $D_{BC} = 30$ mm.

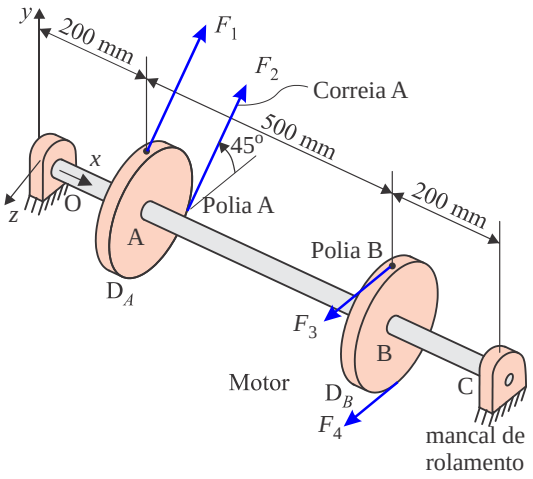
7.8 Considere o eixo OC mostrado na Figura, de seção transversal circular e uniforme, que suporta duas polias, A e B. O eixo é montado em mancais de rolamento nas extremidades O e C e gira a $N_w = 1.200$ rpm. Seu material é aço-carbono, com módulo de elasticidade cisalhante $G = 80$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. A força de tração no lado frouxo da correia A é tomado como 15% da força de tração do lado distendido, i.e., $F_1 = 0,15F_2$. Um motor é acoplado à polia B, e sabe-se que as trações na correia são $F_3 = 45$ N e $F_4 = 300$ N, como indicado na figura. Ambos os lados da correia na polia B são paralelas ao eixo z e a correia em A faz um ângulo de 45^o com z. Os diâmetros das polias são $D_A = 250$ mm e $D_B = 300$ mm.

(a) Determine a potência suprida pelo motor;

(b) Determine as trações na correia da polia A e os esforços de torção no eixo.

(c) Determine a tensão cisalhante máxima de torção no eixo, e o ângulo de torção da seção B em relação a A, se o diâmetro do eixo for $d = 12$ mm.

(d) Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento pelo critério de Tresca e o coeficiente de segurança quanto a rigidez, para um ângulo admissível de torção é $\varphi_{adm} = 2°$.



7.9 Repita o Exercício 8 para uma seção tubular de diâmetros interno e externo $d = 10$ mm e $D = 17$ mm.

7.10 Repita o Exercício 9 para o caso em que a rotação do eixo seja $N_w = 1.800$ rpm.

7.11 Considere o eixo do Exercício 8, com seção tubular de diâmetros interno e externo $d = 10$ mm e $D = 17$ mm, e esforço de torção no trecho AB $M_x = 40$ Nm. de aço, com $G = 80$ GPa e $\sigma_E = 350$ MPa.

(a) Determine a tensão cisalhante máxima de torção no eixo, e o ângulo de torção da seção B em relação a A, se o diâmetro do eixo for $d = 12$ mm.

(b) Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento pelo critério de Tresca e o coeficiente de segurança quanto a rigidez, para um ângulo admissível de torção é $\varphi_{adm} = 2°$.

7.12 No Exemplo 11, qual a rigidez torcional do eixo no trecho AB?

7.13 No Exemplo 11, qual o diâmetro d de um eixo maciço para que a rigidez torcional no trecho AB seja $k_t = 1,155 \cdot 10^6$ Nm/rad?

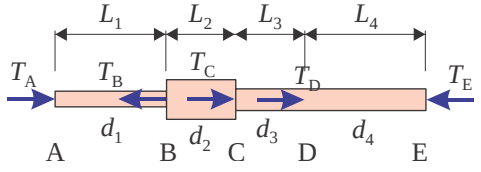
7.14 No Exemplo 11, quais os diâmetros interno d e externo D de um eixo para que a rigidez torcional no trecho AB seja $k_t = 1,155 \cdot 10^6$ Nmm/rad? Identifique os diâmetros tal que guardem a proporção $d = cD$, com $c = 0,6$. Qual a relação entre as áreas de seção transversal dos Exercícios 13 e 14, entre as seções maciça e tubular para suportar o mesmo torque?

7.15 No Exemplo 11, quais os diâmetros interno d e externo D de um eixo para que a rigidez torcional no trecho AB seja o dobro daquela do Exercício 14, i.e., $k_t = 2,31 \cdot 10^6$ Nmm/rad? Identifique os diâmetros tal que guardem a proporção $d = cD$, com $c = 0,6$. Qual a relação entre as áreas de seção transversal entre os casos do Exercícios 14 e 15, para suportar o dobro de torque?

7.16 Considere um eixo de seção maciça submetida a um esforço de torção uniforme $M_x = 40$ Nm num trecho de comprimento $L = 500$ mm. O eixo é de aço, com $G = 80$ GPa. Considere a tensão de início de escoamento $\sigma_E = 350$ MPa e um ângulo admissível de torção $\varphi_{adm} = 2°$. Determine o diâmetro d necessário para satisfazer os critérios de Tresca e de rigidez, para um coeficiente de segurança $n = 1,3$.

7.17 Refaça o Exercício 16 para comprimento $L = 170$ mm.

7.18 O eixo escalonado é de aço, com seção maciça, tem quatro trechos como na figura, com os seguintes valores de diâmetros: $d_1 = 20$ mm, $d_2 = 100$ mm, $d_3 = 70$ mm, $d_4 = 30$ mm. São aplicados torques concentrados $T_A = 50$ Nm, $T_B = 950$ Nm, $T_C = 300$ Nm, $T_D = 700$ Nm, $T_E = 100$ Nm nas seções A a E, respectivamente. Ignore o efeito de concentração de tensão nas transições entre os diâmetros. $G = 80$ GPa. Determine a tensão cisalhante **nominal** máxima de torção e identifique onde ocorre.



7.19 Refaça o Exercício 7.18 para $d_2 = 60$ mm, $d_3 = 50$ mm, $d_4 = 20$ mm.

7.20 Refaça o Exercício 7.18 para o caso em que o eixo seja tubular nos trechos BC e CD, com os diâmetros internos $d_2 = 60$ mm, $d_3 = 40$ mm e externos $D_2 = 90$ mm, $D_3 = 60$ mm.

7.21 Refaça o Exercício 7.18 para o caso em que o eixo seja tubular nos trechos BC e CD, com os diâmetros internos $d_2 = 50$ mm, $d_3 = 30$ mm e externos $D_2 = 70$ mm, $D_3 = 40$ mm.

7.22 Refaça o Exemplo 7.5.1, considerando o efeito de concentração de tensões, para um raio de concordância $r = 3$ mm.

7.23 Para o eixo do Exercício 7.18, determine a tensão cisalhante máxima considerando o efeito de concentração de tensões, para um raio de concordância $r = 3$ mm. Indique a seção onde ocorre e obtenha o coeficiente de segurança para início de escoamento, para $\sigma_E = 200$ MPa.

7.24 Refaça o Exercício 7.23 para um raio de concordância $r = 3$ mm.

7.25 Considere os dados do eixo do Exercício 7.19, com $d_2 = 60$ mm, $d_3 = 50$ mm, $d_4 = 20$ mm. Determine a tensão cisalhante máxima considerando o efeito de concentração de tensões, para um raio de concordância $r = 1,5$ mm. Indique a seção onde ocorre e obtenha o coeficiente de segurança para início de escoamento, para $\sigma_E = 200$ MPa.

7.26 Refaça o Exercício 7.25 para um raio de concordância $r = 3$ mm.

7.27 Considere os dados do eixo do Exercício 7.20, de eixo seja tubular nos trechos BC e CD, com os diâmetros internos $d_2 = 60$ mm, $d_3 = 40$ mm e externos $D_2 = 90$ mm, $D_3 = 60$ mm e os demais dados do Exercício 7.18. Determine a tensão cisalhante máxima considerando o efeito de concentração de tensões, para um raio de concordância $r = 1,5$ mm. Indique a seção onde ocorre e obtenha o coeficiente de segurança para início de escoamento, para $\sigma_E = 200$ MPa. Observe que não temos disponíveis curvas de K_t para seções tubulares. Assim, use os valores de seção maciça como aproximação.

7.28 Refaça o Exercício 7.27 para um raio de concordância $r = 3$ mm.

7.29 Dado um eixo de seção uniforme maciça, de diâmetro $d_o = 30$ mm. Determine o maior diâmetro interno possível, d, para um outro eixo de seção tubular, de mesmo material elástico linear, que tenha a mesma

tensão cisalhante máxima que o maciço. O diâmetro externo é limitado a $D = 50$ mm.

7.30 Repita o Exercício 7.29 para o diâmetro externo limitado a $D = 40$ mm.

7.31 Para o Exercício 7.29 com $d_o = 30$ mm, determine os diâmetros interno e externo se eles devem guardar a relação $d = cD$, para $c = 0,6$. Determine a área da seção.

7.32 Repita o Exercício 7.31 com $c = 0,4$.

7.33 Repita o Exercício 7.31 com $c = 0,8$.

7.34 Dado um eixo de seção uniforme maciça, de diâmetro $d_o = 30$ mm. Determine o maior diâmetro interno possível, d, para um outro eixo de seção tubular, de mesmo material elástico linear, que tenha a mesma constante de mola que o maciço e mesmo material e comprimento. O diâmetro externo é limitado a $D = 50$ mm.

7.35 Repita o Exercício 7.34 para o diâmetro externo limitado a $D = 40$ mm.

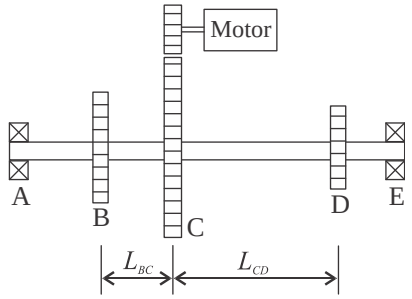
7.36 Para o Exercício 7.34 com $d_o = 30$ mm, determine os diâmetros interno e externo se eles devem guardar a relação $d = cD$, para $c = 0,6$.

7.37 Repita o Exercício 7.36 com $c = 0,4$.

7.38 Repita o Exercício 7.36 com $c = 0,8$.

7.39 Determine uma expressão analítica para a área de seção transversal do tubo que possua a mesma constante de mola que uma barra maciça de diâmetro d_o, sendo ambos os eixos de mesmo comprimento e material. Os diâmetros interno e externo do tubo devem guardar a relação $d = cD$.

7.40 Conforme a figura, um motor fornece potência a um eixo AE através de uma engrenagem C. O eixo AE gira a 900 rpm. O equipamento acoplado à engrenagem B consome 30 hp e a D consome 90 hp. Determine o diâmetro d necessário para o eixo AE, de seção maciça uniforme, para uma tensão cisalhante admissível nominal $\tau_{adm} = 45$ MPa. Calcule a velocidade de rotação e os torques aplicados em cada engrenagem do eixo AE.



7.41 Refaça o Exercício 7.40 para o eixo AE girando a 1.800 rpm.

7.42 Refaça o Exercício 7.40 para um eixo escalonado, determinando os melhores diâmetros d_{AC} e d_{CE} nos trechos AC e CE. Use tensões nominais (ignorando a concentração de tensões na seção C).

7.43 Refaça o Exercício 7.41 para o eixo AE girando a 1.800 rpm.

7.44 Considere um arame de aço de diâmetro $d = 3$ mm. Qual deveria ser seu comprimento L tal que uma extremidade possa ser rotacionada em uma volta em relação à outra, sem que a tensão cisalhante exceda $\tau_{adm} = 80$ MPa. Use $G = 80$ GPa.

7.45 Refaça o Exercício 7.44 para um arame de alumínio, com $\tau_{adm} = 40$ MPa. Use $G = 28$ GPa.

7.46 No Exercício 7.40, Determine o ângulo de rotação da seção E em relação a A. Os comprimentos dos trechos BC e CD são $L_{BC} = 100$ mm e $d_{CE} = 600$ mm. Use $G = 80$ GPa.

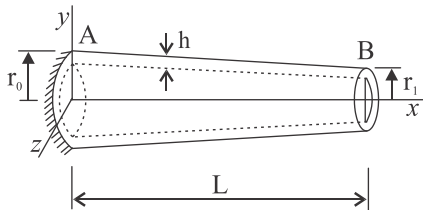
7.47 Considere uma mola torcional de aço é constituída por uma barra tubular de comprimento $L = 150$ mm. Determine os diâmetros interno d e externo D, que gere uma rigidez torcional $k_t = 2.200$ Nmm/grau, e d e D sejam relacionados por $d = cD$, com $c = 0,5$. Use $G = 80$ GPa.

7.48 Refaça o Exercício 7.47 para uma barra de alumínio, com $G = 28$ GPa.

7.49 Considere a barra de seção variável do Exemplo 7.8, e Figura 7.29, de aço, com $L = 500$ mm, $r_o = 75$ mm, $r_1 = 25$ mm, torque $T = 3.000$ kNmm, $G = 80$ GPa. (a) Qual

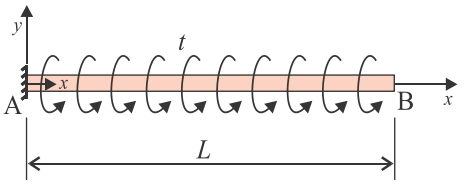
o ângulo de torção da seção B? (b) Qual o valor da constante de mola?

7.50 Considere o eixo de seção tubular tronco-cônica tubular, de espessura uniforme h, sob torque T aplicado na extremidade B conforme a Figura, onde r_o, r_1 são os raios médios da parede nas seções A e B. A espessura h é considerada pequena em relação ao raio das seções. Determine a expressão do ângulo de torção da seção B em termos de r_o, r_1, L, h, T e G.

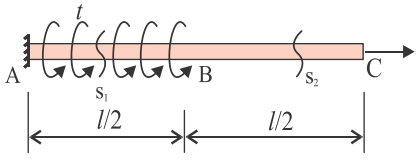


7.51 Resolva o Exercício 50 com os dados do Exercício 49, e $h = 5$ mm. Determine a constante de mola.

7.52 Considere a barra de seção circular uniforme, maciça, submetida a um torque distribuído t [Nm/m]. Determine a expressão para o ângulo de torção φ na extremidade B, em termos de G, t, e L.

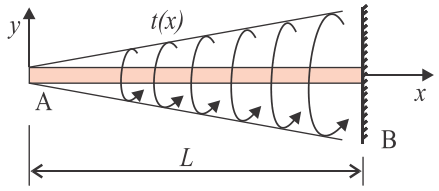


7.53 Considere a barra de seção circular uniforme, maciça, submetida a um torque distribuído t [Nm/m] na metade à esquerda como na figura. Determine (a) o diagrama de esforços de torção, (b) a expressão para a função do ângulo de torção $\varphi(x)$ em cada trecho, e o (c) o ângulo na extremidade C, em termos de G, t, e L.



7.54 Considere o Exercício 7.53, com o eixo de aço, com $L = 500$ mm, $d = 10$ mm, torque $t = 12$ Nmm/mm, $G = 80$ GPa. (a) Qual o ângulo de torção da seção C? (b) Esboce o diagrama $\varphi \times x$ ao longo do eixo. (c) Qual a tensão cisalhante máxima, e onde atua?

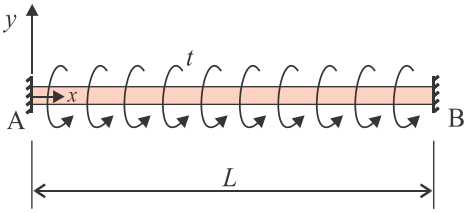
7.55 Considere uma barra de seção circular uniforme, engastada na extremidade B como na figura, submetida a um torque distribuído com variação linear dada por $t(x) = kx$, onde k é uma constante dada. Determine a expressão para o ângulo de torção da seção A em termos de L, k, J e G.



7.56 Considere a barra do Exercício 55, com $L = 500$ mm, $d = 10$ mm, $k = 72 \cdot 10^{-4}$ N/mm, $G = 80$ GPa. (a) Qual o valor do esforço de momento torçor máximo e onde atua? (b) Qual a tensão cisalhante máxima de torção, e onde ela atua? (c) Qual o valor do ângulo de torção na seção A?

Problemas hiperestáticos

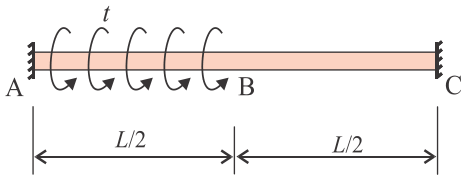
7.57 A barra AB é biengastada e suporta um momento torçor distribuído uniforme t [Nm/m]. (a) Determine as expressões para as reações nos apoios em termos de t, L e G. (b) Determine a função $\varphi(x)$.



7.58 Considere a barra do Exercício 57, com o eixo de aço, com $L = 500$ mm, $d = 10$ mm, torque $t = 12$ Nmm/mm, $G = 80$ GPa. (a) Determine os diagramas do esforço de torção e do ângulo de torção versus x e os máximos em cada gráfico. (b) Qual o valor da tensão cisalhante máxima e onde ocorre?

7.59 A barra AC é biengastada e suporta um momento torçor distribuído uniforme t [Nm/m] no trecho AB. (a) Determine as expressões para as reações nos apoios em

termos de t, L e G. (b) Determine a função $\varphi(x)$. (c) Determine o máximo de φ e onde atua.



7.60 Considere a barra do Exercício 59, com o eixo de aço, com $L = 500$ mm, $d = 10$ mm, torque $t = 12$ Nmm/mm, $G = 80$ GPa. (a) Determine os diagramas do esforço de torção e do ângulo de torção versus x os máximos em cada gráfico, e o ângulo em B. (b) Qual o valor da tensão cisalhante máxima e onde ocorre?

Capítulo 8

Flexão plana em vigas retas

As vigas são possivelmente os elementos estruturais mais utilizados em todos os sistemas de engenharia: pontes de aço ou de concreto, viadutos, passarelas, guindastes e outras máquinas de elevação, redutores de velocidades, enfim, máquinas e mecanismos de qualquer espécie, praticamente todas contam com vigas como elementos estruturais.

Quanto ao aspecto físico, as vigas têm a mesma forma que as barras: são corpos longos e retos[1] com seção transversal aproximadamente constante. O que caracteriza uma viga, e a distingue das barras, é que elas são submetidas a momentos fletores. Na quase totalidade dos casos práticos o campo de momentos fletores é proveniente de cargas transversais aplicadas à viga, que por sua vez geram deslocamentos transversais. Pelas equações de equilíbrio, eqs.(2.43), p. 40, sabemos que cargas transversais geram não apenas momentos fletores, mas também esforços cortantes (exceto em casos bastantes particulares). A teoria que descrevemos nesse capítulo é uma idealização denominada **teoria de flexão pura**, que considera apenas a existência dos momentos fletores, i.e., ignora momentaneamente os efeitos do esforço cortante, que são analisados de forma independente.

8.1 Teoria de flexão de vigas

A teoria vista aqui é baseada em uma série de hipóteses cinemáticas que podem ser razoavelmente visualizadas experimentalmente trabalhando com modelos construídos por materiais flexíveis como borracha ou espuma plástica. A **hipótese fundamental** pode ser entendida pela Figura 8.1. Na figura (a) uma viga é desenhada com linhas retas transversais e com uma linha reta longitudinal que formará uma **superfície de referência**. Sobre esta superfície definimos dois eixos cartesianos, x e z, e na direção transversal definimos o eixo y. (O correto posicionamento dos eixos e da superfície de referência será ainda assunto de detalhamento durante o desenvolvimento da teoria). Se todas as cargas estiverem contidas no mesmo plano, por exemplo o plano xy, então os momentos fletores estarão todos na direção z e teremos o chamado problema de **flexão plana**. Nesse caso a configuração deformada da viga é toda contida no plano xy.
A **hipótese fundamental da teoria de flexão pura** diz o seguinte:

> "Seções inicialmente planas e perpendiculares à superfície de referência de uma viga permanecem planas e perpendiculares à superfície de referência flexionada da viga".

Como ilustrado na Figura 8.1b, cada seção plana permanece plana com a flexão, apenas sofre uma **rotação de corpo rígido**. Além disso, a rotação é tal que a seção permanece perpendicular à superfície de referência deformada. Devemos observar que temos aqui, de fato, duas hipóteses: a de que as seções permanecem planas e a de que permanecem perpendiculares.

Quando se compara essas hipóteses com soluções exatas da teoria de elasticidade observam-se que essas hipóteses são aproximações da realidade, que são tão **mais acuradas quanto mais longa**

[1] Existem teorias mais abrangentes para vigas curvas, mas inicialmente nos concentraremos em vigas retas.

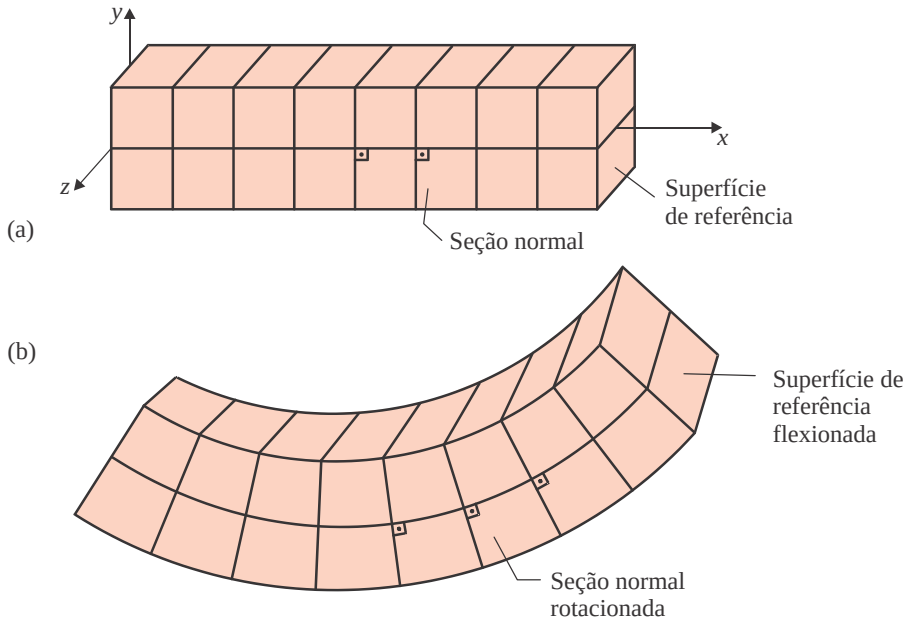


Figura 8.1: Visualização de uma barra sob flexão.

for a viga em relação à sua altura. Isso explica que essa teoria seja conhecida na literatura por diversos nomes como

- Teoria de flexão pura;
- Teoria de flexão de vigas longas;
- Teoria de flexão de vigas delgadas;
- Teoria de flexão de vigas de Euler-Bernoulli.

Empiricamente, a viga é considerada longa (ou delgada), se a relação comprimento/altura da seção for superior a, por exemplo, 20, i.e.,

$$\frac{L}{h} \gtrsim 20 \tag{8.1}$$

O nome de teoria "de flexão pura" deve-se ao fato de que a hipótese fundamental se realiza perfeitamente no caso de ausência de esforço cortante, i.e., quando se tem momento fletor puro. Note que, das equações diferenciais de equilíbrio temos que o cortante $V_y(x)$ é $V_y(x) = -dM_z/dx$. Então, $V_y(x)$ é nulo apenas se $M_z(x)$ for constante.

Além da hipótese fundamental temos algumas hipóteses adicionais:

- **Hipótese 1** - O coeficiente de Poisson é considerado nulo, o que implica que não há deformações na direção z proveniente do efeito de Poisson, i.e., $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto (x, y, z) da viga.
- **Hipótese 2** - Os segmentos normais à superfície de referência permanecem inextensíveis, i.e., $\varepsilon_y = 0$ em qualquer ponto (x, y, z) da viga. Também aqui temos uma consequência da hipótese de coeficiente de Poisson nulo.

Como será visto ao final da dedução, essas hipóteses implicam que o estado de tensões na viga é considerado uniaxial, com $\sigma_y = \sigma_z = 0$ em todo ponto.

As hipóteses 1 e 2 podem ser substituídas por um conjunto alternativo de hipóteses, mas realista, de que $\sigma_y = \sigma_z = 0$, porém com o coeficiente de Poisson não nulo. Isso implicará num estado triaxial deformações de deformações, em que $\varepsilon_y \neq 0$ e $\varepsilon_z \neq 0$ são provenientes do efeito de Poisson.

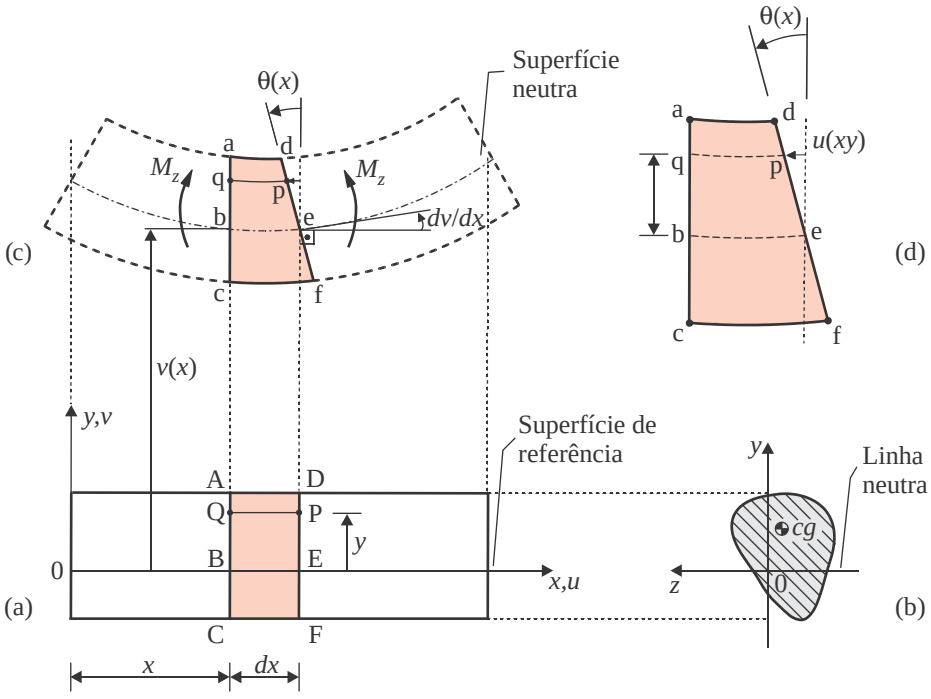


Figura 8.2: Flexão de um segmento de comprimento dx.

As hipóteses da teoria podem ser usadas para construir a formulação com a ajuda da Figura 8.2. Na figura (a) temos um segmento de viga, onde foi identificado um segmento de comprimento Δx definido por duas linhas retas paralelas $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ como indicado. A Figura 8.2c ilustra a configuração deformada do segmento. Pelas hipóteses, os comprimentos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ são idênticos aos comprimentos $\overline{ac}$ e $\overline{df}$. Por outro lado, os comprimentos longitudinais são alterados. Por exemplo, o segmento inferior $\overline{CF}$ alonga-se para $\overline{cf}$ e, na parte superior, $\overline{AD}$ contrai-se para $\overline{ad}$. Então, se o esforço de momento M_z é positivo na seção de coordenada x como ilustrado, os segmentos na parte de baixo da viga serão tracionados e os segmentos em cima serão comprimidos, i.e., sofrerão deformações ε_x positivas e negativas respectivamente. Para que essas deformações ocorram, é necessário que os pontos ao longo da reta $\overline{DF}$ sofram deslocamentos na direção axial. A essas componentes de deslocamento chamaremos de u. De fato, definimos o **campo de deslocamentos** $u = u(x, y)$ como a componente de deslocamentos de um ponto na coordenada (x, y) do corpo, na direção x. Então $u > 0$ para pontos na parte de baixo da viga e $u < 0$ em pontos em cima.

Uma das consequências imediatas da observação de que os segmentos longitudinais sofrem tração ou compressão é a de que deve existir, em algum lugar entre o topo e a base da seção da viga, um plano longitudinal onde os segmentos sofrem deformação nula. Esse plano é denominado **superfície neutra** da viga. A intersecção da superfície neutra em cada seção transversal gera a **linha neutra**, como indicado na Figura 8.2b.

Observe que, nesse momento, a posição da superfície neutra é desconhecida. Entretanto, a dedução é iniciada posicionando os eixos $x - z$ do sistema de coordenados sobre essa superfície neutra, e o eixo y perpendicular àqueles, como indicado na Figura 8.2a. As forças externas aplicadas são contidas no plano xy e o momento fletor é na direção z.

Como efeito do momento M_z, cada seção x sofre um deslocamento transversal v na direção y. Como resultado das hipóteses 1 e 2, v independe de y e de z, i.e., $v = v(x)$ apenas. Entretanto, além da translação $v(x)$, cada seção sofre também uma rotação de corpo rígido. Quando consideramos um ponto genérico P de cota y, este sofre, além de v, um deslocamento u na direção x, como consequência da rotação θ da seção. Essa componente de deslocamento é que provocará a deformação do segmento $\overline{PQ}$.

Como a seção permanece reta, a variação de u com y é linear, i.e., $u(x, y) = a(x)y$, onde $a(x)$ é uma função ainda desconhecida. Entretanto, para pequenos deslocamentos e rotações, **o**

coeficiente angular da reta é aproximadamente igual ao próprio ângulo $\theta(x)$, como visto nas Figuras 8.2c e (d). Assim,

$$u(x,y) = -\theta(x)\ y. \tag{8.2}$$

Entretanto, pela hipótese fundamental, a seção permanece perpendicular à superfície de referência deformada. Assim, o ângulo de rotação da seção, θ, é igual à rotação sofrida pela superfície de referência, dv/dx. Assim, (8.2) fica

$$u(x,y) = -\frac{dv(x)}{dx}y. \tag{8.3}$$

O sinal pode ser entendido notando que se $dv/dx > 0$ (a viga "sobe" a partir da seção x, como na Figura 8.2) e $y > 0$, (ponto se encontra na parte superior da seção) devemos ter $u < 0$, como visto nas Figuras 8.2c e (d).

As hipóteses implicam também que $w(x,y,z) = 0$ em todo ponto da viga. Assim, podemos passar à dedução das componentes do tensor deformação. Como $v = v(x)$ e $w = 0$, das 6 relações deformação-deslocamento lineares (4.12), as únicas componentes dignas de nota são:

$$\varepsilon_x(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -\underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa(x)}y \qquad \text{e} \qquad \gamma_{xy}(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0, \tag{8.4}$$

sendo as demais componentes nulas. Então, apenas uma componente de deformação é não nula na flexão pura: $\varepsilon_x \neq 0$. A função $\kappa(x)$ é provado ser uma aproximação da curvatura sofrida pela viga em sua configuração flexionada. É uma função apenas de x, i.e., é definida para cada seção transversal. A aproximação da curvatura se relaciona ao deslocamento transversal por

$$\boxed{\kappa(x) = \frac{d^2v}{dx^2}} \tag{8.5}$$

de forma que numa seção x, a deformação varia linearmente em y na forma

$$\boxed{\varepsilon_x(x,y) = -\kappa(x)y} \tag{8.6}$$

Notamos que, numa dada seção, de coordenada $x = c = const$, o termo $\kappa = d^2v/dx^2$ é constante em y (pois depende apenas de x). Logo, as deformações variam linearmente ao longo de uma seção, sendo zero na origem, $y = 0$, i.e., na linha neutra.

Nesse ponto incluímos uma hipótese adicional à teoria:

- **Hipótese 3** - O material tem comportamento **elástico-linear**, i.e., segue a **lei de Hooke**.

Como a única deformação não nula é ε_x, a lei de Hooke reduz-se ao estado uniaxial de tensões, $\sigma_x = E\varepsilon_x$. Logo,

$$\sigma_x(x,y) = -E\kappa(x)y. \tag{8.7}$$

Isto significa que numa dada seção as tensões também variam linearmente, sendo nulas na superfície neutra. Essa informação permite-nos determinar todas as incógnitas do problema, como veremos a seguir.

Da Figura 8.2a tomemos apenas a fatia de comprimento diferencial dx e montamos o diagrama de corpo livre como na Figura 8.3a, indicando o esforço M_z e a distribuição linear de tensões σ_x. De fato, o que atua no material, em ambos os lados do elemento, são as tensões. Entretanto buscaremos aqui a relação entre as tensões e o momento, uma vez que o valor de M_z é considerado previamente determinado na seção.

As forças no elemento diferencial da Figura 8.3 devem satisfazer às seis **equações de equilíbrio** de um corpo. Entretanto, algumas das equações são trivialmente satisfeitas:

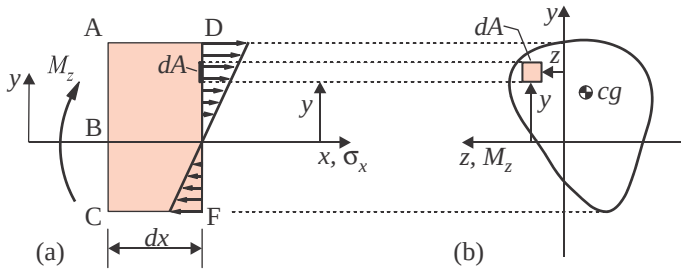


Figura 8.3: Distribuição linear de tensões na seção.

$$\Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad \text{e} \qquad \Sigma M_x = 0 \tag{8.8}$$

As demais equações devem ser testadas uma a uma.

8.2 Fórmula de Flexão

8.2.1 Equilíbrio de forças em x e a linha neutra

A primeira equação de equilíbrio é $\Sigma F_x = 0$. Como no elemento diferencial de área dA na seção, Figura 8.3, atua a tensão σ_x, a força total na seção é $\int_A \sigma_x \, dA$. Como não há mais forças axiais aplicadas devemos ter

$$\int_A \sigma_x \, dA = 0.$$

Tomando σ_x de (8.7),

$$-E\kappa(x) \int_A y \, dA = 0.$$

Como $E \neq 0$ e $d^2v/dx^2 \neq 0$, o equilíbrio requer que $\int_A y \, dA = 0$. Porém, sabe-se que $\int_A y \, dA = Q_z$ é o **momento estático de inércia da seção**, e tem a propriedade de que

$$\boxed{Q_z \equiv \int_A y \, dA = \overline{Y} A} \tag{8.9}$$

onde $\overline{Y}$ é a coordenada do centroide da seção a partir do eixo z e A é a área da seção. Com isso conclui-se o seguinte:

> Para satisfazer o equilíbrio de forças precisamos ter $\overline{Y} = 0$ (já que $A \neq 0$), i.e., a origem do eixo y deve estar no centroide da seção. Como tínhamos posicionado a origem de y na linha neutra, agora sabemos que esta passa pelo centroide da seção.

A aplicação da primeira equação de equilíbrio nos diz que sempre a linha neutra passa pelo centroide da seção nos casos de flexão plana. Veremos ao longo do capítulo o caso mais geral, em que a flexão ocorre junto à tração na barra, o que gera uma translação da linha neutra para fora do centroide da seção.

8.2.2 Momentos em z e fórmula de flexão

A segunda equação de equilíbrio é $\Sigma M_z = 0$. A força que atua em dA na Figura 8.3b é $\sigma_x dA$, e o momento em relação ao eixo z é $y(\sigma_x dA)$. Assim, a condição de equilíbrio do corpo é dada por

$$M_z + \int_A y \, \sigma_x \, dA = 0.$$

Usando (8.7) para σ_x,

$$M_z - E\kappa(x)\underbrace{\int y^2\, dA}_{I_{zz}} = 0 \tag{8.10}$$

A integral é conhecida como **segundo momento de inércia da seção em relação ao eixo** z, I_{zz}, i.e.,

$$\boxed{I_{zz} \equiv \int_A y^2\, dA} \tag{8.11}$$

Nas seções seguintes apresentaremos diversos aspectos dessa integral. No momento basta observarmos que I_{zz} é uma quantidade puramente geométrica, determinada completamente pela forma e dimensões de seção transversal e é, portanto, considerada conhecida. Assim, (8.10) fica compactada na forma

$$\boxed{EI_{zz}\kappa(x) = M_z(x)} \tag{8.12}$$

e substituindo em (8.7) temos

$$\boxed{\sigma_x(x.y) = -\frac{M_z(x)}{I_{zz}(x)}y} \tag{8.13}$$

Essa é a chamada **fórmula de flexão**. Em problemas isostáticos, a expressão para $M_z(x)$ é determinada a partir do carregamento pelas equações globais de equilíbrio, e I_{zz} é determinado da geometria da seção transversal. Assim, para uma dada seção x, a distribuição linear de σ_x é determinada.

> Como consequência da linearidade da distribuição de σ_x na seção, segue-se que a tensão é máxima (em módulo) no ponto mais distante da linha neutra, onde $|y|$ é máximo. (8.14)

8.2.3 Coeficiente de segurança e critério de falha

O cálculo do **coeficiente de segurança** n e o **dimensionamento** de uma viga sob flexão pura é feito utilizando um critério de início de escoamento como o de Tresca ou de von Mises. Uma vez que o estado de tensões em qualquer ponto da viga é um estado uniaxial de tensões, ambos os critérios apresentam a mesma expressão para a tensão equivalente, dada por $\sigma_{eq} = \sigma_{\max}$. Então o critério toma uma das formas

$$\underbrace{\sigma_{\max}}_{\text{Solicitação}} = \underbrace{\frac{\sigma_E}{n}}_{\text{Resistência}} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{\max} = \sigma_{adm} \tag{8.15}$$

onde σ_E é a tensão de início de escoamento do material, σ_{adm} é a tensão admissível e $\sigma_{\max}$ é a tensão normal máxima na viga, i.e.,

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|\ \ |y_{\max}|}{I_z} \tag{8.16}$$

Isso equivale a aplicar a teoria da máxima tensão cisalhante (Critério de Tresca, conforme visto no Capítulo 6), num ponto em que o estado de tensões é uniaxial. Esta é a situação de vigas sujeitas apenas a cargas transversais e axiais.

Frequentemente a tensão máxima na seção é expressa na forma

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \qquad \text{onde} \qquad W_z \equiv \frac{I_z}{|y_{\max}|}. \tag{8.17}$$

em lugar de (8.16). W_z é o **módulo de flexão da viga**. Nota-se que é um parâmetro que depende

exclusivamente das características geométricas da seção. Para perfis normalizados, W_z é tabelado, da mesma forma que a área da seção transversal, seus momentos de inércia e a posição do centroide.

8.2.4 Momentos em y e direções principais de inércia

A terceira equação de equilíbrio para o elemento diferencial da Figura 8.3 é $\sum M_y = 0$. Como a força atuando em dA é $(\sigma_x\ dA)$, o momento na direção y é $\int_A z\ \sigma_x\ dA$. Logo, o equilíbrio significa que

$$\int_A z\ \sigma_x\ dA = 0.$$

Tomando σ_x de (8.13),

$$-\frac{M_z}{I_{zz}}\underbrace{\int_A yz\ dA}_{I_{yz}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{I_{yz} = 0} \tag{8.18}$$

A integral é conhecida como **produto de inércia da seção** em relação aos eixos y e z. A consequência é que a teoria de flexão vista não pode ser usada com eixos posicionados e orientados arbitrariamente. Enquanto a equação (8.9) indica que os eixos devem ser **centroidais**, i.e., devem passar pelo centroide da seção, a eq.(8.18) indica, como veremos a seguir, que, entre todos os infinitos pares ortogonais de eixos centroidais, apenas um par em particular pode ser usado, aquele par que satisfaz $I_{yz} = 0$. Esses são os chamados **eixos principais de inércia da seção.**

Seções com um plano de simetria

Provaremos que **todo plano de simetria de uma seção é uma direção principal de inércia**. Dessa forma, trataremos inicialmente de seções que possuem pelo menos um plano de simetria, como seções circulares (que contém infinitos planos de simetria), retangulares, triangulares, perfis em `I`, `T`, canaletas [e cantoneiras ⌞ de abas iguais. Nesses casos, a orientação dos eixos principais da seção é determinada sem a necessidade de nenhum cálculo. Por outro lado, seções como `L` necessitam de um tratamento próprio, como será visto no Capítulo 10, seção 10.5.

8.2.5 Momento estático de inércia e determinação do centroide

Considere uma seção arbitrária como na Figura 8.4, da qual buscamos identificar a posição $\bar{Y}$ do centroide a partir de um eixo Z paralelo, posicionado arbitrariamente. O momento estático da seção em relação a Z é

$$Q_Z = \int_A Y\ dA. \tag{8.19}$$

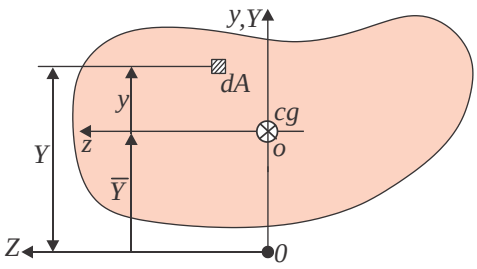


Figura 8.4: Seção arbitrária com eixos arbitrários $OXYZ$ e e centroidais $oxyz$.

onde Y é a coordenada do elemento de área em relação ao eixo Z. Essa posição pode ser representada em termos da coordenada y medida a partir do eixo centroidal y (ainda desconhecido), tal que $Y = y + \bar{Y}$. Então,

$$Q_Z = \underbrace{\int_A y\ dA}_{Q_z} + \bar{Y}\underbrace{\int_A dA}_{A}. \tag{8.20}$$

Q_z é o momento estático da área em relação ao eixo centroidal y. Entretanto, buscamos determinar justamente o $\bar{Y}$ que torna $Q_z = 0$. Então,

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{A}Q_Z = \frac{1}{A}\int_A Y\ dA} \tag{8.21}$$

Uma vez a integral tenha sido calculada, $\bar{Y}$ é facilmente determinado.

Exemplo 8.1 - Centroide de seção semicircular

Considere a seção semicircular mostrada na Figura 8.5a. Determine a posição $\bar{Y}$ do eixo centroidal.

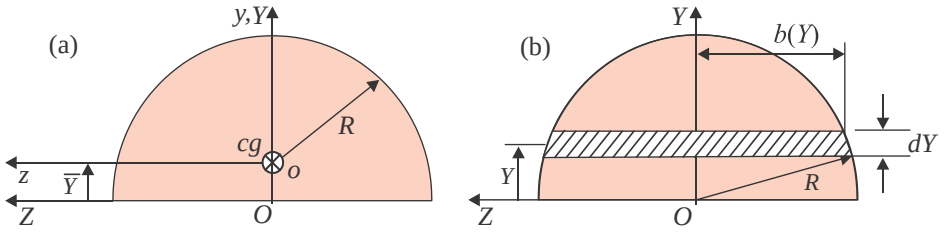


Figura 8.5: (a) seção semicircular, (b) elemento diferencial de área hachurado.

Solução:

Inicialmente obteremos o momento estático (8.21). Para isso, definimos um elemento de área dA com formato adequado, como mostrado na Figura 8.5b, de forma que $dA = 2b(Y)dY$, sendo que a largura b é uma função da cota Y dada por $b(Y) = \sqrt{R^2 - Y^2}$. Então, o momento estático fica

$$Q_Z = \int_A Y\ dA = 2\int_{Y=0}^{R} Y b(Y)\ dY = 2\int_{Y=0}^{R} Y\sqrt{R^2 - \bar{Y}^2}\ dY = \frac{2}{3}R^3. \tag{8.22}$$

Com isso se obtém diretamente

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{A}Q_Z = \frac{4R}{3\pi}} \tag{8.23}$$

Momento estático de geometria justaposta

Consideremos o caso em que a geometria da seção seja arbitrária, porém definida por uma justaposição de figuras geométricas regulares, como retângulos, triângulos, arcos de circunferência, como no exemplo mostrado na Figura 8.6, em que a seção T é construída por dois retângulos. A área e a posição do centroide de cada segmento são facilmente identificáveis. O cálculo começa pela definição de um par de eixos, $Y - Z$, posicionados arbitrariamente, com um deles sobre a linha de simetria da seção, como o eixo Y mostrado na figura. A definição do momento estático, eq.(8.9), é uma integral, de forma que ela pode ser facilmente decomposta na soma de integrais, uma para cada região:

$$Q_Z := \int_A Y\ dA = \sum_{j=1}^{n}\int_{A_j} Y\ dA = \sum_{j=1}^{n} Q_{Zj}\ ,\ \text{onde } Q_{Zj} = \int_{A_j} Y\ dA. \tag{8.24}$$

Cada uma das n regiões têm área A_j. A coordenada Y é sempre em relação ao mesmo eixo Z. Uma vez que a coordenada do centroide da área A_j, representada por $\overline{Y}_j$, seja conhecida, tem-se que

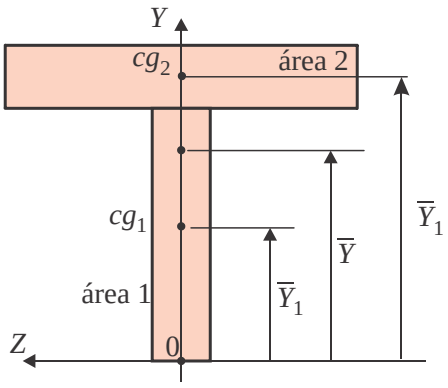


Figura 8.6: Exemplo de seção composta por regiões de geometria simples.

cada momento estático é dado por $Q_{Zj} = \overline{Y}_j A_j$. Então o momento da seção completa é obtido por

$$\boxed{Q_Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{Y}_j A_j} \tag{8.25}$$

Uma vez que para a seção completa $Q_Z = \overline{Y} A$, o cálculo da posição do centroide global em relação ao eixo Z é dado por

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{Q_Z}{A} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{n} \overline{Y}_j A_j} \tag{8.26}$$

8.3 2° momento de inércia - casos básicos - seção retangular

Começaremos explorando o caso mais simples, de uma viga de seção retangular sob flexão plana, como na Figura 8.7a. Como a seção tem dois planos de simetria, não há dificuldades em **localizar o centroide** e em orientar os **eixos principais** yz.

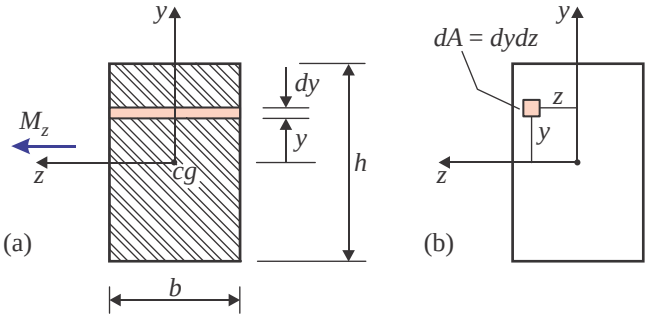


Figura 8.7: Seção retangular de lados $b \times h$..

Denominamos b o comprimento do lado da seção paralelo ao momento M_z, e h ao lado perpendicular a M_z. A dedução de uma expressão fechada para o momento de inércia I_{zz} em termos de b e h é feita a partir da definição (8.11): $I_{zz} = \int_A y^2 dA$. Como é usual nesses casos, tomamos um elemento diferencial dA numa forma adequada, nesse caso a forma do retângulo em negrito mostrado na Figura 8.7a onde $dA = b\, dy$. Assim,

$$I_{zz} = \int_A y^2 \, dA = b \int_{y=-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = \frac{by^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_{zz} = \frac{bh^3}{12}} \tag{8.27}$$

Podemos verificar que a escolha de eixos que fizemos é adequada, testando se $I_{yz} = 0$. Tomando um elemento de área $dA = dydz$ como na Figura 8.7b, o produto de inércia fica

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_A yz\ dA = \int_{z=-b/2}^{b/2}\int_{y=-h/2}^{h/2} yz\ dy\ dz = \left(\int_{z=-b/2}^{b/2} z\ dz\right)\left(\int_{y=-h/2}^{h/2} y\ dy\right) \\ &= \left(\frac{z^2}{2}\Big|_{z=-b/2}^{b/2}\right)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=-h/2}^{h/2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad I_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 8.2 - Procedimento básico de cálculo - viga biapoiada

Verificaremos o procedimento básico de cálculo de tensões normais em flexão através de um exemplo simples, o de uma viga biapoiada sob carga concentrada, como na Figura 8.8, onde força é $F = 500$ N, $a = 300$ mm, $L = 500$ mm, $b = 10$ mm, $h = 20$ mm. Determine a tensão normal σ_x máxima na viga.

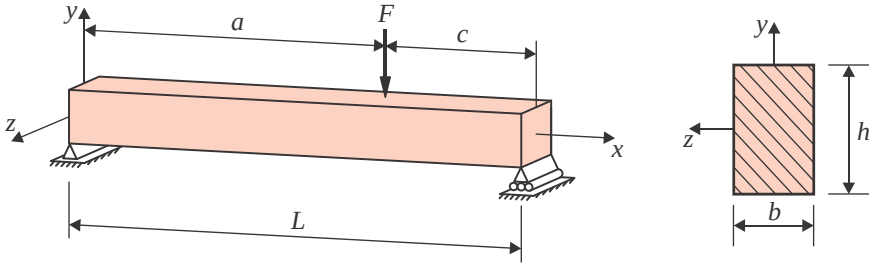


Figura 8.8: Dados do Exemplo 8.2.

Solução:

O roteiro de cálculo está sintetizado na fórmula de flexão (8.13): $\sigma_x(x.y) = -M_z(x)y/I_{zz}(x)$. Os valores $M_z(x)$ e $I_{zz}(x)$ na seção x devem ser previamente determinados. Como nesse problema a viga é de seção uniforme, $I_{zz} = const.$, segue-se que σ_x é máximo na seção onde M_z seja máximo. Assim, a primeira etapa consiste em determinar a distribuição de esforços $M_z(x)$. Como o problema é isostático não há dificuldades de obter as reações, $R_A = cF/L$ e $R_C = aF/L$. $c = L - a = 200$ mm, como indicado na Figura 8.9. A determinação do diagrama de esforços também é imediata, resultando que o momento máximo ocorre na seção B: $M_{\max} = acF/L = 300 \times 200 \times 500/500$, o que resulta $M_{\max} = 6,0 \cdot 10^4$ Nmm.

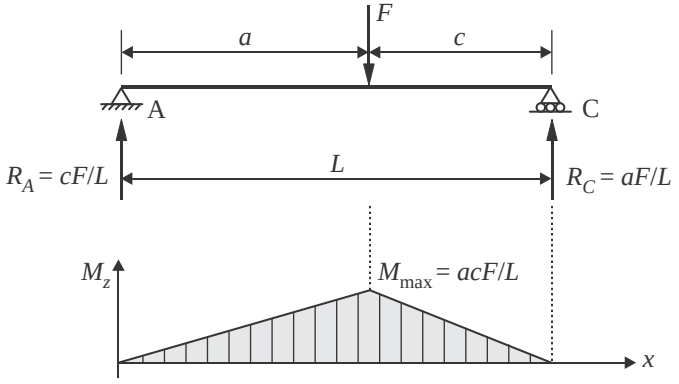


Figura 8.9: Reações e esforços de momento fletor no Exemplo 8.2.

A **segunda etapa** consiste em determinar o momento de inércia I_{zz} da seção B. No caso da seção

retangular sendo considerada, este é dado diretamente pela equação (8.27):

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 20^3}{12} = 6,67.10^3 \text{ mm}^4.$$

A **terceira etapa** consiste na aplicação da fórmula de flexão (8.13) para um ponto y da seção considerada B (onde $x_B = 300$ mm):

$$\sigma_x(x_B; y) = -\frac{M_z(x_B)}{I_{yy}} y = -\frac{6 \cdot 10^4}{6.67 \cdot 10^3} y \rightarrow \boxed{\sigma_x(x_B; y) = -9,0\ y \text{ [mm e MPa]}}$$

Essa é a distribuição de tensões na seção B, que é ilustrada na Figura 8.10. Como a seção é simétrica em relação ao eixo z, os valores extremos de $|y|$ são iguais, i.e., $|y|_{\max} = h/2 = 10$ mm (ou $y_{\max\,/\,\min} = \pm h/2 = \pm 10$ mm). Assim, a tensão normal tem extremos

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\text{tração}} &= \sigma_x(x_B; y = -10 \text{ mm}) = -9,0 \times (-10 \text{ mm}) = +90 \text{ MPa (em baixo)}, \\ \sigma_{\max}^{\text{compr}} &= \sigma_x(x_B; y = +10 \text{ mm}) = -9,0 \times (+10 \text{ mm}) = -90 \text{ MPa (em cima)}, \end{aligned}$$

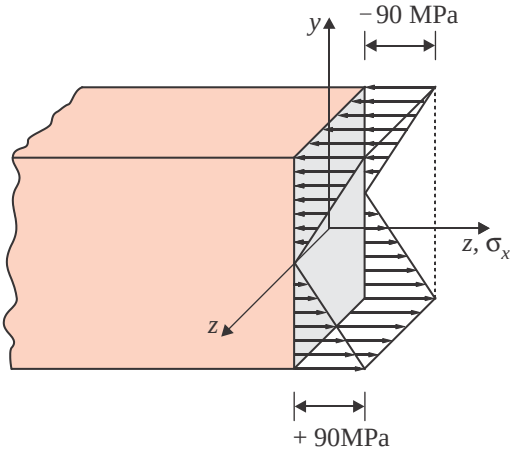


Figura 8.10: Distribuição de tensões normais na seção B do Exemplo 8.2.

8.3.1 Momentos de inércia de seção circular e tubular

As seções circulares e tubulares são possivelmente as mais usadas em componentes mecânicos, aparecendo em eixos, suportes e guias.

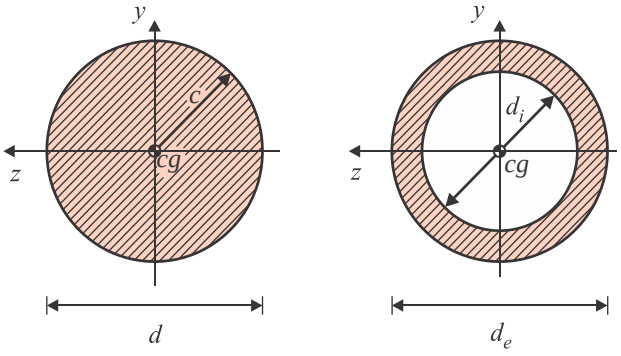


Figura 8.11: Parâmetros da seção circular maciça e tubular.

Uma característica única da seção circular é a de possuir infinitos planos de simetria. Dessa forma, qualquer eixo centroidal é também um eixo principal de inércia. Também, devido à axissimetria, $I_{yy} = I_{zz}$. No cálculo das tensões cisalhantes de torção, foi definido em (7.20) o momento polar de inércia $J \doteq \int_A r^2\, dA$. A coordenada radial r de um elemento diferencial dA pode ser escrita como $r^2 = y^2 + z^2$, como na Figura 8.12. Então, da definição de J,

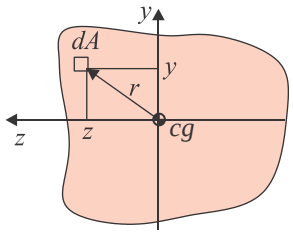


Figura 8.12: Coordenadas de um ponto para o cálculo de momentos de inércia.

$$J = \int_A r^2\, dA = \int_A \left(y^2 + z^2\right)\, dA = \int_A y^2\, dA + \int_A z^2\, dA. \tag{8.28}$$

Então, se tem a relação entre os momentos de inércia e o polar de uma seção:

$$\boxed{J = I_{zz} + I_{yy}} \tag{8.29}$$

Essa relação **é válida para qualquer geometria de seção transversal, não apenas circular**. Entretanto, em seções arbitrárias, J em geral não é um parâmetro útil na determinação das tensões, como é no caso de seção circular. Neste caso, de seção circular, sabe-se que $I_{zz} = I_{yy} = I$. Dessa forma,

$$\boxed{J = 2I \text{ em seção circular}} \tag{8.30}$$

A dedução para a expressão do J pode ser vista no Capítulo 7 de torção, eq.(7.25), como $J = \pi r^4/2 = \pi d^4/32$. Uma vez que $I_{yy} = J/2$, o momento diametral da seção circular pode ser diretamente obtido como:

$$\boxed{I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi c^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{para seção maciça, e}}$$

$$\boxed{I_y = I_z = \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4) \quad \text{para seção tubular.}} \tag{8.31}$$

8.4 Teorema dos Eixos Paralelos para momento de inércia I_{ZZ}

Caso os momentos de uma área em relação a um **eixo centroidal** z sejam conhecidos, podemos determinar os momentos em relação a **qualquer eixo** Z **paralelo a** z, usando o chamado Teorema dos Eixos Paralelos, cuja dedução é mostrada a seguir.

Consideramos a definição (8.11) em sua forma abrangente, adequada ao momento de inércia em relação a um eixo arbitrário Z:

$$\boxed{I_{ZZ} \equiv \int_A Y^2 dA} \tag{8.32}$$

Considere que o eixo Z seja paralelo a um eixo centroidal z, conforme a Figura 8.13, sendo $\overline{Y}$ a distância entre eles. O posicionamento do eixo Z é arbitrário, porém paralelo ao eixo principal z. A coordenada Y de um ponto arbitrário em relação ao eixo Z é $Y = y + \overline{Y}$. Assim,

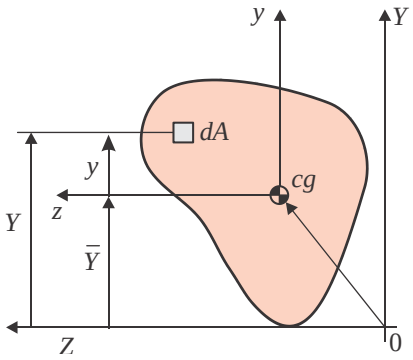


Figura 8.13: Eixos arbitrários YZ e centroidais yz numa seção.

$$I_{ZZ} \equiv \int_A (y + \overline{Y})^2 \, dA.$$

Expandindo a potência temos

$$I_{ZZ} = \underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_{zz}} + 2\overline{Y} \underbrace{\int_A z \, dA}_{Q_y=0} + \overline{Y}^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}.$$

A primeira integral é o momento de inércia da seção em relação ao eixo centroidal z. A segunda é o momento estático em relação ao eixo centroidal z, logo é igual a zero. A última integral é simplesmente o valor da área da seção. Assim temos

$$\boxed{I_{ZZ} = I_{zz} + A\overline{Y}^2} \tag{8.33}$$

que é a expressão do chamado teorema dos eixos paralelos.

8.5 Alguns exemplos

Exemplo 8.3 - Momento de inercia de seção retangular

Determine a expressão para o momento de inércia de uma seção retangular em relação ao eixo Z que passa pela base da seção, como na Figura 8.14. Use o teorema dos eixos paralelos.

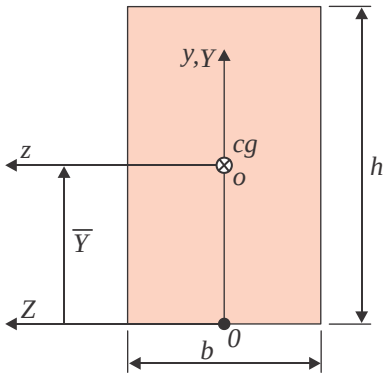


Figura 8.14: Dimensões e eixos do Exemplo 8.3.

Solução:

No Exemplo 8.1 tínhamos obtido o momento de inércia I_z em relação ao eixo centroidal z, usando diretamente a integral de definição do momento. Para o momento em relação ao eixo Z, que é paralelo a z, podemos usar o teorema dos eixos paralelos, eq.(8.33), para transladar o momento do eixo z para o Z:

$$I_{ZZ} = I_{zz} + \overline{Y}^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (bh) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_{ZZ} = \frac{bh^3}{3}} \tag{8.34}$$

Exemplo 8.4 - Flexão de viga com seção Π

Considere uma viga em balanço como mostrada na Figura 8.15. Determine a tensão normal máxima na viga e o coeficiente de segurança, se o material é um aço com tensão admissível quanto ao início de escoamento $\sigma_{adm} = 200$ MPa. Para resolver o problema siga as etapas: (a) Determine o momento fletor máximo na viga; (b) Determine a posição do centroide da seção; (c) Determine o momento principal de inércia; (d) Finalmente calcule a tensão nominal máxima na seção crítica. (Ignore os efeitos de concentração de tensões nos extremos da viga.)

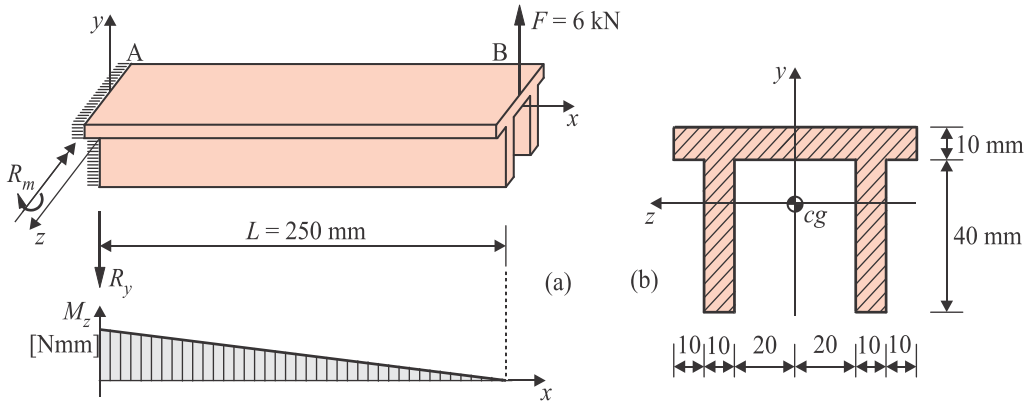


Figura 8.15: Dados do exemplo 8.4.

Solução:

Etapa 1 - Esforços - Uma vez que a seção é uniforme, a tensão máxima ocorrerá na seção onde o momento fletor seja máximo. Então determinamos as reações e o diagrama de momento fletores. As reações são: $R_y = F = 6$ kN e $R_m = FL = 1,5 \cdot 10^6$ Nmm (Ver as orientações na Figura 8.15a). Usando o método das seções, a expressão para o momento fletor é: $M_z(x) = F(L - x)$, i.e., $M_z(x) = 1,5 \cdot 10^6 - 6000x$, em Nmm, como mostrado na Figura 8.15a. O valor máximo do momento ocorre na seção A: $M_{\max} = 1,5 \cdot 10^6$ Nmm.

Etapa 2 - Determinar a posição do **centroide**.

Como a seção tem um plano de simetria, a posição do eixo centroidal y é conhecida, exceto por sua origem, como mostrado na Figura 8.15b. Basta determinar a posição do outro eixo centroidal, z.

A Figura 8.16 mostra a seção da viga decomposta em três áreas retangulares, com centroides marcados por cg_1, cg_2 e cg_3. Definimos um sistema provisórios de eixos, OYZ como ilustrado. Esse sistema pode ser localizado em qualquer posição, de forma que a posição escolhida, na base da seção, foi apenas por conveniência nas operações. As coordenadas dos centroides de cada área, em relação aos eixos temporários, são $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_3 = 20$ mm e $\overline{Y}_2 = 45$ mm. Assim, a coordenada $\overline{Y}$ do centroide da seção original é obtida por (8.26):

$$\overline{Y} = \frac{1}{A}\left[\overline{Y}_1 A_1 + \overline{Y}_2 A_2 + \overline{Y}_3 A_3\right],$$

onde $A_3 = A_1$ e $\overline{Y}_3 = \overline{Y}_1$. Logo,

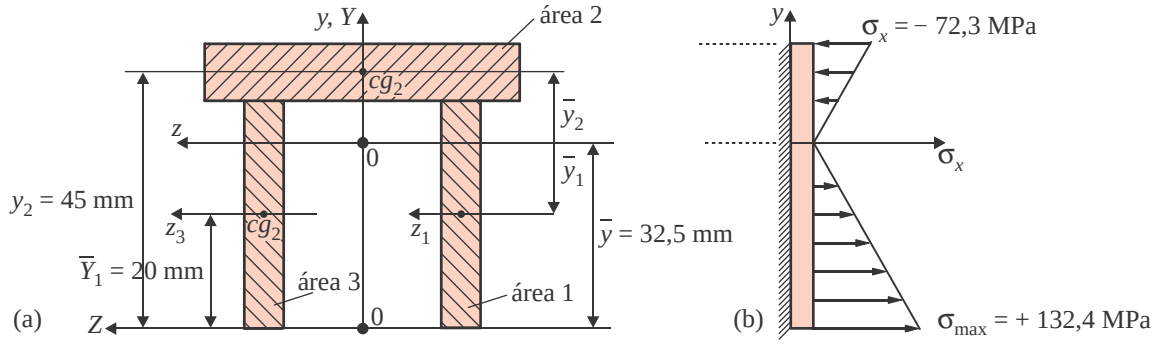


Figura 8.16: (a) Decomposição da seção em três áreas retangulares. (b) Distribuição de tensões na seção logo à direita do engaste.

$$\overline{Y} = \frac{1}{(2\times 10\times 40 + 10\times 80)}\left[2\times 20\ (10\times 40) + 45\ (10\times 80)\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{Y} = 32,5 \text{ mm}}$$

Como a seção possui um plano de simetria, o eixo y, segue-se que o eixo z passando pelo centroide é o outro eixo principal da seção.

Etapa 3 - Determinar o **momento de inércia** da seção

Como cada área é retangular, seus momentos de inércia em relação a seu próprio eixo centroidal (eixos z_1, z_2 e z_3) são tomados como conhecidos: I_{z_1}, I_{z_2} e I_{z_3}, pela dedução já feita para o momento de um retângulo, eq.(8.27. Assim, o momento de inércia da seção completa em relação a seu eixo centroidal z é obtido aplicando o teorema dos eixos paralelos, (8.33_1, para transferir o momento de cada área ao eixo z:

$$\begin{aligned} I_z &= 2I_z^{(1)} + I_z^{(3)} \\ &= 2\left[I_{z_1} + \overline{y}_1^2 A_1\right] + \left[I_{z_2} + \overline{y}_2^2 A_2\right] \end{aligned} \tag{8.35}$$

Na primeira expressão, estamos somando momentos de diversas áreas, todas calculadas em relação ao mesmo eixo, z. Esses momentos, na segunda equação, são primeiro obtidos em relação ao eixo da própria área, e em seguida transladados ao eixo z. Considerando o valor de $\overline{Y}$ e os dados geométricos das Figuras 8.15b e 8.16, as distâncias entre os eixos z_1 e z_2 até z são: $\overline{y}_1 = \overline{Y}_1 - \overline{Y} = -12,5$ mm e $\overline{y}_2 = \overline{Y}_2 - \overline{Y} = 12,5$ mm. (Obs.: o fato desses dois valores serem idênticos é apenas uma coincidência resultante da conjunção dos parâmetros geométricos da seção.) Assim, (8.35) fica

$$I_z = 2\left[\frac{10\cdot 40^3}{12} + 12,5^2(10\times 40)\right] + \left[\frac{80\cdot 10^3}{12} + 12,5^2(80\times 10)\right] = 3,63\cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Etapa 4 - Tensão máxima

A tensão máxima ocorre na seção do engaste, onde o momento máximo tinha sido obtido na Etapa 1 como $M_{\max} = 1,5\cdot 10^6$ Nmm. A distribuição de tensões na seção localizada logo a direita do engaste é vista na Figura 8.16b. A tensão máxima em módulo sempre ocorre no ponto da seção mais distante da linha neutra, que nesse caso é o ponto de coordenadas $y_{\max} = -32,5$ mm. Assim, de (8.13),

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} = -\frac{1,5\cdot 10^6}{3,63\cdot 10^5}(-32,5) = +134,2 \text{ MPa}.$$

O coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento, ignorando o efeito de concentração de tensões no engaste, é $n = \sigma_{adm}/\sigma_{\max} = 200/134,2 = 1,49$.

Exemplo 8.5 - Dimensionamento de viga

Considere a viga mostrada na Figura 8.17a, de aço, com tensão admissível $\sigma_{adm} = 150$ MPa. Dimensione a seção transversal, para os casos de: (a) seção circular maciça de diâmetro d; (b) seção quadrada de lados $a \times a$; (c) seção retangular de lados $b \times 2b$. Os dados são: $F = 10$ kN, $q = 10$ N/mm, $L = 4,0$ m e $c = 1,0$ m.

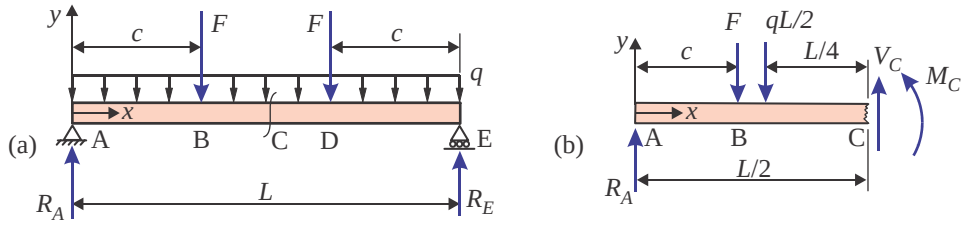


Figura 8.17: Dados do Exemplo 8.5.

Solução:
Etapa 1 - Esforço de momento fletor. Como estamos num processo de dimensionamento, interessa determinar o máximo valor de tensão. Como a seção é uniforme, esta ocorre na seção de máximo esforço de momento que, devido à simetria do problema, ocorre na seção central C. Então, primeiramente determinamos as reações nos apoios, que são: $R_A = R_E = F + qL/2$. Em seguida aplicamos o método das seções em C e construímos o diagrama de corpo livre visto na Figura 8.17b. Escrevendo $\sum M_z = 0$ e simplificando obtemos o esforço em C como

$$M_c = \frac{qL^2}{8} + Fc = \frac{10 \times 4000^2}{8} + 10^4 \cdot 10^3 = 30 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Etapa 2 - Dimensionamento para seção circular. Observe primeiramente que todas as seções tratadas nesse exemplo possuem dois planos de simetria. Assim, não há dúvida sobre a localização do centroide e sobre as orientações dos eixos principais de inércia. Então podemos passar imediatamente ao dimensionamento através das equações (8.15) e (8.16): $\sigma_{\max} = \sigma_{adm}$, com $\sigma_{\max} = M_c\,|y|_{\max}/I_z$. Na seção circular, $|y|_{\max} = d/2$ e o momento de inércia foi obtido em (8.31) como $I_z = \pi d^4/64$. Assim, a determinação do diâmetro d e da área A da seção vem de

$$\sigma_{\max} = \sigma_{adm} \;\rightarrow\; \frac{M_c\,|y_{\max}|}{I_z} = \sigma_{adm} \;\rightarrow\; \frac{M_c d/2}{\pi d^4/64} = \sigma_{\max} \;\rightarrow\; \frac{32\ M_c}{\pi d^3} = \sigma_{adm}.$$

$$\text{Logo, } \frac{32 \times 3 \cdot 10^7}{\pi d^3} = 150 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 126,8 \text{ mm}, \quad \text{e} \quad A = 12.628 \text{ mm}^2} \tag{8.36}$$

Com esse diâmetro, o momento de inércia é $I_z = \pi d^4/64 = 1,27 \cdot 10^7$ mm^4.
Etapa 3 - Seção quadrada. O procedimento é o mesmo da equação (8.36), porém agora $|y|_{\max} = a/2$ e o momento de inércia vem de (8.27), que se resulta $I_z = a^4/12$. Assim,

$$\sigma_{\max} = \sigma_{adm} \;\rightarrow\; \frac{M_c\,|y|_{\max}}{I_z} = \sigma_{adm} \;\rightarrow\; \frac{M_c a/2}{a^4/12} = \sigma_{adm}.$$

$$\frac{6M_c}{a^3} = \sigma_{adm} \;\rightarrow\; \frac{6 \times 3 \cdot 10^7}{a^3} = 150 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 106,3 \text{ mm}, \quad A = 11.292 \text{ mm}^2} \tag{8.37}$$

Com essa seção, o momento de inércia é $I_z = a^4/12 = 1,06 \cdot 10^7$ mm^4.
Etapa 4 - Seção retangular. O procedimento é similar, com $|y|_{\max} = b$ e de (8.27) o momento de inércia é $I_z = 2b^4/3$. Assim,

$$\sigma_{\max} = \sigma_{adm} \quad \rightarrow \quad \frac{M_c\, b}{2b^4/3} = \sigma_{adm} \quad \rightarrow \quad \frac{3M_c}{2b^3} = \sigma_E \quad \rightarrow \quad \frac{3 \times 3 \cdot 10^7}{2\, b^3} = 150$$

$$\rightarrow \quad \boxed{b = 66,9 \text{ mm} \qquad \text{e} \qquad A = 8.963 \text{ mm}^2}. \tag{8.38}$$

Com essa seção, o momento de inércia é $I_z = 2b^4/3 = 1,36 \cdot 10^7$ mm^4.
Observe que as três vigas suportam a carga com o mesmo grau de segurança, porém, simplesmente escolhendo adequadamente a **forma da seção**, conseguimos uma viga com menor quantidade de material: o projeto com seção retangular necessita 8.963/12.628 = 0,71 da quantidade de material necessária se fosse usada a seção circular maciça. A explicação para esse fenômeno pode ser vista na fórmula de flexão, $\sigma_x = -M_z y/I_z$, em que I_z aparece no denominador: quanto maior I_z menor a tensão máxima. Por sua vez, I_z pode crescer sem necessariamente aumentar a área, bastando aumentar a distância do material da seção em relação à linha neutra. Dessa forma, surge a ideia dos perfis estruturais, como o perfil `I`. Aqui, grande parcela do material, os "flanges", é posicionada distante da linha neutra, onde estará efetivamente suportando parcelas importantes da tensão normal. Próximo da linha neutra, onde as tensões de flexão são quase nulas, é alocado pouco material. Assim, a "alma" do perfil `I` é fina, e é responsável apenas por manter o afastamento dos flanges e por suportar o cisalhamento transversal na seção (como veremos no Capítulo 9). Esse efeito pode ser apreciado no próximo exemplo.

Exemplo 8.6 - Perfil `I`

Considere o problema do Exemplo 8.5. Buscamos determinar uma seção transversal T que apresente aproximadamente metade da área da seção retangular do Exemplo 3, porém apresente aproximadamente o mesmo momento de inércia. Especificamente, arbitramos $A = 4.500$ mm^2, com as dimensões mostradas na Figura 8.18: largura do flange $b = 70$ mm, espessuras do flange e da alma $h = 20$ mm. Deixamos a distância H entre os flanges como parâmetro a ser determinado pelo valor da área. Em seguida, buscamos o momento de inércia da seção.

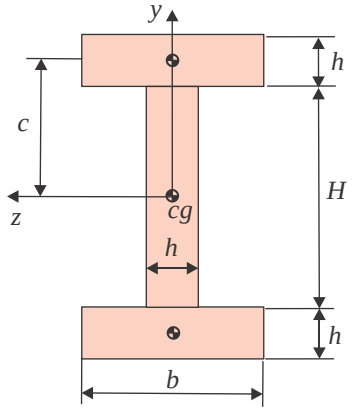


Figura 8.18: Perfil `I` do Exemplo 8.6.

Solução:

A distância H entre os flanges é determinada de forma a produzir a área total definida para a seção, $A = 4.500$ mm^2. Então,

$$A = 2bh + Hh \qquad 2.500 = 2 \times 70 \times 20 + 20H \quad \rightarrow \quad H = 85 \text{ mm}. \tag{8.39}$$

Com todas as dimensões da seção determinadas, o momento de inércia pode ser calculado:

$$I_z = 2\left[\frac{bh^3}{12} + bhc^2\right] + \frac{bH^3}{12} = 1.139 \cdot 10^7 \text{mm}^4. \tag{8.40}$$

Nota-se que esse é aproximadamente o momento de inércia da seção retangular, que era $I_z = 1,36{\cdot}10^7$ mm^4. Entretanto, a seção retangular tinha área $A = 8.963$ mm^2, o que é $8.963/4.500 = 1,99$ vezes a área da seção `I`. A tensão máxima e o coeficiente de segurança podem ser obtidos para o novo momento de inércia

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} = -\frac{30 \cdot 10^6}{1.139 \cdot 10^7}(-62,5) = +164,6 \text{ MPa}. \tag{8.41}$$

Nota-se que a área na seção `I` foi reduzida à metade da retangular, porém a tensão cresceu apenas de 150 MPa para 164 MPa.

Observação: O processo desenvolvido acima para gerar um perfil com valores arbitrariamente altos de momento de inércia, com pequena área de seção transversal, pode ser, a princípio, estendido indefinidamente, i.e., dado um certo valor de área, se pode construir um perfil com qualquer momento de inércia desejável. No exemplo, o crescimento da área e do momento de inércia com H são obtidos substituindo os valores em (8.39) e (8.40):

$$A = 2.800 + 20H \qquad \text{e} \qquad I_z = 7,811 \cdot 10^7 + 5,833H^3. \tag{8.42}$$

Então, a cada acréscimo de H, a área cresce apenas linearmente, enquanto I_z cresce ao cubo. A consequência é que a tensão normal máxima pode ser feita decrescer tanto quanto se queira: se $\sigma_{\max} = M_c \left|y_{\max}\right| / I_z$, um aumento em I_z gera uma redução na tensão, mantendo a mesma quantidade de material e peso. Entretanto, esse processo tem limites práticos. Nota-se que usamos uma particular teoria de flexão vista, e apenas um modo de falha, início de escoamento. Entretanto, no mundo real, um perfil exageradamente alto e delgado, quando submetido a pequenos carregamentos, apresentara um outro tipo de falha, a instabilidade lateral, que não é prevista na teoria usada nesse capítulo. Em geral, os cálculos de instabilidade de perfis delgados requerem teorias sofisticadas que fogem ao escopo dos estudos de engenharia usual. Em vez disso, uma série de aspectos geométricos foram identificados, de forma que seu uso pode ser feito com um nível de segurança quanto a instabilidade. Esses aspectos são os **perfis normalizados**, que padronizam relações entre largura e espessura da alma, dos flanges produzidos em série por trefilação. Esses padrões existem para diversos tipos de perfis, como `I, T`, canaletas [e cantoneiras ⌞ de abas iguais e `L` de abas diferentes. Os valores tabelados podem ser obtidos nas entidades de normalização de cada país, como ASME nos Estados Unidos, ISO, e ABNT no Brasil.

Além dos perfis pré-fabricados, o engenheiro pode construir perfis através da soldagem de perfis mais simples ou de chapas, de forma a obter seções transversais de grandes dimensões, acima dos valores padronizados.

8.6 * Vigas compostas por dois ou mais materiais

Em[2] muitas situações as vigas compostas por seções transversais com duas ou mais regiões de distintos materiais. O caso mais tradicional consiste em tarugos de madeira de seção retangular que são reforçadas por uma chapa de aço em uma das faces. Outro caso de uso universal é o de vigas de concreto reforçado por vergalhões de aço. Esses são casos particulares de uma classe bastante abrangente das chamadas **estruturas de materiais compostos**. Esses englobam, por exemplo, os painéis e vigas de polímeros reforçados por fibras de alto desempenho (carbono, kevlar, vidro...), bastante usados em estruturas aeronáuticas e navais, por exemplo. O estudo dos casos gerais de materiais compostos, que envolvem heterogeneidade e anisotropia, foge ao escopo desse livro, e é deixado para bibliografia adequada, por exemplo Mendonça [6]. Entretanto, o caso de

[2] O presente tópico é opcional, e pode ser suprimido num primeiro curso sem prejuízo da continuidade do conteúdo.

vigas constituídas por duas ou três fases de materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares, pode ser facilmente tratado, como descrito nessa seção.

Consideramos uma seção transversal com seção arbitrária, constituída por n regiões, cada uma com um material distinto, como na Figura 8.19a. Cada fase é um material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade E_j, $j = 1, ..., n$, e possui uma área transversal A_j.

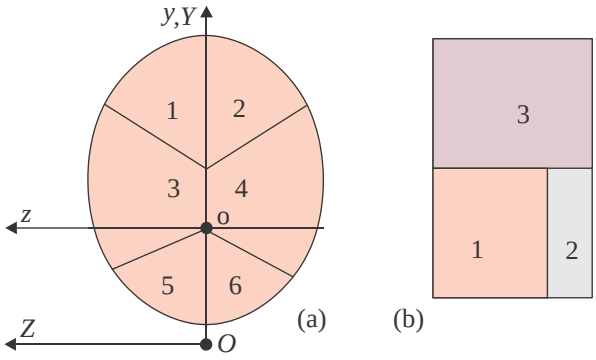


Figura 8.19: (a) seção composta por $n = 6$ materiais, com um plano de simetria (vertical); (b) seção com 3 materiais e sem plano de simetria.

A **hipótese fundamental usada no tratamento desse tipo de viga é que a deformação axial $\varepsilon_x(x, y)$ varia linearmente ao longo de y**, mesmo com a diferença de materiais. Essa hipótese é ilustrada na Figura 8.20 para o caso simples de duas fases. Análises mais detalhadas mostram que essa hipótese é aproximadamente correta no âmbito de pequenas deformações, como é o caso presente. A hipótese de deformação variando linearmente em y é a mesma usada na dedução da fórmula de flexão de vigas homogêneas, e foi representada por (8.6):

$$\varepsilon_x(x, y) = -\kappa(x)y. \tag{8.43}$$

Se cada fase é elástica linear, então a tensão numa cota y da seção depende da propriedade do material naquele ponto, de forma que numa seção x, a deformação varia linearmente em y na forma

$$\sigma_x(x, y) = E(y, z)\varepsilon_x(x, y) = -E(y, z)\kappa(x)y. \tag{8.44}$$

Em ambas as expressões acima, y deve ser a coordenada medida ao longo de um eixo de simetria (vertical nas figuras), com, cuja origem deve ser a linha neutra. No caso da seção homogênea, a linha neutra passa pelo centroide da seção. Entretanto, no presente caso, de seção heterogênea, a linha neutra não necessariamente passa pelo centroide, e deve-se deduzir novamente a forma de sua identificação.

8.6.1 Linha neutra

Inicialmente, consideramos que a seção possua um plano de simetria, e definimos um sistema de coordenadas temporário $OXYZ$, com Z perpendicular ao plano de simetria, como nas Figuras 8.19a e 8.20a. Note que a formulação desenvolvida a seguir não é aplicável a seções como a da Figuras 8.19b, que não possui um plano de simetria. Um segundo sistema de eixos, $0xyz$, é definido com y ao longo do plano de simetria, com origem na linha neutra, e z é normal ao plano. Então, os eixos Z e z são paralelos. A posição do eixo z é definida em relação ao eixo temporário Z por $\bar{Y}$. A **linha neutra é definida como a reta ao longo da qual as tensões e deformações normais são nulas**. A distribuição de tensões na seção é ilustrada na Figura 8.20c para o caso de duas fases. A posição da linha neutra define a região da seção sob tração e sob compressão. A resultante z de forças deve ser nula, para manter o equilíbrio do elemento diferencial de comprimento dx mostrado. Esse equilíbrio é representado por

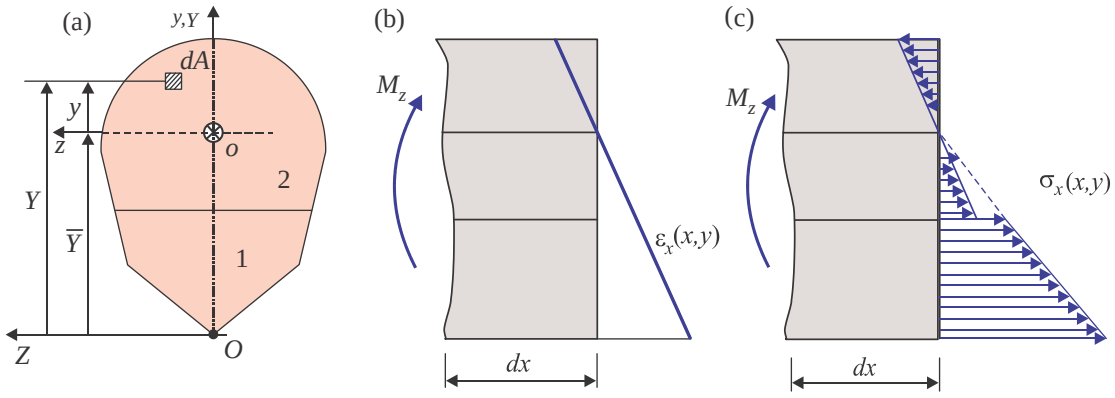


Figura 8.20: (a) seção transversal com duas fases, com plano de simetria; (b) elemento diferencial dx com esforço de momento fletor e distribuição das deformações; (c) distribuição qualitativa das tensões.

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A \sigma_x dA = 0, \\ &= -\kappa(x) \int_A E(y,z) y \; dA = 0. \end{aligned} \tag{8.45}$$

A origem da coordenada y é ainda desconhecida nesse ponto, porém o elemento diferencial de área dA pode ser localizado pela coordenada arbitrária Y, tal que $y = Y - \bar{Y}$, onde $\bar{Y}$ é a distância, ainda incógnita, entre os dois eixos. Substituindo em (8.45) temos

$$\int_A E(Y) Y \; dA - \bar{Y} \int_A E(Y) \; dA = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\bar{Y} = \frac{\int_A E(Y) Y \; dA}{\int_A E(Y) \; dA}} \tag{8.46}$$

Os termos do numerador e denominador podem ser explicitados por:

$$\begin{aligned} &\int_A E(Y) Y \; dA = \sum_{j=1}^{n} E_j \underbrace{\int_{A_j} Y \; dA}_{Q_{Zj}} = \sum_{j=1}^{n} E_j Q_{Zj}, \\ &\int_A E(Y) \; dA = \sum_{j=1}^{n} E_j \underbrace{\int_{A_j} dA}_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} E_j A_j. \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} E_j Q_{Zj}}{\sum_{j=1}^{n} E_j A_j}} \tag{8.47}$$

A_j é a área da fase j e Q_{Zj} é o momento estático da área A_j em relação ao eixo Z. Essa expressão determina a posição da linha neutra em seções com qualquer disposição e formato das fases. O momento estático pode ser colocado na forma

$$Q_{Zj} = A_j \bar{Y}_j, \tag{8.48}$$

onde $\bar{Y}_j$ é a coordenada Y do centroide da área A_j. Então,

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} E_j A_j \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^{n} E_j A_j}} \tag{8.49}$$

Note que numa viga homogênea, com uma única fase de módulo E, essa expressão se reduz àquela vista em (8.26): $\bar{Y} = \sum_{j=1}^{n} A_j \bar{Y}_j / A$, onde A é a área total da seção.

8.6.2 Tensão normal

A relação entre a tensão normal e o momento fletor e obtida pela condição de equilíbrio de momentos do elemento diferencial de comprimento dx, como ilustrado na Figura 8.20b para duas fases. O momento provocado pelas tensões na face direita deve equilibrar o esforço de momento na face esquerda:

$$M_z(x) + \int_A \sigma_x y \; dA = 0. \tag{8.50}$$

Tomando a variação da tensão de (10.12),

$$M_z(x) = \kappa(x) \underbrace{\int_A E(y) y^2 \; dA.}_{E_{eq} I_z} \qquad \rightarrow \qquad \kappa(x) = \frac{M_z(x)}{E_{eq} I_z}, \text{ onde } E_{eqiv} I_z = \int_A E(y) y^2 \; dA. \tag{8.51}$$

E_{eqiv} pode ser visto como um módulo de elasticidade homogeneizado, equivalente ao conjunto de módulos das fases que compõem a viga. Seu valor pode ser obtido por

$$\boxed{E_{eq} = \frac{1}{I_z} \int_A E(y) y^2 \; dA} \tag{8.52}$$

onde I_z é o segundo momento de inércia da seção em relação ao eixo centroidal z. Note que numa viga homogênea, com uma única fase de módulo E, se tem $E_{eqiv} = E$.

Como a curvatura $\kappa(x)$ define a variação da deformação por $\varepsilon_x(x, y) = -\kappa(x) y$, a Lei de Hooke 1D gera a expressão da tensão normal

$$\sigma_x(x, y, z) = E(y, z) \varepsilon_x(x, y) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\sigma_x(x, y, z) = -E(y, z) \frac{M_z(x)}{E_{eq} I_z} y} \tag{8.53}$$

O produto $E_{eqiv} I_z$ pode ser obtido particionando a integral em (8.51) num somatório sobre todas as fases:

$$E_{eqiv} I_z = \int_A E(y, z) y^2 \; dA = \sum_{j=1}^{n} E_j \int_{A_j} y^2 \; dA \qquad \rightarrow \qquad \boxed{E_{eq} I_z = \sum_{j=1}^{n} E_j I_{zj}} \tag{8.54}$$

I_{zj} é o segundo momento de inércia da seção transversal da fase j em relação ao eixo centroidal z.

Exemplo 8.7 - Viga madeira-aço

Considere uma viga composta com seção transversal como na Figura 8.21a, constituída por uma fase de madeira com modulo $E_m = E_2 = 10$ MPa e um reforço de aço.com $E_a = E_1 = 10$ GPa. As dimensões são: $b = 150$ mm, $H = 300$ mm, $h = 15$ mm. O esforço de momento fletor na seção é $M_x = 60$ kNm. (a) Determine a posição da linha neutra, (b) o módulo de elasticidade equivalente da viga, (c) a distribuição das tensões normais na seção.

Solução:

(a) A linha neutra pode ser determinada de (8.49) para $n = 2$ fases:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{2} E_j A_j \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^{2} E_j A_j} = \frac{E_1 A_1 \bar{Y}_1 + E_2 A_2 \bar{Y}_2}{A_1 \bar{Y}_1 + A_2 \bar{Y}_2}. \tag{8.55}$$

Dos dados geométricos da seção se tem as áreas $A_1 = bh = 2.250$ mm^2, $A_2 = bH = 45.000$ mm^2, e as coordenadas dos centroides de cada fase, $\bar{Y}_1 = b/2 = 7{,}5$ mm^2 e $\bar{Y}_2 = H/2 + h = 165$ mm^2. Com

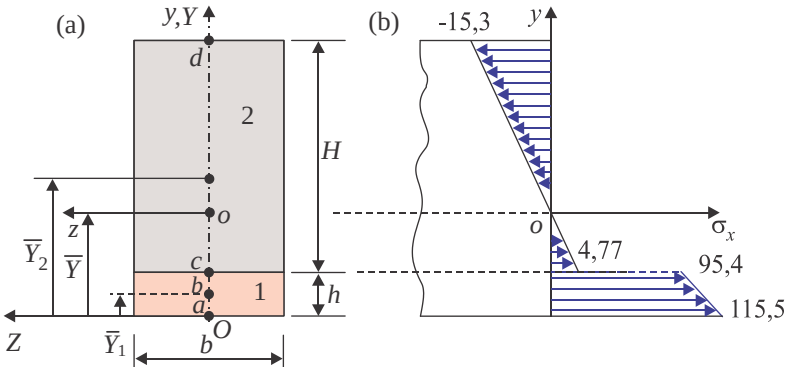


Figura 8.21: (a) parâmetros geométricos da seção; (b) distribuição de tensões.

isso se obtém a posição da linha neutra: $\bar{Y} = 86,3$ mm. Note que os momentos estáticos de cada fase em relação a Z são $Q_{Z1} = A_1\bar{Y}_1 = 16.875$ mm^3 para a barra de aço, e $Q_{Z2} = A_2\bar{Y}_2 = 7,43 \cdot 10^6$ mm^3 para a barra de madeira.

(b) O módulo equivalente E_{eq} é obtido por (8.54) para $n = 2$ fases:

$$E_{eq}I_z = \sum_{j=1}^{n} E_j I_{zj} = E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}. \tag{8.56}$$

Os momentos de inércia de cada fase são

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \frac{bh^3}{12} + A_1 d_1^2 = 1,40 \cdot 10^7 \text{ mm}^4, \\ I_{z2} &= \frac{bH^3}{12} + A_2 d_2^2 = 61,7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Com isso, se obtém o momento de inércia da seção é $I_z = I_{z1} + I_{z2} = 63,1 \cdot 10^7$ mm^4, o produto $E_{eq}I_z = 8,96 \cdot 10^{12}$ Nmm^2, e o módulo de elasticidade equivalente da viga $E_{eq} = E_{eq}I_z/I_z = 8,96 \cdot 10^{12}/63,1 \cdot 10^7 = 14,2$ GPa. Isso significa que a viga composta apresenta a mesma rigidez em flexão que uma viga homogênea de mesmas dimensões, com módulo E_{eq}= 14,2 GPa.

(c) As tensões podem ser obtidas (8.53), que pode ser separada para cada fase:

$$\begin{aligned} \sigma_{aco}(x,y,z) &= -E_1 \frac{M_z(x)}{E_{eq}I_z} y, \qquad \forall y \in (y_a; y_b) = (-\bar{Y}; h - \bar{Y}), \\ \sigma_{mad}(x,y,z) &= -E_2 \frac{M_z(x)}{E_{eq}I_z} y, \qquad \forall y \in (y_c; y_d) = (h - \bar{Y}; H + h - \bar{Y}). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Os limites de validade de cada equação são os limites de y para as superfícies inferior e superior da camada de aço e de madeira. Os pontos a, b, c e d estão marcados na Figura 8.21a, e suas coordenadas valem $y_a = -\bar{Y} = -86,3$ mm, $y_b = y_c = h - \bar{Y} = -71,25$ mm, $y_d = 228,75$ mm. Note que os pontos b e c se encontram na interface entre as camadas, um em cada camada. Apesar da deformação em ambos ser a mesma, as tensões são diferentes devido à diferença de módulo de elasticidade entre as camadas. As tensões nos quatro pontos são:

$$\begin{aligned}
\sigma^a_{aco} &= -E_1\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_a = -200\cdot 10^3\frac{60\cdot 10^6}{8,96\cdot 10^{12}}(-86,3) = 115,5 \text{ MPa},\\
\sigma^b_{aco} &= -E_1\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_b = -200\cdot 10^3\frac{60\cdot 10^6}{8,96\cdot 10^{12}}(-71,25) = 95,4 \text{ MPa},\\
\sigma^c_{mad} &= -E_2\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_c = -10\cdot 10^3\frac{60\cdot 10^6}{8,96\cdot 10^{12}}(-71,25) = 4,77 \text{ MPa},\\
\sigma^d_{mad} &= -E_2\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_d = -10\cdot 10^3\frac{60\cdot 10^6}{8,96\cdot 10^{12}}(228,75) = -15,3 \text{ MPa},
\end{aligned}$$

Vigas sanduíche

As chamadas vigas sanduíche são vigas de material composto constituídas por duas faces de material de alto módulo de elasticidade, coladas sobre um núcleo de material muito leve e, tipicamente, de baixíssimo módulo. A construção que se busca é de ter o núcleo com grande espessura, e faces bastante delgadas, de forma que o resultado é um componente extremamente leve e com alta capacidade de suportar flexão. A forma geométrica típica é ilustrada na Figura 8.22, onde as espessuras do núcleo e da face são H_n e h respectivamente. O conjunto segue até certo ponto, a ideia de uma viga I, em que o momento fletor é resistido principalmente pelas tensões nas faces, e a função do núcleo é apenas manter o afastamento das faces e transmitir tensões cisalhantes transversais.

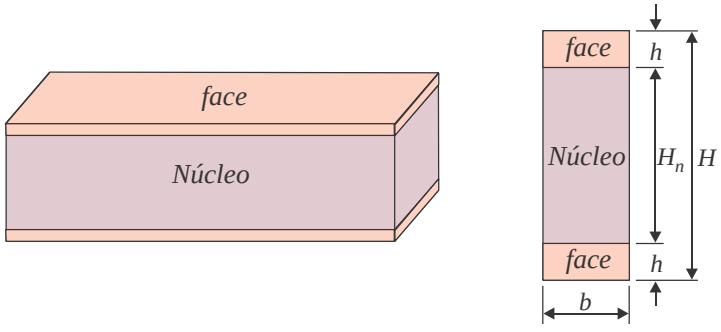


Figura 8.22: Aspectos geométricos de uma viga sanduíche.

A distribuição de tensões normais e o módulo equivalente podem ser obtidos usando a formulação (8.53) e (8.54), que para o caso particular de duas faces idênticas (mesmas espessuras e propriedades), se tornam

$$\boxed{E_{eq}I_z = 2E_fI_{zf} + E_nI_{zn}, \quad \text{onde} \quad I_z = \frac{bH^3}{12}} \tag{8.59}$$

onde I_z é o momento de inércia da seção, e E_f, E_n, I_{zf} e I_{zn} são os módulos e momentos de inércia das faces e do núcleo em relação ao eixo centroidal z da seção. $H = H_n + 2h$ é a altura total da seção. Esses momentos são: $I_{zf} = bh^3/12 + (bh)H_m^2$ e $I_{zn} = bH_n^3/12$, onde $H_m = (h + H_n)$ é a altura média da seção entre os centroides das faces.

A expressão da tensão normal

$$\sigma_x(x,y,z) = -E(y,z)\frac{M_z(x)}{E_{eq}I_z}y \tag{8.60}$$

pode ser aplicada às cotas extremas do núcleo e das faces. As coordenadas extremas da face superior são $y_{fi} = \pm H_n/2$ e $y_{fs} = \pm H/2$, em sua superfície externa e interna. As cotas extremas do núcleo são $y_n = y_{fi} = \pm H_n/2$ em suas faces externas. Então, as tensões nesses pontos são

$$\boxed{\sigma_{fi} = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_{fi}, \qquad \sigma_{fi} = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_{fs}, \qquad \sigma_n = -E_f \frac{M_z}{E_{eq} I_z} y_n} \tag{8.61}$$

Uma distribuição típica das tensões numa viga sanduíche é ilustrada na Figura 8.23a.

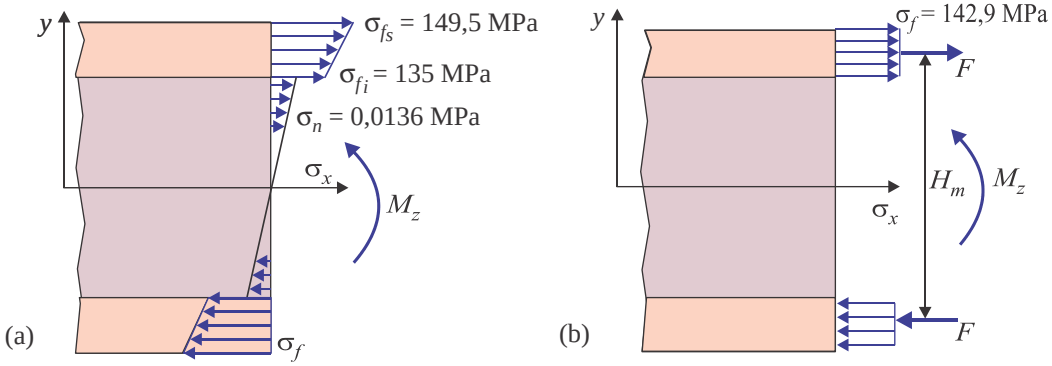


Figura 8.23: (a) Distribuição de tensões normais num sanduíche ao longo da espessura; (b) simplificação das tensões em sanduíches de faces delgadas e núcleo de baixo módulo.

Sanduíches de faces delgadas As eqs.(8.59)-(8.61) são adequadas a qualquer configuração simétrica de sanduíche, desde que as faces sejam idênticas, mesmo que elas sejam espessas. Entretanto, as configurações mais eficientes de sanduíche são tais que apresentam duas características:

1. a espessura das faces é pequena em relação à do núcleo, tipicamente,

$$\boxed{0,02 \leq \frac{h}{H_n} \leq 0,2} \tag{8.62}$$

2. o módulo de elasticidade do núcleo é muito maior que o da face, tipicamente,

$$\boxed{250 \leq \frac{E_f}{E_n} \leq 569} \tag{8.63}$$

3. a densidade do núcleo é muito pequena, da ordem de $\rho_n \approx 0,06$ kg/m^3 a $0,12$ kg/m^3, típicas em núcleos de colmeia, de corrugados ou de espumas polimérica expandida. Isso gera vigas e placas de baixíssimos pesos em relação às suas rigidezas.

Essas características permitem gerar uma formulação bastante simplificada, a partir das relações exatas nas eqs.(8.59)-(8.61). Isso é feito aplicando a condição $E_n = 0$ em (8.59)

$$E_{eq} I_z = 2 E_f I_{zf}, \tag{8.64}$$

e abrindo I_z:

$$I_{zf} = \frac{bh^3}{12} + 3bh \left(\frac{H_n + h}{2} \right)^2 .$$

Porém, $(H_n + h)/2 = H_m$, a distância entre os centroides das faces. Então,

$$I_{zf} = \frac{bh}{12} \left(h^2 + 3H_m^2 \right) .$$

No termo $\left(h^2 + 3H_m^2 \right)$ usamos a hipótese de $h << H_m$ para desprezar o termo h^2, de forma que se tem a simplificação

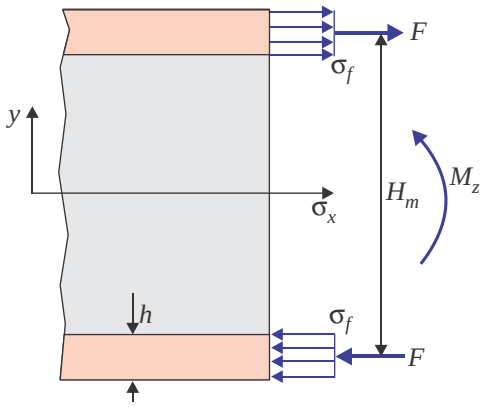


Figura 8.24: Estado de tensões normais num sanduíche considerado de faces delgadas e núcleo de baixa rigidez normal.

$$\boxed{I_{zf} \approx \frac{bhH_m^2}{4}} \tag{8.65}$$

Levando esse momento a (8.64), se obtém

$$\boxed{E_{eq}I_z = E_f\frac{bhH_m^2}{2} \quad \text{e} \quad E_{eq} = E_f\frac{6h}{H_m}} \tag{8.66}$$

A distribuição de tensões considera que a tensão normal no núcleo é nula, e nas faces são constantes na espessura, como na Figura 8.5b. O esforço interno de momento fletor numa seção é equilibrado pelo binário de forças F aplicadas no centroide de cada face como na figura. Esse equilíbrio é representado por

$$M_z = -\underbrace{\sigma_f(bh)}_{F}H_m \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_{fs} = -\sigma_{fi} = -\frac{M_z}{bhH_m}} \tag{8.67}$$

onde σ_{fs} e σ_{fi} são as tensões nas faces superior e inferior, respectivamente, como ilustrado na Figura 8.24. Essa formulação simplificada é bastante útil em cálculos manuais de análise de vigas sanduíche, e em procedimentos de otimização de parâmetros, para minimizar massa ou maximizar rigidez, por exemplo. É provado (Mendonça, [6]) que, se as espessuras e módulos estiverem nas faixas indicadas em (8.62)-(8.63), os erros dos resultados da formulação simplificada são próximos de 1%.

Exemplo 8.8 - Viga sanduíche

Considere uma viga sanduíche com seção transversal como na Figura 8.4, constituída por um núcleo de espuma de poliuretano de modulo $E_n = 20$ MPa e duas faces de aço com $E_f = 200$ GPa. As dimensões são: $b = 100$ mm, $H_n = 200$ mm, $h = 10$ GPa. O esforço de momento fletor na seção é $M_x = 30$ kNm. (a) Determine o módulo de elasticidade equivalente da viga, (b) a distribuição das tensões normais na seção. Resolva usando a formulação completa e a simplificada.

Solução:

Usando a **formulação completa**, eqs.(8.59)-(8.61), temos

$$I_{zf} = \frac{bh^3}{12} + (bh)\left(\frac{H_m}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad I_{zn} = \frac{bH_n^3}{12}. \tag{8.68}$$

$H_m = (h + H_n)$ é a altura média da seção entre os centroides das faces. Então,

$$E_{eq}I_z = 2E_fI_{zf} + E_nI_{zn} = 4,42 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2,\ I_z = \frac{bH^3}{12} = 8,87 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

o que gera o módulo equivalente $E_{eq} = 49,7$ GPa. $H = H_n + 2h$ é a altura total da seção. A tensão normal pode ser obtida nas cotas extremas do núcleo e das faces. As coordenadas extremas da face superior são $y_{fi} = \pm H_n/2 = \pm 100$ mm e $y_{fs} = \pm H/2 = \pm 110$ mm, em sua superfície interna e externa. As cotas extremas do núcleo são $y_n = y_{fi} = \pm 100$ mm em suas faces externas. Então, as tensões são

$$\begin{aligned} \sigma_{fi} &= -E_f \frac{M_z}{E_{eq}I_z} y_{fi} = 135{,}9 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{fs} = -E_f \frac{M_z}{E_{eq}I_z} y_{fs} = 149,5 \text{ MPa}, \\ \sigma_n &= -E_n \frac{M_z}{E_{eq}I_z} y_n = 1,36 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{8.69}$$

Essas tensões são ilustradas na Figura 8.5a.

Usando a **formulação simplificada**, eqs.(8.66)-(8.67), temos

$$E_{eq}I_z = E_f \frac{bhH_m^2}{2} = 4,41 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2 \quad \text{e} \quad E_{eq} = E_f \frac{6h}{H_m} = 57 \text{ GPa}. \tag{8.70}$$

A distribuição de tensões considera que a tensão normal no núcleo é nula, e nas faces são constantes na espessura, como na Figura 8.5b. O esforço interno de momento fletor numa seção é equilibrado pelo binário de forças F aplicadas no centroide de cada face como na figura. Esse equilíbrio é representado por

$$\sigma_{fs} = -\sigma_{fi} = -\frac{M_z}{bhH_m} = -142,9 \text{ MPa}. \tag{8.71}$$

Note que a tensão média na face obtida pela formulação completa é 142,7 MPa, de forma que o erro na formulação simplificada é desprezível. Isso ocorre porque, embora a relação $h/H_n = 0,05$ seja grande, a relação $E_n/\ E_f = 20/200000$ é bastante pequena. A distribuição de tensões na seção transversal é ilustrada na Figura 8.5b.

Vigas de concreto armado

Os cálculos para vigas de concreto com reforço de aço não podem ser feitos usando diretamente o equacionamento acima, e requerem uma adaptação. Duas características do concreto, que o distingue dos materiais homogêneos metálicos: serem frágeis, com terem baixa resistência a tração. Essa resistência a tração é tão baixa que as vigas desenvolvem trincas mesmo sob níveis ínfimos de deformação na zona tracionada. Assim, em vigas de concreto reforçado por aço, da fase de concreto, apenas sua parte comprimida é usada nos cálculos de tensão. A parte trativa das tensões devidas à flexão, são suportadas exclusivamente pelo reforço de aço. A mesma argumentação é usada para outros tipos de reforço, como de fibras de carbono ou kevlar, por exemplo, que podem ser usadas em lugar do aço. A função do concreto na região tracionada é múltipla:

- suportar o cisalhamento transversal,
- proteger o aço das intempéries, salinidade, corrosão,
- prover proteção contra fogo para o aço.

Exemplo 8.9 - Viga de concreto armado

Consideramos a viga de seção retangular de concreto com reforços de barras de aço, como na Figura 8.25a. Desejamos identificar (a) a posição da linha neutra, (b) o momento de inércia e (c) os valores

máximos de tensão normal. Os valores são: $E_c = 20$ GPa do concreto, $E_a = 200$ GPa, seção com $b = 250$ mm, $H = 550$ mm. São duas barras de aço, de seção circular com diâmetro $d = 28$ mm, que são alinhadas com centro a uma distância $\bar{Y}_a = 50$ mm a partir da base da seção, como na Figura 8.25a. O esforço de momento fletor na seção é $M_z = 60$ kNm.

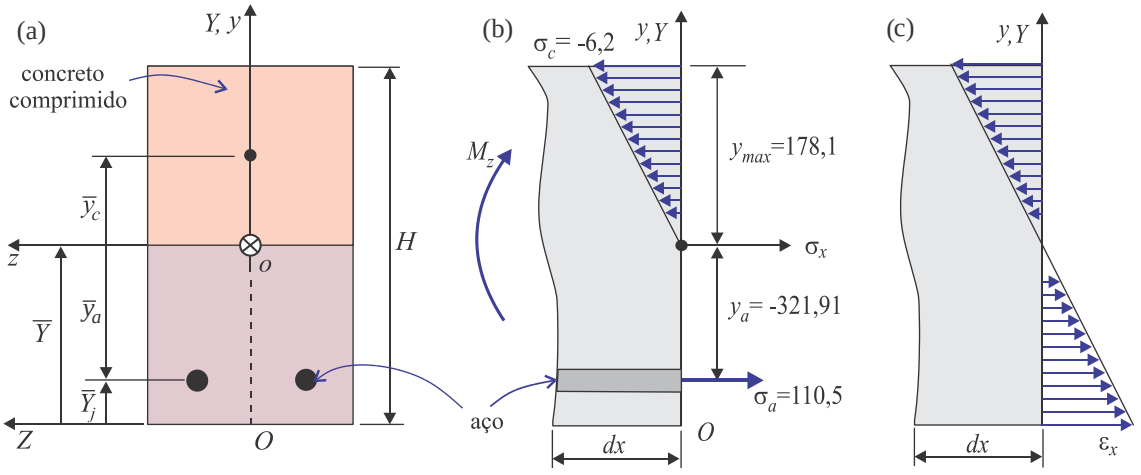


Figura 8.25: (a) parâmetros geométricos da seção; (b) distribuição de deformações; (c) distribuição de tensões.

Solução:
(a) A linha neutra. Inicialmente definimos um sistema de eixos temporário $OXZY$, como na Figura 8.25a, e buscamos a posição $\bar{Y}$ da linha neutra, que define os eixos $Oxyz$. No exemplo, o concreto será considerado apenas em sua região comprimida, i.e., acima da linha neutra. Isso gera uma situação distinta do exemplo anterior de viga de madeira-aço, pois aqui é como se houvesse concreto apenas acima da linha neutra, i.e., numa região ainda desconhecida. Por isso, retomamos as deduções feitas acima para materiais dúcteis, fazendo as adaptações necessárias.

Iniciamos com a adaptação da relação (8.45) de equilíbrio de forças axiais,

$$F_x = -\kappa(x) \int_{\bar{A}} E(y,z) y \, dA = 0 \qquad \rightarrow \qquad \int_{\bar{A}} E(y,z) y \, dA = 0, \tag{8.72}$$

com a provisão que a integração será feita apenas sobre a área $\bar{A}$, que compreende o aço e a parte comprimida do concreto. Usamos a relação entre os eixos paralelos y e Y: $y = Y - \bar{Y}$:

$$\int_{\bar{A}} Ey \, dA - \bar{Y} \int_{\bar{A}} E \, dA = 0. \tag{8.73}$$

Podemos particionar $\bar{A}$ entre a parte comprimida do concreto, A_c^-, e a de aço A_a:

$$\underbrace{E_c \int_{A_c^-} Y \, dA}_{Q_{Zc}^-} + \underbrace{E_a \int_{A_a} Y \, dA}_{Q_{Za}} = \bar{Y} \left[\underbrace{E_c \int_{A_c^-} dA}_{A_c^-} + \underbrace{E_a \int_{A_a} dA}_{A_a} \right]. \tag{8.74}$$

$Q_{Zc}^- = A_c^- \bar{Y}_c^-$ é o momento estático da parte comprimida do concreto em relação ao eixo Z, e $Q_{Za} = \sum_{j=1}^{m} A_{aj} \bar{Y}_{aj}$ é o momento estático do conjunto das n barras, sendo A_{aj} e $\bar{Y}_{aj}$ a área e a coordenada do centroide de cada barra j. Esses momentos e coordenadas podem ser obtidos em termos dos parâmetros geométricos da seção com auxílio da Figura 8.25a:

$$A_c^- = b(H - \bar{Y}) \qquad \text{e} \qquad \bar{Y}_c^- = \frac{1}{2}(H + \bar{Y}). \tag{8.75}$$

Substituindo em (8.74) temos

$$\frac{1}{2}E_cA_c^-(H+\bar{Y}) + E_a\sum_{j=1}^{m}A_{aj}\bar{Y}_{aj} = \bar{Y}\left[E_cA_c^- + E_aA_a\right]. \tag{8.76}$$

Essa é portanto um polinômio quadrático em termos de $\bar{Y}$. Esse polinômio pode ser explicitado na forma

$$\boxed{a\bar{Y}^2 + b\bar{Y} + c, \text{ onde } \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}bE_c, \\ b = -bE_cH - 2E_aA_a, \\ c = \dfrac{1}{2}bE_cH^2 + E_a\sum_{j=1}^{m}A_{aj}\bar{Y}_{aj}. \end{cases}} \tag{8.77}$$

Substituindo os valores, obtemos a área de uma barra de aço $A_a = \pi d^2/4 = 615,8$ mm^2. Isso resulta em $a = 2,5\cdot10^6$ N/mm, $b = -3\cdot10^9$ N, $c = 7,69\cdot10^{11}$ Nmm, e a raiz útil $\bar{Y} = 371,9$ mm. Então, a área comprimida do concreto é $A_c^- = b\left(H-\bar{Y}\right) = 44.522$ mm^2.

(b) Momento de inércia. Uma vez que a posição da linha neutra tenha sido obtida, a região comprimida do concreto fica conhecida, e o cálculo do momento de inércia pode ser feito da maneira usual, levando em conta apenas a parte útil do concreto, adaptando (10.46):

$$E_{eq}I_z = E_cI_{zc}^- + E_aI_{za}. \tag{8.78}$$

onde I_{zc^-} é o momento da parte comprimida do concreto. Os momentos de inércia de cada fase são

$$\begin{aligned} I_{zc}^- &= \frac{b\left(H-\bar{Y}\right)^3}{12} + A_c^-d_c^2 = 4,71\cdot10^8 \text{ mm}^4, \\ I_{z2} &= 2\pi\frac{d^4}{64} + 2A_ad_a^2 = 1,28\cdot10^8 \text{ mm}^4. \end{aligned} \tag{8.79}$$

$d_c = -\bar{Y} + \left(H+\bar{Y}\right)/2 = 89,0$ mm e $d_a = \left(\bar{Y}_a - \bar{Y}\right) = -321,9$ mm são as coordenadas do centroide de cada fase em relação a z. Com isso, se obtém o momento de inércia da seção $I_z = I_{zc}^- + I_{z2} = 5,98\cdot10^8$ mm^4, o produto $E_{eq}I_z = 3,50\cdot10^{13}$ Nmm^2, e o módulo de elasticidade equivalente da viga $E_{eq} = E_{eq}I_z/I_z = 3,50\cdot10^{13}/5,98\cdot10^8 = 58{,}4$ GPa.

(c) As tensões variam linearmente na parte comprimida de concreto, sendo nula na linha neutra e máxima na cota $y_{\max} = h - \bar{Y} = 178,1$ mm, no valor

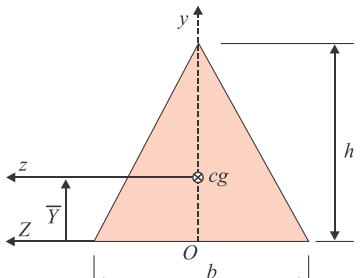
$$\sigma_c^{\max} = -E_c\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_{\max} = -20\cdot10^3\frac{60\cdot10^6}{3,50\cdot10^{13}}(178,1) = -6,11 \text{ MPa}.$$

A coordenada do centroide do aço é $y_a = \bar{Y}_a - \bar{Y} = -321,9$ mm, e a tensão no aço é

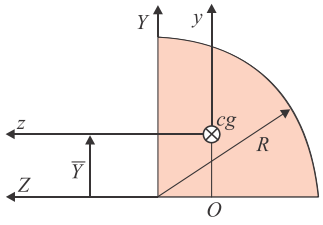
$$\sigma_a = -E_a\frac{M_z}{E_{eq}I_z}y_a = -200\cdot10^3\frac{60\cdot10^6}{3,50\cdot10^{13}}(-321,9) = 110,6 \text{ MPa}. \tag{8.80}$$

8.7 Exercícios

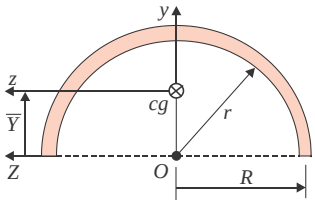
8.1 Deduza a expressão para a posição Y do centroide.



8.2 Idem do Exercício 8.1 para o quarto de círculo.

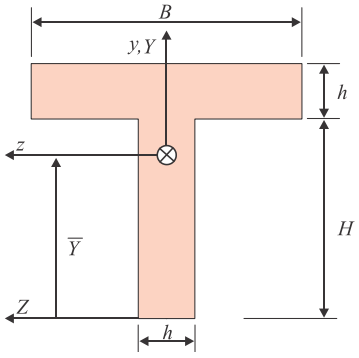


8.3 Idem do Exercício 8.1 para meio tubo circular de parede espessa.

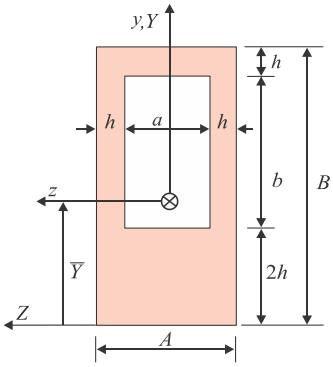


(a) Encontre uma expressão simplificada para o caso de tubo de parede fina, $h << \bar{R}$, onde $\bar{R}$ é o raio médio.

8.4 Idem do Exercício 8.1 para perfil T.



8.5 Idem do Exercício 8.1 viga caixão.



8.6 Determine os momentos de inércia I_z e I_Z para a seção do Exercício 8.1,

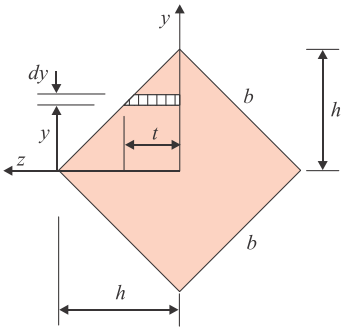
8.7 Idem para o Exercício 8.2.

8.8 Idem para o Exercício 8.3.

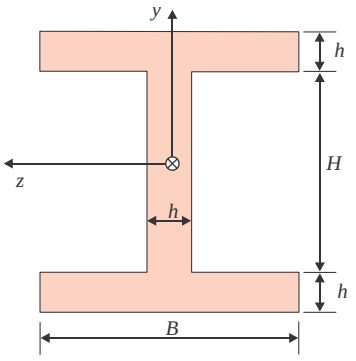
8.9 Idem para o Exercício 8.4.

8.10 Idem para o Exercício 8.5.

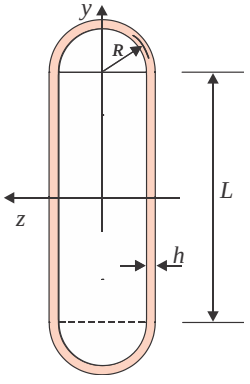
8.11 Determine o momento de inércia I_z.



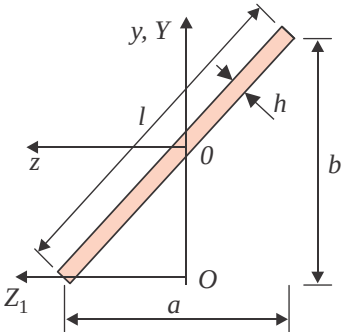
8.12 Idem para perfil I.



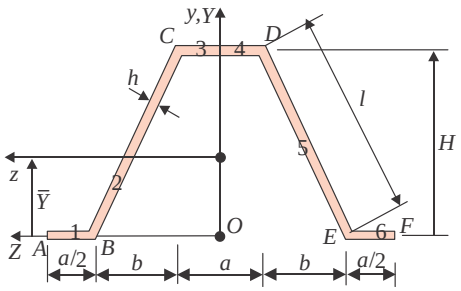
8.13 Idem para perfil tubular alongado.



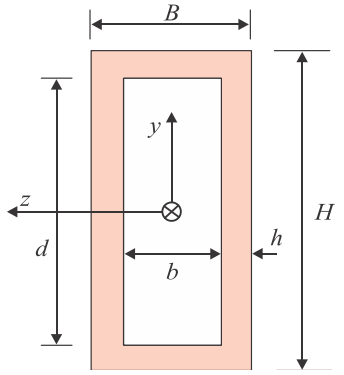
8.14 Deduza as expressões para I_z e I_Z para perfil retangular inclinado.



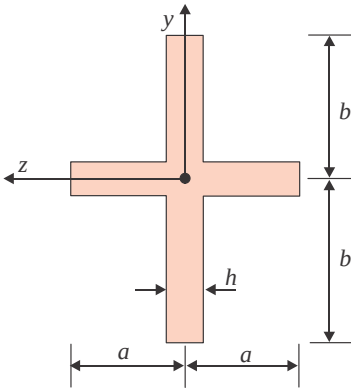
8.15 Deduza a expressão para a posição Y do centroide e para os momentos I_z e I_Z do perfil corrugado.



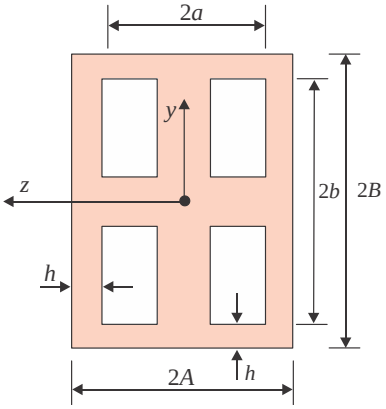
8.16 Deduza a expressão para o momento I_z para a viga caixão.



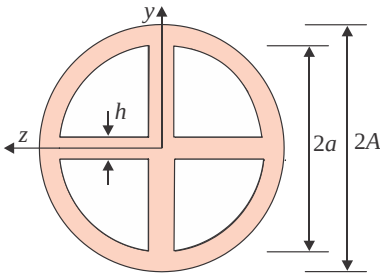
8.17 Idem para perfil em cruz.



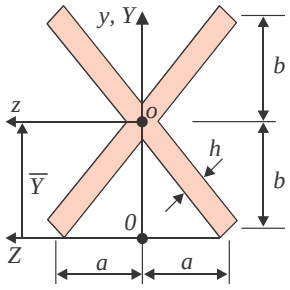
8.18 Idem para perfil caixão com reforço interno.



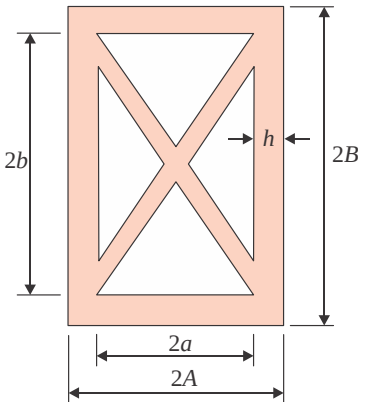
8.19 Idem para perfil tubular com reforço interno.



8.20 Idem para perfil em X.

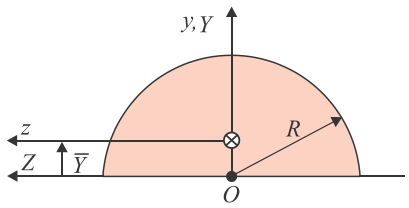


8.21 Idem para perfil caixão com reforço interno.



8.22 Deduza a expressão para a posição Y do centroide e para os momentos I_z e I_Z da

seção semicircular.



Tensões de flexão. Obter o momento de inércia e a tensão normal máxima, para momento fletor $M_z = 300$ kNm exceto onde indicado diferentemente.

8.23 Para a seção transversal dos Exercícios 8.1 e 6 com $b = 15$ mm e $h = 30$ mm, $M_z = 30$ kNm.

8.24 Idem para $b = 10$ mm e $h = 30$ mm.

8.25 Seção dos Exercícios 8.3 e 8 com $r = 10$ mm e $R = 15$ mm, $M_z = 30$ kNm. Resolva como parede espessa e como delgada e compare os resultados.

8.26 Idem $r = 13$ mm e $R = 15$ mm.

8.27 Seção dos Exercícios 8.4 e 9 com $H = 40$ mm e $B = 30$ mm e $h = 10$ mm.

8.28 Idem para $H = 45$ mm e $B = 25$ mm e $h = 8$ mm.

8.29 Seção dos Exercícios 8.5 e 10 com $A = 20$ mm e $B = 40$ mm e $h = 5$ mm.

8.30 Idem para $A = 16$ mm e $B = 45$ mm e $h = 4$ mm.

8.31 Seção do Exercício 8.11 com $b = 30$ mm.

8.32 Idem para $b = 25$ mm.

8.33 Seção do Exercício 8.12 com $B = 20$ mm e $H = 40$ mm e $h = 10$ mm.

8.34 Idem para $B = 15$ mm e $H = 30$ mm e $h = 8$ mm.

8.35 Seção do Exercício 8.13 com raio médio $\bar{R} = 12$ mm, $L = 60$ mm e $h = 4$ mm.

8.36 Idem para $\bar{R} = 12$ mm, $L = 50$ mm e $h = 3$ mm.

8.37 Seção do Exercício 8.15 com $a = b = 12$ mm, $H = 40$ mm e $h = 3$ mm.

8.38 Idem para $a = b = 12$ mm, $H = 50$ mm e $h = 2$ mm.

8.39 Seção do Exercício 8.16 com $B = 20$ mm e $H = 40$ mm e $h = 10$ mm.

8.40 Idem para $B = 20$ mm e $H = 40$ mm e $h = 7$ mm.

8.41 Seção do Exercício 8.17 com $a = 10$ mm, $b = 30$ mm e $h = 5$ mm.

8.42 Idem para $a = 10$ mm, $b = 35$ mm e $h = 4$ mm.

8.43 Seção dos Exercícios 8.18 e 10 com $A = 10$ mm e $B = 25$ mm e $h = 3$ mm.

8.44 Idem para $A = 10$ mm e $B = 20$ mm e $h = 3$ mm.

8.45 Seção do Exercício 8.19 com $A = 20$ mm e $h = 3$ mm.

8.46 Idem para $A = 25$ mm e $h = 2$ mm.

8.47 Seção do Exercício 8.20 com $a = 10$ mm, $b = 15$ mm e $h = 4$ mm, $M_z = 30$ kNm.

8.48 Idem para $a = 10$ mm, $b = 20$ mm e $h = 3$ mm.

8.49 Seção do Exercício 8.21 com $A = 10$ mm, $B = 25$ mm e $h = 2$ mm.

8.50 Idem para $A = 8$ mm, $B = 30$ mm e $h = 2$ mm.

8.51 Seção do Exercício 8.22 com $R = 30$ mm.

8.52 Idem para $R = 20$ mm.

8.53 (a) Deduza a expressão para a posição $\bar{Y}$ do centroide e para os momentos I_z e I_Z da seção. Determine a tensão máxima para $a = 12$ mm, $H = 40$ mm e $h = 3$ mm. (b) Idem para $a = 12$ mm, $H = 50$ mm e $h = 2$ mm.

Viga de dois ou mais materiais

8.54 Refaça o Exemplo 8.7 para $b = 200$ mm, $H = 400$ mm e $h = 10$ mm, $M_z = 60$ kNm.

8.55 Refaça o Exemplo 8.7 se a seção fosse toda de madeira ($h = 0$, $H = 410$ mm) e compare a tensão normal máxima com aquela do Exemplo 8.7, com $M_z = 60$ kNm.

8.56 A seção transversal de uma viga sanduíche é constituída por um núcleo de madeira de espessura H_n e duas faces de chapa de aço de espessuras h. Determine a distribuição de tensões e o módulo de elasticidade equivalente. $b = 150$ mm, $H_n = 300$ mm, $h = 15$ mm, madeira com $E_m = 10$ GPa, e faces de aço com $E_f = 200$ GPa. $M_z = 30$ kNm.

8.57 Refaça o Exercício 8.56 com $b = 200$ mm, $H_n = 400$ mm, $h = 10$ mm.

8.58 Refaça o Exercício 8.56 $b = 200$ mm, $H_n = 400$ mm, $h = 5$ mm, com núcleo de espuma de poliuretano de $E_m = 500$ MPa, e faces de aço com $E_f = 200$ GPa. $M_z = 30$ kNm.

8.59 Refaça o Exercício 8.56 com faces de alumínio de $E_f = 70$ GPa.

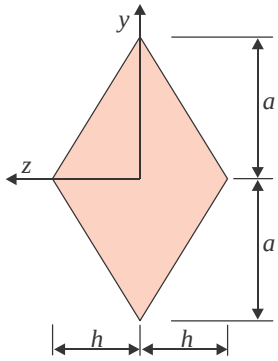
8.60 Refaça o Exercício 8.56 considerando a hipótese usual em sanduíches estruturais, de que a espessura das faces é $h << H_n$ e o módulo de elasticidade do núcleo é muito menor que das faces, $E_m << E_f$, de forma a usar $E_m = 0$, e considerando que a tensão normal nas faces seja uniforme ao longo da espessura. Determine o módulo de elasticidade equivalente e a tensão nas faces. Use $b = 150$ mm, $H_n = 300$ mm, $h = 15$ mm, núcleo de espuma de poliuretano de $E_m = 500$ MPa, e faces de aço com $E_f = 200$ GPa. $M_z = 30$ kNm.

8.61 Refaça o Exercício 8.60 com os dados do Exercício 8.58 e compare os resultados do Exercício 8.58.

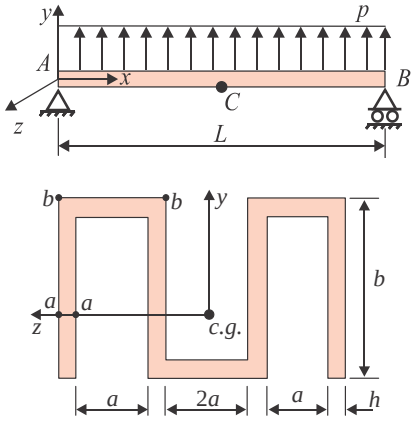
8.62 Considere a viga de concreto armado do Exemplo 8.9, com $b = 150$ mm, $H = 500$ mm, $d = 25$ mm, $E_c = 20$ GPa, $E_a = 200$ GPa e $\bar{Y}_a = 40$ mm.

8.63 Refaça o Exercício 8.62 com $b = 150$ mm, $H = 450$ mm, $d = 30$ mm, $E_c = 20$ GPa, $E_a = 200$ GPa e $\bar{Y}_a = 40$ mm.

8.64 Determine o momento de inércia I_z.



8.65 A viga biapoiada é submetida a uma carga distribuída uniforme p e tem a seção transversal formada por uma chapa corrugada de espessura h como na figura. (a) prove ou explique que o centroide se localiza à meia altura da seção; (b) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e as seções onde atuam; (c) determine a tensão normal máxima. Use os valores $p = 100$ N/mm, $L = 1,5$ m, $a = 15$ mm, $b = 50$ mm e espessura uniforme $h = 2$ mm.

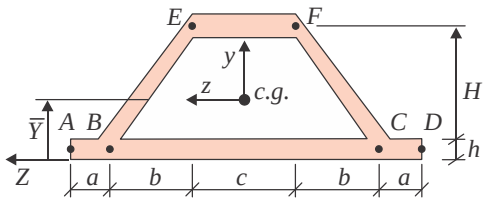


8.66 Refaça o Exercício 65 para $a = 15$ mm, $b = 60$ mm e $h = 3$ mm.

8.67 Refaça o Exercício 65 para $a = 15$ mm, $b = 80$ mm e $h = 3$ mm.

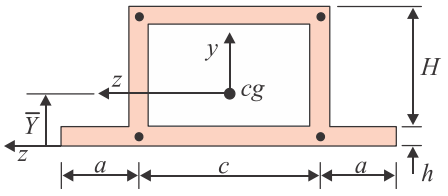
8.68 Considere a viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p para cima e tem a seção transversal de espessura h como na figura. (a) determine a posição $\bar{Y}$ do centroide; (b) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e os pontos onde atuam; (c) determine a tensão normal máxima. Use os valores $p = 1$ N/mm, $L = 1$ m, $a = 15$ mm, $b = 15$ mm, $c = 30$ mm, $H = 30$ mm

e espessura uniforme $h = 3$ mm.

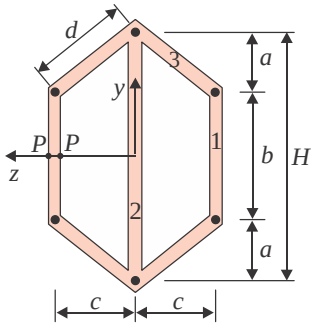


8.69 Refaça o Exercício 68 para $a = 15$ mm, $b = 15$ mm, $c = 30$ mm, $H = 50$ mm e $h = 3$ mm.

8.70 Refaça o Exercício 68 para $a = 15$ mm, $b = 0$ mm, $c = 60$ mm, $H = 30$ mm e $h = 3$ mm. Qual configuração entre esta e a do Exercício 68 é mais eficiente em suportar flexão?

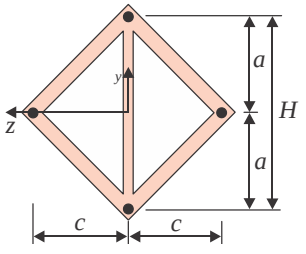


8.71 Considere a viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p para cima com a seção transversal de espessura h como na figura. (a) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e as seções onde atuam; (b) determine a tensão normal máxima. Use os valores $p = 1$ N/mm, $L = 1$ m, $a = 15$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm, e espessura uniforme $h = 3$ mm.



8.72 Refaça o Exercício 71 para $a = 10$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm,.

8.73 Refaça o Exercício 71 para $a = 20$ mm, $b = 0$ mm, $c = 20$ mm.



Capítulo 9

Cisalhamento em vigas sob flexão

Nesse capítulo completaremos o estudo do campo de tensões numa **viga longa sob flexão plana**. Quando o esforço de momento fletor é variável ao longo de um trecho da viga, o esforço cortante é não nulo. Nesse caso, será mostrado que, além das tensões normais (vistas no Capítulo 8), desenvolvem-se também tensões cisalhantes na viga. O conceito de **fluxo de cisalhamento** também será desenvolvido e aplicado em projeto de vigas formadas pela união de barras de seção transversal mais simples.

9.1 Efeitos do esforço cortante

Quando consideramos vigas sob flexão é necessário ter em mente que existe uma relação bem definida entre os esforços de momento fletor e cortantes: são as **equações diferenciais de equilíbrio de viga**, que num problema de flexão plana, no plano xy, são dadas pelas eqs. (2.39):

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y \qquad \text{e} \qquad \frac{dM_y}{dx} = V_z. \tag{9.1}$$

No presente capítulo, para simplificar a notação, nos concentraremos no problema de **flexão plana** definido apenas pelos esforços V_y e M_z. Nota-se que, se o momento varia numa certa região da viga, i.e., se $dM_z/dx \neq 0$, então naquele trecho teremos esforços cortantes não nulos. Via de regra, em quase todas as situações práticas, a simples presença de **forças transversais aplicadas** na viga já é suficiente para gerar um campo de esforços cortantes além de M_z.

Para entender os efeitos do cortante, consideremos a Figura 9.1a, de uma viga em balanço sob carga transversal F. Qualquer que seja o tipo de viga, seus apoios e carregamentos, mesmo que distintos do presente exemplo, em cada seção s existe um esforço cortante, i.e., existe uma função $V_y = V_y(x)$, como ilustrado na figura (b) para a viga em balanço.

Nesse ponto lembramos que o esforço cortante é apenas uma força fictícia, i.e., é a resultante na seção das forças distribuídas associadas as tensões cisalhantes. Na Figura 9.1c temos uma ilustração das tensões cisalhantes atuando na seção transversal s. Como a seção transversal tem normal na direção x e as forças atuam na direção y, a componente de tensão cisalhante atuante tem componentes xy, i.e., temos τ_{xy} atuando na seção s. Então podemos dizer que

$$V_y \equiv \int_A \tau_{xy}\, dA. \tag{9.2}$$

Uma primeira diferença em relação aos problemas de torção e tensões normais em flexão, é que a distribuição de tensões cisalhantes na seção não é constante ou linear. Nos casos gerais a determinação da variação da tensão cisalhante na seção não pode ser feita usando métodos simples, e apenas no caso da **seção retangular** teremos condições de fazer sua determinação precisa, que nesse caso é uma **função parabólica** de y.

O motivo pelo qual τ_{xy} não pode ser constante na seção pode ser entendido com ajuda da Figura 9.1c. Note os pontos A, B e C na seção e os elementos diferenciais mostrados à direita. Devemos lembrar que sempre as tensões cisalhantes atuam em dois pares de força num elemento

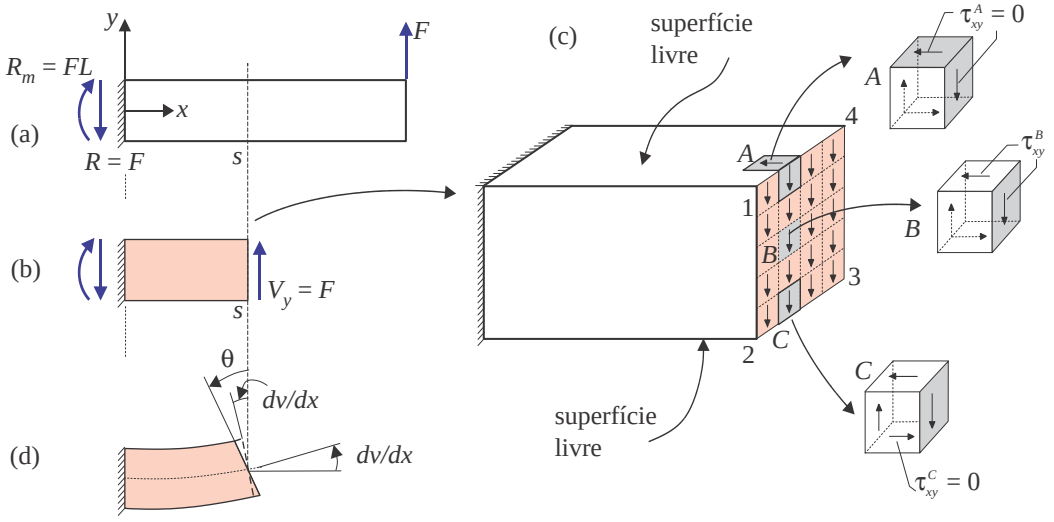


Figura 9.1: Tensões cisalhantes numa seção s em (c) e configuração deformada da seção em (d).

diferencial, i.e., τ_{xy} **sempre atua em quatro termos, de mesmo valor**, devido à condição de equilíbrio, como deduzido em (3.22). Observe o elemento diferencial volumétrico A: ele possui uma face orientada na direção x, i.e., pertence à seção transversal s, e tem outra face contida na superfície superior da viga. Note que a superfície superior é livre de carregamento tangenciais, o que significa cisalhamento nulo naquela face. Logo, no topo da seção transversal devemos ter também que $\tau_{xy}^A = 0$. O mesmo se aplica ao ponto C. De fato, todos os pontos nos contornos superior e inferior da seção devem ter $\tau_{xy} = 0$. Assim, os pontos nos segmentos 14 e 23 (Figura 9.1c) tem $\tau_{xy} = 0$, e os pontos em 12 e 34, tem $\tau_{xy} \neq 0$. Isso se aplica também a seção não retangulares, pelos mesmos motivos, mas a distribuição de tensões será também dependente de z, i.e., $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$.

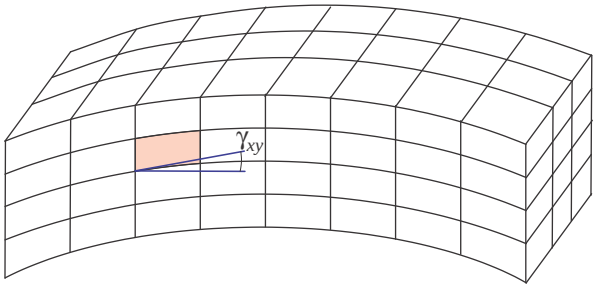


Figura 9.2: Ilustração da configuração deformada, isolando apenas a deformação devida ao cisalhamento transversal, ignorando o efeito do momento.

A configuração deformada da seção transversal da viga pelo efeito do cortante é ilustrada nas Figuras 9.1d e 9.2. A 9.2 ilustra a configuração deformada de um trecho de viga, tomando apenas a deformação devida ao cisalhamento transversal, ignorando o efeito do momento fletor. A deformação está exagerada (multiplicando por um fator de escala) para permitir a visualização. A visualização considera a hipótese que a seção permanece plana, i.e., que o cisalhamento é uniforme em cada seção. Então, o efeito do cisalhamento é apenas o de gerar uma translação vertical em cada seção, sem rotação, como na figura. O elemento diferencial colorido é retangular na configuração indeformada, e na configuração deformada apresenta deformação cisalhante γ_{xy}, que representa o afastamento do ângulo indeformado, que inicialmente era reto.

De fato, a hipótese de seção plana é apenas uma aproximação matemática para gerar uma formulação simples o suficiente para permitir soluções analíticas. Fisicamente, **a seção não se mantém plana**, mas assume uma forma empenada, aproximadamente uma função polinomial cúbica (isso é mais preciso no caso da seção retangular que em qualquer outro tipo de seção). Nesse

livro não trataremos de determinação da configuração deformada pelo efeito do cortante, mas apenas do campo de tensões. (Isso pode ser visto, por exemplo, em Mendonça[6].

Observando a Figura 9.1d, temos uma configuração da seção transversal que se rotaciona pelo ângulo dv/dx, que é o ângulo da tangente da linha neutra. Essa é o ângulo associado à hipótese de Euler-Bernoulli (hipótese de viga longa ou viga delgada), tal que a seção permanece plana e perpendicular à linha neutra deformada. Entretanto, na mesma figura, se visualiza o ângulo θ de rotação da seção. Quando se considera flexão pura, i.e., apenas momento fletor $M_z \neq 0$, e ausência do efeito do esforço cortante, $V_y = 0$, naturalmente se tem $\theta = dv/dx$. A presença do esforço cortante, gera um cisalhamento transversal na seção. Se fazemos a hipótese que a seção transversal da viga se mantém plana, seu ângulo de rotação é um valor θ distinto de dv/dx, como visualizado na Figura 9.1d. O ângulo de distorção é a deformação cisalhante transversal γ_{xy}, dada por

$$\gamma_{xy} = \theta - \frac{dv}{dx}, \tag{9.3}$$

sendo que o cisalhamento varia ao longo de y, $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)$ e, em seções não retangulares, varia também em z: $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z)$.

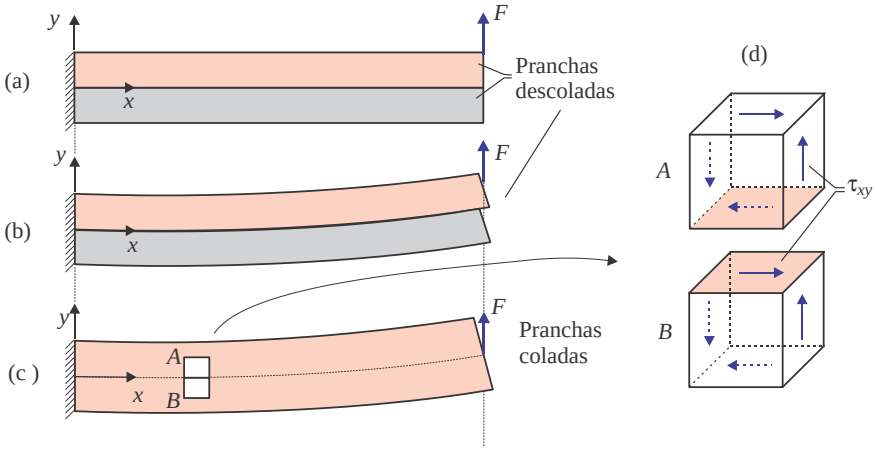


Figura 9.3: Pranchas descoladas em (a) e (b) e coladas em (c).

A associação entre o cortante e a tensão cisalhante na **seção transversal** é intuitiva, como ilustrado na Figura 9.1c. Entretanto, o efeito do cisalhamento nas **superfícies normais ao eixo** y não é tão evidente. Observe uma viga formada por duas barras simplesmente encostadas uma à outra, em balanço, como na Figura 9.3a. A configuração deformada é como na figura (b). Ocorre um deslizamento na interface entre as pranchas, que se torna visível neste exemplo na descontinuidade da extremidade livre. Por outro lado, se as pranchas forem coladas, o conjunto passa a se comportar como uma única viga, como na Figura 9.3c. O deslizamento na interface é impedido e ocorre o empenamento da seção transversal. Note que a barra contínua pode ser pensada como a união de infinitas barras de espessuras infinitesimais coladas uma sobre a outra, de forma que o efeito na interface da figura (b) pode ser visto em qualquer das infinitas interfaces horizontais da viga.
Observação: Como conclusão, se pode afirmar que, como efeito do esforço cortante na seção transversal, em cada interface horizontal, paralela ao plano xz, atua um par de tensões cisalhantes τ_{xy}, como ilustrado nos elementos diferenciais da Figura 9.3d, atuando nas áreas coloridas.

Efeitos na teoria de tensões normais de flexão

Quando aplicamos cargas transversais numa viga temos, em geral, a presença simultânea de esforços de momentos fletores e esforços cortantes exceto em situações muito particulares de trechos com momento constante. Uma análise mais detalhada do problema mostra que o efeito do empenamento e do cisalhamento transversal da seção reduz-se com o aumento da relação L/h (comprimento / altura) de viga, i.e., em vigas longas a seção permanece aproximadamente plana e perpendicular à

superfície neutra. O efeito do cisalhamento na deflexão transversal em relação a L/h é ilustrado no Capítulo 14, página 519, como o auxílio de conceitos de energia de deformação.

Dessa forma, o procedimento usual em engenharia consiste em:

(a) Determinar sempre σ_x usando a fórmula de flexão, qualquer que seja o aspecto L/h da viga. Isso é feito sob a hipótese que o cisalhamento transversal não afeta sensivelmente as tensões normais da teoria de flexão pura.

(b) Determinar τ_{xy} usando as teorias do presente capítulo, nos casos recomendados que serão listados posteriormente;

(c) Em problemas que assim o exijam, determinar a deflexão transversal usando a teoria de flexão de vigas longas, conforme descrito no Capítulo 12, i.e., levando em conta apenas o momento fletor;

(d) Caso a viga seja curta ($L/h \lesssim 10$), é provado que a presença do cortante faz com que a deflexão real seja superior àquela calculada pela teoria de vigas longas. Em algumas aplicações pode ser necessário calcular a correção no deslocamento devido ao cortante. Isso é mais importante, por exemplo, em cálculos dinâmicos de eixos de rotores de alta velocidade (acima de algo como 30.000 rpm) e vigas curtas de materiais compostos.

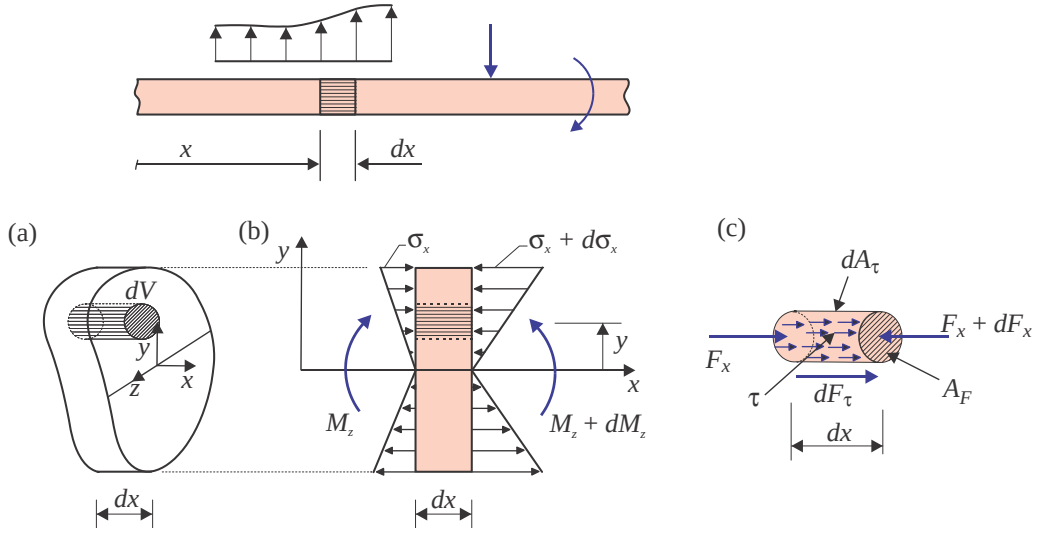


Figura 9.4: Tensões normais e cisalhantes num cilindro axial de seção arbitrária A_F imerso na viga.

9.2 Fluxo de cisalhamento e tensão cisalhante

Consideremos um segmento de **viga reta** submetido a um carregamento transversal arbitrário. Suponhamos que o problema seja isostático e que já determinamos a função de esforços cortantes $V_y(x)$ em cada seção, e de momentos fletores $M_z(x)$. Consideremos um elemento diferencial de volume da viga, de comprimento diferencial dx, i.e., o volume é um cilindro $dV = Adx$, onde A é a área da seção transversal, como ilustrado na Figura 9.4a. Como $M_z(x)$, no caso geral, não é constante, M_z varia de seção a seção. Então, nas duas faces de dV, de coordenadas x e $(x+dx)$, os momentos são M_z e $M_z + dM_z$ como na Figura 9.4b. Então, para cada cota y, as tensões normais σ_x em cada face são também diferentes numa e noutra face, dadas por σ_x e $(\sigma_x + d\sigma_x)$, através da **fórmula de flexão** (8.13), página 282, temos

$$\begin{aligned}
&\text{Face esquerda, de coordenada } x && \rightarrow \sigma_x(x) = -\frac{M_z(x)}{I_z}y, \\
&\text{Face direita, de coordenada } (x+dx) && \rightarrow \sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + d\sigma_x, \\
& && \quad = -\frac{M_z(x)}{I_z}y - \frac{dM_z(x)}{I_z}y.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Agora, consideremos uma parte qualquer desse volume, um outro volume dV' na forma de um cilindro axial de seção transversal com formato arbitrário de área A_F (não necessariamente circular como na figura) e comprimento dx, i.e., $dV' = A_F dx$, como ilustrado nas partes hachuradas das Figuras 9.4a e (b). **O formato da área A_F da seção transversal do cilindro pode ter qualquer formato**. A superfície lateral desse cilindro tem área A_τ. O diagrama de corpo livre deste volume aparece na figura (c). As forças resultantes que atuam nas faces A_F a esquerda e direita são diferentes, F_x e $(F_x + dF_x)$. Essas forças são resultantes das tensões normais σ_x e $(\sigma_x + d\sigma_x)$ atuantes nessas faces. Como as forças nas faces são distintas, elas devem ser equilibradas por uma terceira força, dF_τ, que é a força resultante das tensões cisalhantes atuantes na superfície lateral A_τ do cilindro (Figura 9.4c). **Um ponto importante aqui é observar que τ não é uniforme ao longo do perímetro da superfície lateral A_τ**. Assim, em lugar de buscar a tensão, trataremos inicialmente de uma quantidade denominada **fluxo de cisalhamento** $q(x)$, definido como

$$\boxed{q(x) \equiv \frac{dF_\tau}{dx}} \tag{9.5}$$

i.e., q é a força tangente na área lateral do sub volume dV', por unidade de comprimento longitudinal da viga, nas proximidades da seção de coordenada x.

A expressão para determinar o fluxo de cisalhamento é obtida primeiramente escrevendo a condição de equilíbrio em x do elemento diferencial dV' da Figura 9.4c:

$$F_x - (F_x + dF_x) + dF_\tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad -dF_x + dF_\tau = 0 \tag{9.6}$$

As forças F_x e $(F_x + dF_x)$ são provenientes da tensão normal, que por sua vez é proveniente do momento fletor e da fórmula de flexão (9.4). Assim, (9.6) fica

$$-\int_{A_F}\left(-\frac{dM_z}{I_z}y\right)\, dA_F + dF_\tau = 0. \text{ Logo,}$$

$$-\frac{dM_z}{I_z}\underbrace{\int_{A_F} y\, dA_F}_{Q_F} = dF_\tau, \qquad \text{onde define-se} \qquad \boxed{Q_F \equiv \textstyle\int_{A_F} y\, dA_F} \tag{9.7}$$

Q_F é **o momento estático da área A_F em relação ao eixo principal** z. Dividindo a equação acima por dx temos

$$\underbrace{-\frac{dM_z}{dx}}_{V_y(x)}\frac{Q_F}{I_z} = \underbrace{\frac{dF_\tau}{dx}}_{q(x)} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{q(x) = \frac{V_y Q_F}{I_z}} \tag{9.8}$$

onde usamos (9.1) e (9.5). Na equação, temos as seguintes definições:

- $q(x)$ é a força cisalhante por unidade de comprimento atuando nas laterais do elemento cilíndrico,
- Q_F é o momento estático da área A_F em relação ao eixo principal z,
- A_F é a área da face do cilindro, e
- I_z é o segundo momento de inércia da seção completa em relação a z.

A forma da área A_F pode ser qualquer, como ilustrado nas diversas regiões hachuradas na Figura 9.5. Qualquer que seja ela, o **momento estático é dado por**

$$\boxed{Q_F = A_F \overline{Y}_F} \tag{9.9}$$

onde $\overline{Y}_F$ é a coordenada do centroide de A_F em relação ao eixo principal z. A Figura 9.5 mostra áreas hachuradas A_F definidas por cortes, horizontais, verticais e inclinados, todos retos, como também poderiam ter sido curvos. Em qualquer caso, a força axial de cisalhamento nas laterais longitudinais da área A_F podem ser obtidas como q calculado em (9.8).

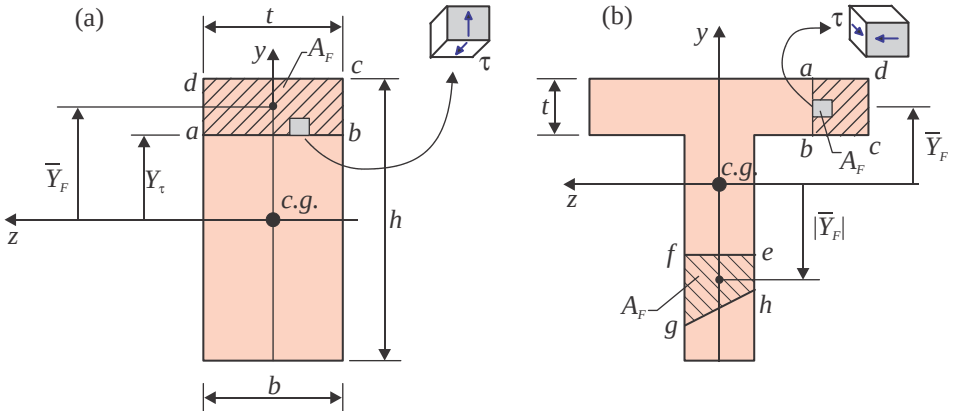


Figura 9.5: Algumas seções transversais de viga e diversas áreas onde se pode calcular o fluxo de cisalhamento q, que é associado ao momento estático Q_F, onde $Q_F = A_F \overline{Y}_F$.

9.2.1 Tensão cisalhante

Observemos novamente a Figura 9.4c do elemento cilíndrico axial de seção transversal arbitrária A_F. Na definição do fluxo de cisalhamento q em (9.5), dividimos a força total dF_τ pelo comprimento dx, o que nos dava uma força por unidade de comprimento de cilindro interno. **Esse valor é sempre exato para qualquer formato de** A_F. Por outro lado, podemos imaginar uma quantidade definida por dF_τ/dA_τ, onde dA_τ é a área da superfície lateral do cilindro como na Figura 9.4c. Essa quantidade dF_τ/dA_τ teria unidades de tensão, e de fato pode ser considerada uma **tensão cisalhante média**. Entretanto, essa quantidade possui pouca utilidade prática num caso geral, uma vez que as tensões cisalhantes variam fortemente em torno da superfície lateral dA_τ.

Em alguns casos particulares, entretanto, a definição será útil, como veremos a seguir. Definimos a **fórmula de cisalhamento** em vigas como

$$\boxed{\tau \equiv \frac{dF_x}{dA_\tau}} \tag{9.10}$$

onde dA_τ é a área da superfície lateral do cilindro onde a tensão é não nula.

As únicas situações em que (9.10) pode produzir valores úteis é quando o cilindro tem uma superfície lateral em que se prevê uma distribuição simples da tensão cisalhante. A Figura 9.5 ilustra alguns casos:

1. No caso da seção retangular, A_F na Figura 9.5a é definida na forma de um retângulo onde três lados (superfície bc, cd e da) coincidem com a superfície externa da própria viga, **onde sabemos, a priori, que a tensão cisalhante é nula**, uma vez que são superfícies livres de carregamento tangencial. Só a superfície ab de A_F possui interface com o resto da seção, de forma que toda a força dF_x usada em (9.10) no cálculo de τ é aplicada através da superfície ab. Aqui, **essa linha é tomada como reta, paralela ao eixo** z. Isso é feito assim de acordo com a previsão de que as tensões cisalhantes tenham pouca variação ao longo da linha ab (no caso particular da seção retangular τ é realmente quase uniforme ao longo de z).

2. No exemplo da seção T da Figura 9.5b, ilustramos duas regiões hachuradas, uma no flange (em cima) e outra na alma. No cilindro cortado no flange, como a extensão do corte ab é pequena em perfis T usuais, pode-se prever uma pequena variação na tensão cisalhante ao longo de ab. Assim (9.10) fornecerá um valor médio útil. (As tensões nas superfícies externas bc, cd e da são nulas.) Por outro lado, no cilindro da alma (em baixo), temos duas superfícies internas, ef e gh, onde as tensões serão distintas uma da outra. O valor dado em (9.10) não seria então de muito uso, pois forneceria a média da soma de ambas as distribuições.

Se o cilindro é definido de forma a interceptar a seção transversal apenas ao longo de um único segmento reto de comprimento t, horizontal em relação ao eixo z, como na Figura 9.5a, podemos obter uma fórmula direta para a tensão cisalhante média na interface ab. Como a área lateral do cilindro que suporta tensões é $dA_\tau = t\ dx$, (9.10) fica

$$\tau = \frac{dF_x}{dA_\tau} = \frac{1}{t}\underbrace{\frac{dF_x}{dx}}_{q}. \tag{9.11}$$

Entretanto, dF_τ/dx é o fluxo de cisalhamento q na interface ab. Tomando q de (9.8), temos finalmente a expressão para a tensão cisalhante média em ab:

$$\boxed{\tau = \frac{V_y Q_F}{t I_z}} \tag{9.12}$$

onde

τ	= tensão cisalhante média na superfície ab (Figura 9.5a);
V_y	= esforço cortante na seção da viga, na direção do eixo principal y. (Aqui consideramos que todo o carregamento transversal está na direção y).
I_z	= segundo momento de inércia da seção em relação no eixo principal z;
Q_F	= momento estático da área A_F em relação no eixo z, equação (9.9) e Figura 9.4.
t	= comprimento da linha reta de interface entre o cilindro e o resto da seção da viga. É o comprimento da interface que suporta as tensões de cisalhamento.

9.3 Casos particulares

Algumas seções notáveis como **seção retangular, circular e alguns perfis** são mais usadas, de forma que analisamos aqui suas distribuições de tensão e algumas limitações da fórmula (9.12).

9.3.1 Seção retangular

Esse é o caso mais simples. Consideremos o cilindro com área transversal A_F definido na Figura 9.5a. Se usamos a área hachurada A_F em (9.12) as tensões cisalhantes obtidas serão aquelas atuando nos pontos de cota y_τ da seção, i.e.,

$$\tau(x, y_\tau) = \frac{V_y Q_F(y_\tau)}{t I_z}. \tag{9.13}$$

O momento estático Q_F é obtido por $Q_F = A_F \overline{Y}_F$, onde a posição do centroide de A_F é $\overline{Y}_F = (h/2 + y_\tau)/2$, e a área é $A_F = b(h/2 - y_\tau)$. O momento de inércia é $I_z = bh3/12$ e $t = b$. Então,

$$\tau(x, y_\tau) = \frac{V_y b(h/2 - y_\tau)(h/2 + y_\tau)/2}{b(bh^3/12)} \quad \xrightarrow{\text{simplificando}} \quad \boxed{\tau(x, y_\tau) = \frac{6V_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y_\tau^2\right)} \tag{9.14}$$

Essa é uma distribuição parabólica de τ na seção da viga, ao longo de y, como ilustrado na Figura 9.6. O valor máximo ocorre ao longo da linha neutra, em $y_\tau = 0$:

$$\boxed{\tau_{\max}(x) = \tau(x, y_\tau = 0) = \frac{3V_y}{2A} = 1,5\overline{\tau}} \tag{9.15}$$

onde foi usado o fato que a área da seção completa é $A = bh$. Também, V_y/A é a **tensão cisalhante média** $\overline{\tau}$ na seção. **Então, (9.15) mostra que a tensão cisalhante máxima numa seção retangular é 50 % superior ao valor da tensão média.**

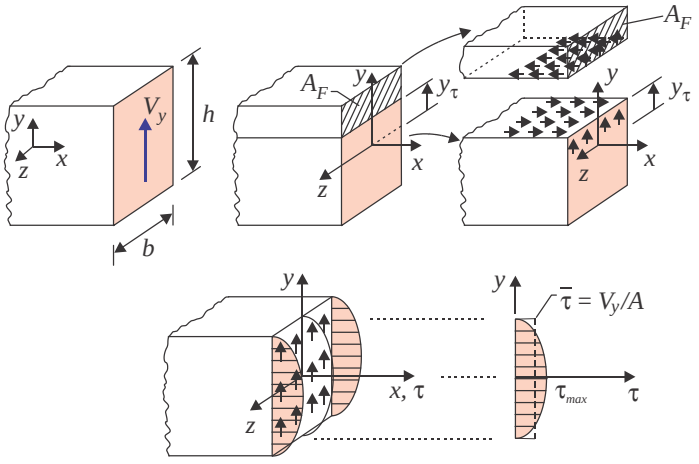


Figura 9.6: Distribuição de tensões cisalhantes numa viga reta de seção retangular.

9.3.2 Distribuição real de tensões cisalhantes na seção retangular

A solução dada pela presente teoria, sintetizada nas equações (9.14) e (9.15) para seção retangular, e Figura 9.6), representam uma distribuição independente de z, e dependente apenas de y numa dada seção. Entretanto, usando a teoria de elasticidade tridimensional, é possível verificar que na solução correta do problema τ varia também com z.

A Figura 9.7 mostra a solução de elasticidade para a distribuição de tensões cisalhantes numa seção retangular larga, com $b/h = 3$, comparada à a solução teórica da equação (9.15). **Em geral, quanto mais estreita for a seção (b/h pequeno), menor o erro da equação (9.15)**. Por exemplo, para $b/h = 0,5$ o erro é de cerca de 3 %, enquanto para $b/h = 2$ o erro é aproximadamente 40 % [4].

A principal aplicação da presente teoria é na determinação de tensão média máxima que ocorre na linha neutra em perfis estruturais (T, I por exemplo), que ocorre na alma, onde a espessura é pequena e o erro é mínimo.

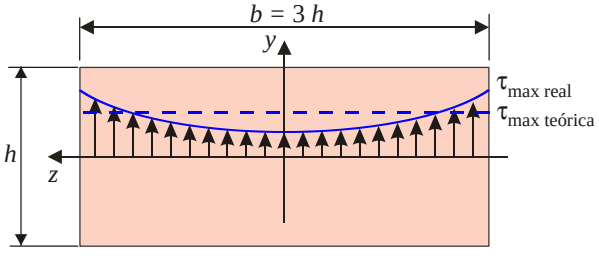


Figura 9.7: Distribuição teórica da equação (9.15) e real, obtida por elasticidade, ao longo da linha neutra de uma seção retangular.

9.3.3 Seção circular

Aplicaremos a teoria, equação (9.12), no problema de cisalhamento numa viga reta de seção circular. Os diversos parâmetros na fórmula são: I_z, que na seção circular é $I_z = \pi d^4/64$, V_y que é considerado pré-determinado, e Q_F e t que merecem tratamento próprio. Para isso considere a Figura 9.8a, onde identificamos na seção transversal uma região colorida A_F definida acima de uma linha reta ab paralela ao eixo z, com cota y_τ. Buscaremos então o valor médio de τ_{xy} na interface de material de cota y_τ. Então a largura t depende de y_τ, i.e., $t = t(y_\tau)$ e $Q_F = Q_F(y_\tau)$. As determinações dessas dependências são feitas usando trigonometria. Primeiro considerando o triângulo cfb, o teorema de Pitágoras gera $(d/2)^2 = y_\tau^2 + (t/2)^2$), de forma que

$$t(y_\tau) = \sqrt{d^2 - 4y_\tau^2}. \tag{9.16}$$

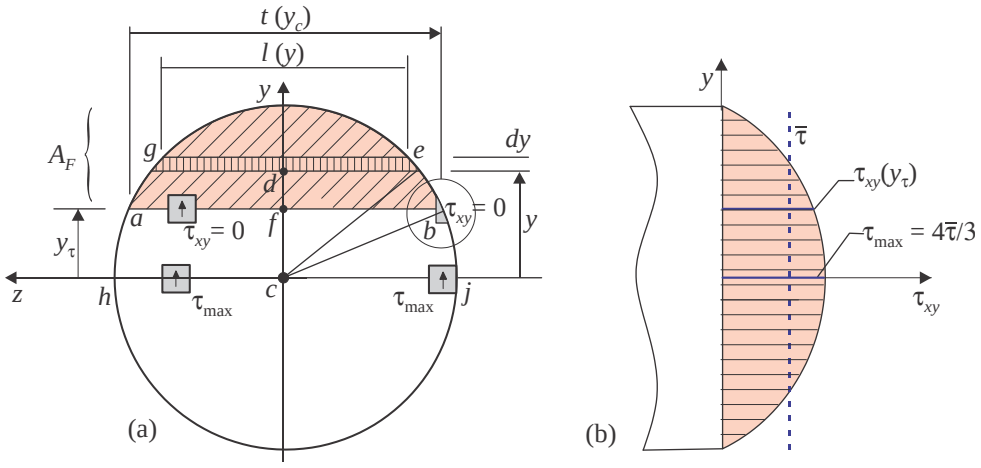


Figura 9.8: (a) Determinação dos parâmetros da fórmula (9.12) para τ_{xy}; (b) distribuição teórica parabólica de τ_{xy} e tensão média $\bar{\tau} = V_y/A$.

Para o momento estático Q_F, partimos da definição (9.7), $Q_F \equiv \int_{A_F} y\, dA_F$, e definimos um elemento diferencial de área $dA_F = l(y)dy$ como na Figura 9.8a. Assim,

$$Q_F = \int_{y=y_\tau}^{d/2} y l(y)\, dy. \tag{9.17}$$

onde $l(y)$ é a largura da linha eg, de cota y como na figura. Novamente, usando o teorema de Pitágoras no triângulo ced temos $(d/2)^2 = y^2 + (l/2)^2$. Logo,

$$l(y) = \sqrt{d^2 - 4y^2}. \tag{9.18}$$

Levando (9.18) a (9.17), e integrando e simplificando, obtemos o momento estático:

$$Q_F(y_\tau) = \frac{1}{12}\left[d^2 - 4y_\tau^2\right]^{3/2}. \tag{9.19}$$

Finalmente, usando t e Q_F de (9.16) e (9.19), a tensão vem de (9.12) como:

$$\tau_{xy}(y_\tau) = \frac{V_y}{I_z}\frac{Q_F(y_\tau)}{t(y_\tau)} = \frac{V_y}{(\pi d^4/64)}\frac{\frac{1}{12}[d^2 - 4y_\tau^2]^{3/2}}{[d^2 - 4y_\tau]^{1/2}}.$$

Simplificando, e observando que a área da seção é $A = \pi d2/4$, temos finalmente

$$\boxed{\tau_{xy}(y_\tau) = \frac{\pi V_y}{3A^2}(d^2 - 4y_\tau^2)} \tag{9.20}$$

Esta é uma função parabólica de y_τ, como ilustrado na Figura 9.8b. O valor máximo ocorre ao

longo da linha neutra, $y_\tau = 0$, onde Q_F é máximo (ver equação (9.19)), e vale

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{4V_y}{3A}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \tau_{\max} = \frac{4}{3}\overline{\tau}} \tag{9.21}$$

Então, a teoria prevê que a tensão máxima na seção circular é 33 % maior que a tensão média V_y/A.

Limitações

As limitações na aplicação da teoria à seção circular são muito mais severas que aquelas da seção retangular, devido à curvilineidade do contorno da seção. De fato, a teoria de elasticidade [4] mostra que τ_n deve ser nula em todo o contorno da seção (Figura 9.9), onde τ_n é a componente da tensão cisalhante na superfície da viga. Como $\tau_{xz} = 0$, então se prova que $\tau_n = \tau_{xy}$, que deve ser nulo na seção, exceto nos pontos diametrais j e h. A distribuição real de τ_{xy} varia ao longo de z, diferentemente da distribuição uniforme prevista em (9.20). **Entretanto, a solução aproximada (9.21) ao longo da linha neutra é razoavelmente precisa e é usada em engenharia.**

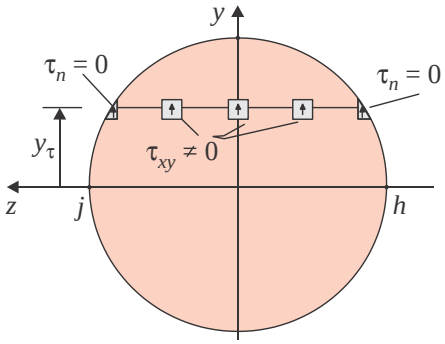


Figura 9.9: Tensões cisalhantes τ_{xy} reais no contorno de seção circular obtidas pela solução das equações gerais de elasticidade tridimensional, com variação de τ_{xy} ao longo de z.

Exemplo 9.1 - Cisalhamento em viga de seção I

Considere a viga de aço ilustrada na Figura 9.10a, de perfil normalizado I de tamanho nominal 101,6 mm I 14,1 kg/m. Determine a distribuição teórica de tensões cisalhantes na seção de maior esforço cortante. Comprimento $L = 200$ mm.

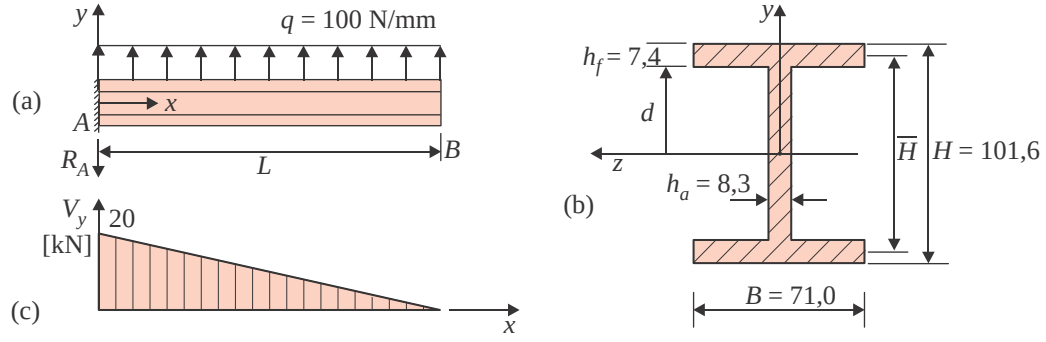


Figura 9.10: Dados do Exemplo 9.1 e diagrama de cortantes. Comprimentos em mm.

Solução:

Etapa 1 – Caso o perfil não fosse normalizado, deveríamos proceder à determinação da **área** e do **momento de inércia** da seção (e da posição do centroide e determinação dos eixos principais,

caso a seção não possua plano de simetria). No presente caso, entretanto, simplesmente obtemos os dados geométricos da seção usando uma norma adequada, que pode ser ABNT, ASME, ou ISO, por exemplo. Assim as dimensões obtidas são aquelas mostradas na Figura 9.10b, com área $A = 1.780$ mm^2 e $I_z = 2,79 \cdot 10^6$ mm^4.

Etapa 2 – Determinação das **reações e esforços** cortantes. Como o problema é isostático, se pode facilmente resolver o problema, obtendo a reação no apoio $R_A = 20$ kN e o diagrama de V_y mostrado na Figura 9.10c. Logo, o cortante máximo é $V_y = 20$ kN, e ocorre na seção A.

Etapa 3 – Aplicação da teoria (equação(9.12)) à seção transversal A. Como se trata de um perfil, torna-se complicado determinar uma equação fechada para τ_{xy} em função de y_τ. Em vez disso, realizaremos os cálculos apenas para algumas posições na seção. Essas posições são as linhas horizontais 12, 34 etc., ilustradas na Figura 9.11.

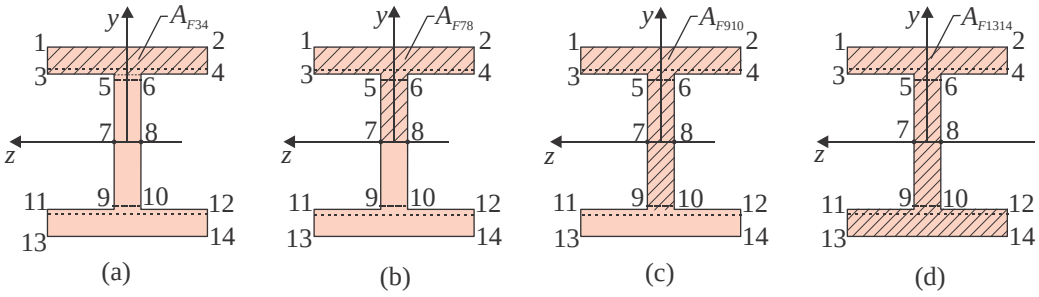


Figura 9.11: Identificação de cortes na seção para cálculo do momento Q_F.

Tensão no flange, linha 34. Na Figura 9.11a temos hachurada a área A_{F34}, que fica acima da linha 34 onde desejamos estimar τ_{xy}. Essa linha é posicionada infinitesimalmente próxima junção da alma com o flange, porém acima da junção. Então o corte 34 é feito de forma a interceptar a seção ao longo da linha tracejada de comprimento igual à largura do flange, e em (9.12) a largura t é $t_{34} = B = 71,0$ mm. O momento estático é $Q_{F34} = A_{34}\overline{Y}_{34}$, onde $\overline{Y}_{34}$ é a coordenada do centroide de A_{34}, dada por $\overline{Y}_{34} = (H - h_f)/2 = (101,6/2 - 4,7)/2 = 47,1$ mm. Assim,

$$Q_{F34} = A_{34}\overline{Y}_{34} = (Bh_f)\overline{Y}_{34} = (71 \times 7,4)47,1 = 24.746 \text{ mm}^3.$$

Então, de (9.12), a tensão em qualquer ponto ao longo de 34 é **estimada** como

$$\tau_{xy}^{34} = \frac{V_y Q_{F34}}{t_{34} I_z} = \frac{20.000 \times 24.746}{71 \times 2,79 \cdot 10^6} = 2,5 \text{ MPa}.$$

Tensão no flange, linha 12. A tensão ao longo da linha superior da seção, 12, pode ser prontamente identificada como zero: uma vez que a área acima da linha, $A_{12} = 0$, o momento estático Q_{F12} também é nulo e $\tau_{xy}^{12} = 0$.

Tensão no flange, linha 56. Notamos que essa linha é feita de forma a interceptar a seção apenas na alma, i.e., as tensões são aplicadas apenas ao longo da largura da alma, de forma que em (9.12) a largura t é $t_{56} = h_a = 8,3$ mm. A área acima de 56, A_{56}, é a mesma área acima de 34, i.e., $A_{56} = A_{34} = Bh_f$, uma vez que as linhas 34 e 56 são infinitesimalmente próximas. Assim, $Q_{F56} = Q_{F34} = 24.746$ mm^3. Então, (9.12) produz a tensão $\tau_{xy}^{56} = \dfrac{V_y Q_{F56}}{t_{56} I_z} = \dfrac{20.000 \times 24.746}{8,3 \times 2,79 \cdot 10^6} = 21,4$ MPa. A única diferença em relação à linha 34 é que agora a força cisalhante axial se distribui ao longo de uma largura menor, $t_{56} = 8,3$ mm em vez de $t_{34} = B = 71,0$ mm.

Tensão no flange, linha 78. Para a área definida pela linha neutra, a área A_{F78} é aquela hachurada na Figura 9.11b. O momento Q_{F78} pode ser obtido somando o momento devido ao retângulo 5678 com Q_{F34}:

$$\begin{aligned} Q_{F78} &= Q_{F34} + A_{5678}\overline{Y}_{5678} \\ &= 24.746 + (h_a d)\frac{d}{2} = 32.563 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

onde $d = 43,4$ mm. Então,

$$\tau_{xy}^{78} = \frac{V_y Q_{F78}}{t_{78} I_z} = \frac{20.000 \times 32.563}{8,3 \times 2,79 \cdot 10^6} = 28,1 \text{ MPa}.$$

Como a seção tem um plano de simetria passando por 78, as tensões também serão simétricas em relação àquela linha. Para ver isso, consideremos por exemplo a linha 910, cuja área é vista na Figura 9.11c. Se considerarmos a seção completa, sabemos que $Q_z = 0$. Porém se dividimos a seção em duas regiões, acima e abaixo de 910, temos os momentos Q_{F910} e $Q_{F11,12,13,14}$ respectivamente. Então,

$$Q_z = Q_{F910} + Q_{F11,12,13,14} = 0 \qquad \rightarrow \qquad Q_{F910} = -Q_{F11,12,13,14}.$$

Entretanto, $Q_{F11,12,13,14} = A_{11,12,13,14}\overline{Y}_{11,12,13,14}$. Mas se consideramos A_{34}, notamos que $Y_{11,12,13,14} = -\overline{Y}_{34}$. Logo, $Q_{F910} = -Q_{F34}$, de forma que $\tau_{xy}^{910} = \tau_{xy}^{34}$. Também, $Q_{F13,14} = Q_z = 0$, tal que $\tau_{xy}^{13,14} = 0$.

A distribuição de tensões cisalhantes ao longo do perfil é discutida na próxima seção.

9.3.4 Limitações da teoria em perfil I

A Figura 9.12 ilustra a distribuição de tensões cisalhantes τ_{xy} no perfil do Exemplo 9.1 conforme previsto pela teoria. Essa figura permite identificar diversas limitações da teoria. Nota-se a descontinuidade nas tensões, na interface flange-alma, entre as linhas 34 e 56, i.e., a julgar pela teoria, a tensão saltaria de 2,5 MPa para 21,4 MPa, como decorrência da mudança súbita da espessura t na fórmula (9.12). Fisicamente, entretanto, tal salto de tensões não existe, da mesma forma como as tensões não são de fato constantes em z. Isso é claramente visível se consideramos na linha 34, o material em B na superfície inferior do flange. Nessa superfície as tensões devem ser nulas, exceto no segmento 56, como ilustrado nos elementos diferenciais A e B da Figura 9.12.

Mesmo com tantas limitações, a presente teoria é válida e bastante usada em cálculos preliminares de engenharia, pois consegue estimar $\tau_{\max}$ com precisão aceitável na região da alma.

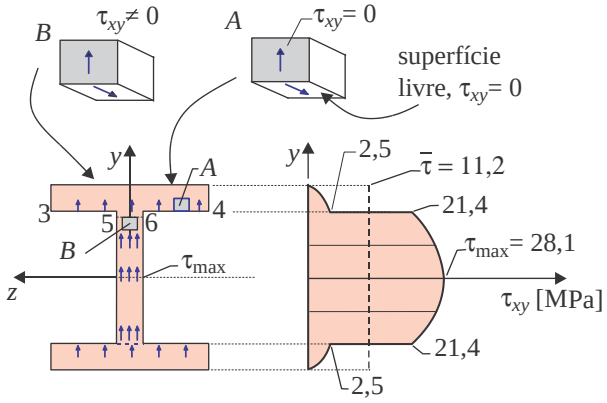


Figura 9.12: Distribuição das aproximações das tensões cisalhantes τ_{xy} no perfil do Exemplo 9.1.

9.3.5 Fórmula aproximada para $\tau_{\max}$ em perfis I e T.

Como visto nos resultados do Exemplo 9.1, as tensões nos flanges em perfis I e T são tipicamente muito pequenas comparadas às tensões na alma, de forma que é a alma que suporta os mais altos valores de tensão cisalhante. Assim, em verificações rápidas pode-se estimar a tensão máxima usando uma fórmula empírica que consiste em uma tensão média calculada apenas com a área da alma:

$$\boxed{\tau_{\max\,.\mathrm{aprox}} = \frac{V_y}{A_{alma}}} \tag{9.22}$$

No Exemplo 9.1, $\tau_{\max\,.\mathrm{aprox}} = 20.000/(8,3 \cdot 86,8) = 27,8$ MPa, i.e., erro de 1,2 % em relação à teoria apresentada. Em problemas de perfis com flanges largos, entretanto, o erro pode ser da ordem de 6 %.

9.4 Fluxo de cisalhamento em perfis de paredes finas

Como observamos das discussões sobre a fórmula de tensões cisalhantes ($\tau_{xy} = V_y Q_F / t I_z$), essa fórmula apresenta uma série de restrições que são consequência direta das hipóteses da teoria subjacente. Entretanto, a expressão (9.8) para o fluxo de cisalhamento ($q = V_y Q_F / I_z$) é muito menos limitado em seu uso, principalmente quando aplicada sobre seções de paredes finas.

O primeiro ponto a ser claramente entendido é o relacionamento que existe entre o fluxo de cisalhamento e a tensão cisalhante. **O fluxo é a força cisalhante axial total por unidade de comprimento atuando na superfície de um cilindro interno à viga,** como ilustrado nas regiões hachuradas do perfil na Figura 9.5b. Mas observemos a Figura 9.13. Para o cálculo do fluxo q, a forma da seção do cilindro interno, A_F, pode ser qualquer. Assim, fizemos dois cortes na seção, um ao longo de uma linha horizontal (34) paralela ao eixo z, cortando o flange, definindo uma área A_F^{34}, e outro corte na linha vertical 12 definindo a área A_F^{12}. Para a superfície 34, nota-se que a tensão média τ_{xy} dada em (9.12) é simplesmente o fluxo q^{34} dado em (9.8) dividido pela largura, i.e.,

$$\tau_{xy} = \frac{q^{34}}{B} \qquad \text{ao longo da linha 34.} \tag{9.23}$$

onde B é a largura do flange. O fluxo q^{34} é visualizado na Figura 9.13b.

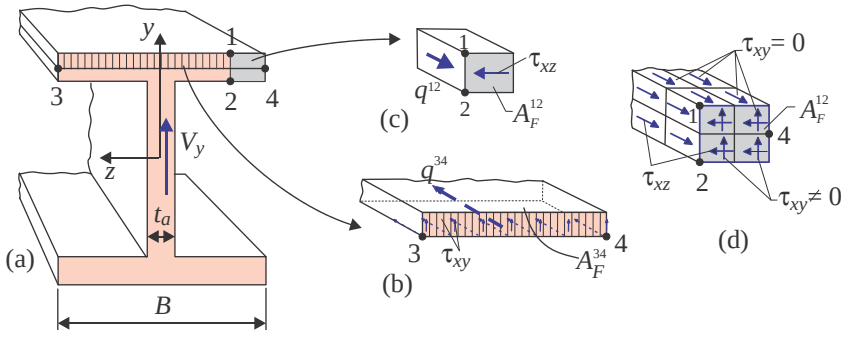


Figura 9.13: Fluxo de cisalhamento no flange, em duas superfícies ortogonais.

Note que, a tensão, fisicamente, pode variar ao longo de z, o que significa que τ_{xy} acima contém um erro. Entretanto o fluxo q^{34} é basicamente um valor correto, a força total na superfície definida pelo segmento 34, obtida por equilíbrio de forças.

Por outro lado, podemos definir uma região A_F^{12} pelo corte vertical 12 no flange. Nesse caso o fluxo q^{12} refere-se à força aplicada ao longo da interface 12 como mostrado na Figura 9.13c.
Tanto o fluxo q^{12} quanto q^{34} são associados a tensões, τ_{xz} e τ_{xy} respectivamente, como mostrado na Figura 9.13d. Como visto no Exemplo 9.1, por ser o flange muito largo, τ_{xy} é bastante pequeno

e varia de forma parabólica com y. Já em 12, τ_{xz} assume valores expressivos e varia linearmente com z. **Assim, no cálculo do fluxo de cisalhamento é costumeiro considerar apenas a parcela de fluxo paralela ao flange e à alma, como ilustrada na Figura** 9.14. No flange da Figura 9.13, por exemplo, despreza-se o fluxo q^{34} e considera-se apenas q^{12}. Na alma se considera o fluxo nas faces paralelas ao eixo y. Esses fluxos são ilustrados na Figura 9.14a para a seção I.

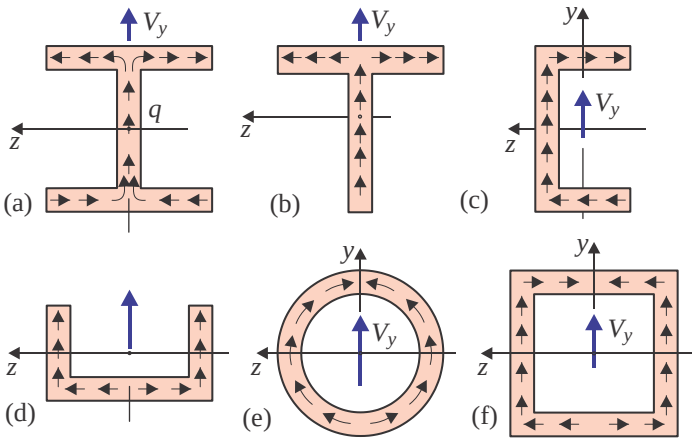


Figura 9.14: Orientação do fluxo de cisalhamento em diversos perfis de paredes finas.

A explicação da orientação do fluxo no perfil é como segue. Consideremos por exemplo o perfil T da Figura 9.14b, com o cortante V_y para cima como indicado. Então é de se esperar que o fluxo (e as tensões) na alma sejam também para cima, uma vez que V_y é a resultante do fluxo. Para entender a orientação de q no flange, consideremos os dois lados do flange superior como na Figura 9.15. Tomamos dois prismas definidos pelas áreas A_F^1 e A_F^2 e montamos seus diagramas de corpo livre. Observe que se V_y é para cima, i.e., $V_y > 0$, então pela equação de equilíbrio ($dM_z/dx = -V_y$), se tem que $dM_z/dx < 0$, o que significa que M_z diminui com x, i.e., $(M_z + dM_z) < M_z$. Então, nos extremos de cada prisma, a força axial devida à tensão normal σ_x orientada "para traz" $(F_x + dF_x)$ é menor que a força "para frente" F_x, de forma que existe uma resultante axial dF_xpara frente. Então, em ambos os casos, a força cisalhante atuando na interface é qdx, para traz, da mesma forma que a tensão cisalhante. Logo, na área A_F^1 a força q é para a direita e na área A_F^2 o fluxo q é para a esquerda, o que leva às orientações vistas na Figura 9.14b.

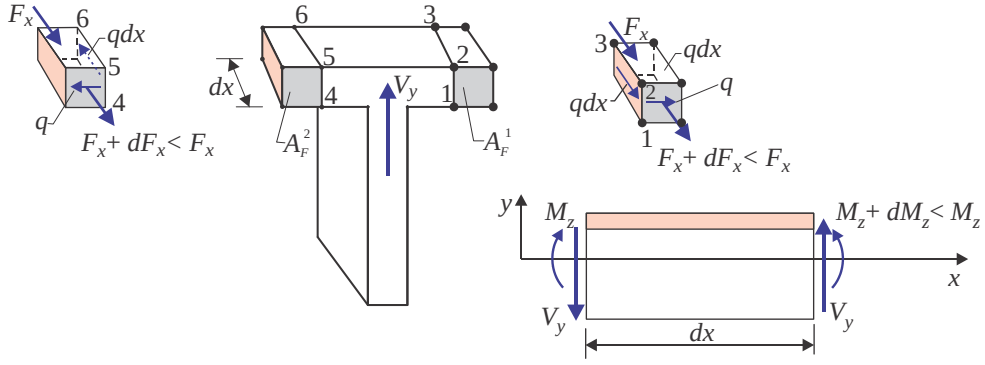


Figura 9.15: Orientação de fluxo de cisalhamento num perfil.

Observando os diversos casos da Figura 9.14 notamos o porquê do nome "fluxo" de cisalhamento. As forças comportam-se um pouco como um **escoamento fluido** num duto. **A forma prática de determinar as orientações** é a seguinte:

(a) nas paredes verticais (paralelas ao cortante), colocar o fluxo na direção positiva de V_y;

(b) nos extremos da parede vertical o fluxo mantém a orientação quando entra ou sai da parede horizontal.

A determinação do fluxo de cisalhamento em alguns dos perfis da Figura 9.14 será discutida através de exemplos.

Exemplo 9.2 - Fluxo de cisalhamento em perfil I

Considere o perfil I do Exemplo 9.1, cuja geometria é dada na Figura 9.10c. Determine o fluxo de cisalhamento longitudinal aos flanges e à alma. Tentar obter primeiro expressões analíticas em termos dos parâmetros geométricos da seção.

Solução:
Para facilitar a dedução das equações, em lugar de usar a altura total da seção, H, usaremos a altura média $\bar{H} \equiv (H - h_f)$. Devido aos dois planos de simetria da seção, bastará a determinação de duas equações para q, uma para um lado de flange e outra para a alma.
Flange – Para a equação no flange usamos um corte transversal 12 numa posição genérica definida pela coordenada z, o que define uma área A_{F12} como na Figura 9.16a. O momento estático é $Q_{F12} = A_{F12}\overline{Y}_{12} = (B/2 - z)h_f \cdot (\overline{H}/2)$. Então o fluxo é

$$q_{\text{flange}}(z) = \frac{V_y Q_{F12}}{I_z} = \frac{V_y h_f \overline{H}}{2I_z}\left(\frac{B}{2} - z\right). \tag{9.24}$$

Claramente esta é uma função linear em z, com máximo em $z = 0$, i.e., $q^{\max}_{\text{flange}} = V_y \overline{H} B h_f / 4I_z$. Por simetria, no lado negativo de z a distribuição de q é reversa, como indicado na Figura 9.16c. Também por simetria, temos que $Q_{F78} = -Q_{F12}$, e a orientação do fluxo é invertida no flange inferior em relação ao flange superior.

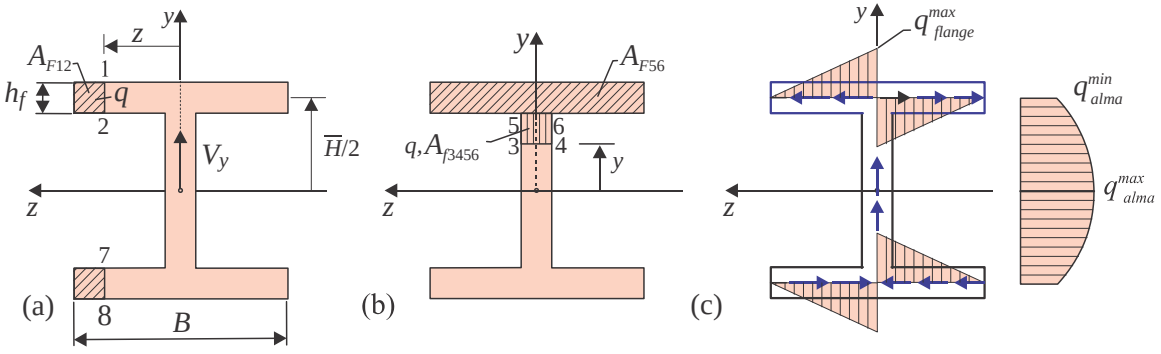


Figura 9.16: Cortes para determinação de equação de q no flange e na alma de perfil I.

Alma – Para a determinação do fluxo na alma usamos a área A_{F34} ilustrada na Figura 9.16b, onde o corte 34 tem cota variável y. O momento estático Q_{F34} é obtido adicionando o momento do pequeno retângulo 3456 ao momento do flange A_{F56}:

$$\begin{aligned}
Q_{F34} &= Q_{F56} + Q_{F3456}, \\
&= A_{56}\overline{Y}_{56} + A_{3456}\overline{Y}_{3456}, \\
&= (Bh_f)\frac{\overline{H}}{2} + h_a\left[\frac{1}{2}(\overline{H} - h_f) - y\right]\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overline{H} - h_f) + y\right], \\
\rightarrow\ Q_{F34} &= \frac{1}{2}\left\{B\overline{H}h_f + h_a\left[\frac{1}{4}(\overline{H} - h_f)^2 - y^2\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{9.25}$$

como $h_f \ll \overline{H}$, podemos aproximar $\overline{H}/2 - h_f$ por $\overline{H}/2$, e Q_{F34} fica

$$Q_{F34} = \frac{1}{8}\left[4B\overline{H}h_f + h_a(\overline{H}^2 - 4y^2)\right]. \tag{9.26}$$

Com isso o fluxo fica definido por $q_{34}(y) = V_y Q_{F34}/I_z$. Nota-se que $q_{34}(y)$ é um polinômio parabólico cujo máximo ocorre em $y = 0$:

$$q^{\max}_{\text{alma}} = \frac{V_y\overline{H}}{8I_z}\left[4Bh_f + h_a\overline{H}\right]. \tag{9.27}$$

Em $y = \overline{H}/2$, o fluxo na alma é mínimo, e vale

$$q^{\min}_{\text{alma}} = \frac{V_y\overline{H}Bh_f}{2I_z} = 2q^{\max}_{\text{flange}}. \tag{9.28}$$

Para os dados do exemplo, $V_y = 20.000$ N, $I_z = 2,79 \cdot 10^6$ mm^4 e da Figura 9.10c se tem $B = 71$ mm, $h_f = 7,4$ mm, $h_a = 8,3$ mm, $H = 101,6$ mm e $\overline{H} = H - h_f = 94,2$ mm. Então os fluxos extremos na alma são: $q^{\min}_{\text{alma}} = 24,0$ N/mm e $q^{\max}_{\text{alma}} = 243,4$ N/mm e $q^{\max}_{\text{flange}} = q^{\min}_{\text{alma}}/2 = 12$ N/mm. Nota-se que a alma é a parte que suporta a maior parcela do esforço cortante na seção.

9.5 Vigas formadas pela união de barras finas

A principal utilização do fluxo de cisalhamento em engenharia é no projeto de vigas formadas pela união de barras finas. Considere um conjunto de tábuas de madeira ou de barras de aço de seção retangular ou perfis pré-fabricados L, T, [, etc, que desejamos unir para formar uma viga com maior capacidade de suportar flexão e/ou torção. Alguns casos são vistos na Figura 9.17. O caso mais simples, embora não o mais eficiente, talvez seja a necessidade de unir duas tábuas para formar uma viga de maior altura para melhorar a capacidade de suportar carga transversal (direção y) como na Figura 9.17a. Uma questão importante de projeto é: quantos **pregos ou parafusos** de certo tipo serão necessários por metro de comprimento de viga para evitar o deslizamento relativo, i.e., para garantir que as duas tábuas trabalhem como uma unidade? A questão é semelhante se a união for feita por **colagem**, sito é, uma certa cola que suporta um dado valor de tensões cisalhante será adequada? Em componentes e estruturas mecânicas, em lugar de madeira teríamos também aço, por exemplo, e importa saber o número de **parafusos ou rebites** por metro, ou ainda a resistência necessária para o **cordão de solda** por unidade de comprimento.

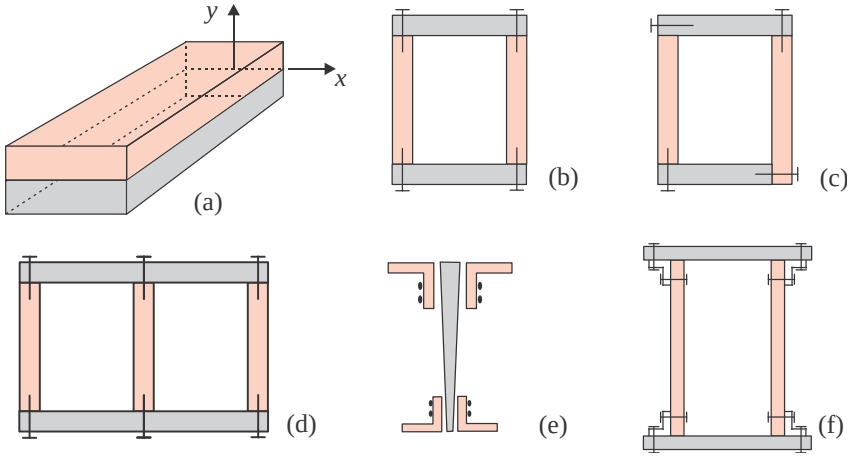


Figura 9.17: Perfis formados pela união de outros perfis.

Para obter vigas com maior momento de inércia, é mais eficiente construir **vigas-caixão** como na Figura 9.17b (c) e (d), ou perfis I, T, TT e outros. Estruturas de grande porte, como **viadutos e**

pontes metálicas, frequentemente necessitam vigas com alturas grandes, por exemplo um metro ou mais. Estas são construídas por chapas metálicas unidas por cantoneiras, como ilustrado na Figura 9.17e e (f).Em todos os casos o cálculo é feito através da determinação do fluxo de cisalhamento em cada superfície de contato entre as partes. O procedimento será visto a seguir através de exemplos.

Exemplo 9.3 - Montagem de perfil canaleta [

Considere uma viga como na Figura 9.18a, que desejamos construir unindo três placas de aço de espessura $h = 35$ mm de , usando parafusos que possuem capacidade de suportar 150 N de força cisalhante. Determine o espaçamento necessário dos parafusos nas interfaces L_1 e L_2 para que a viga suporte a carga $F = 400$ N, se a força admissível por parafuso for $F_{\text{adm}} = 150$ N/parafuso.

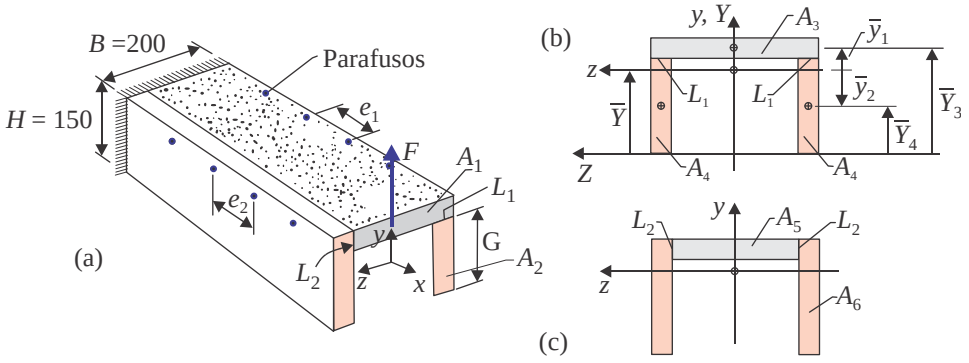


Figura 9.18: Dados e solução do Exemplo 9.3.

Solução:
Etapa 1 -- Posição $\overline{Y}$ do centroide (Figura 9.18b). Subdividimos a seção numa área horizontal A_3 e duas paredes A_4. A área total da seção é $A = A_3 + 2A_4$, onde $A_3 = Bh = 200 \times 35 = 7.000$ mm^2 e $A_4 = Gh = 115 \times 35 = 4.025$ mm^2. Então, $A = 15.050$ mm^2. As coordenadas do centroide de cada área em relação ao eixo Z são $\overline{Y}_3 = H - h/2 = 132,5$ mm e $\overline{Y}_4 = G/2 = 57,5$ mm. Seguindo o procedimento, usando os eixos temporários YZ, temos:

$$\begin{aligned} A\overline{Y} &= A_3\overline{Y}_3 + 2A_4\overline{Y}_4, \\ 15.050\overline{Y} &= 7.000 \times 132,5 + 2 \times 4.025 \times 57,5 = 1,39 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{Y} = 92,38$ mm.
Etapa 2 – Momento de inércia I_z. As coordenadas dos centroides das áreas A_3 e A_4, (Figura 9.18b), em relação ao eixo principal z, são $\overline{y}_3 = \overline{Y}_3 - \overline{Y} = 132,5 - 92,38 = 40,1$ mm e $\overline{y}_4 = \overline{Y}_4 - \overline{Y} = 57,5 - 92,38 = -34,9$ mm. O momento de inércia é

$$\begin{aligned} I_z &= I_z^3 + 2I_z^4 = \left[\frac{Bh^3}{12} + A_3\overline{y}_3^2\right] + 2\left[\frac{hG^3}{12} + A_4\overline{y}_4^2\right], \\ &= \left[\frac{200 \times 35^3}{12} + 7.000 \times 40,1^2\right] + 2\left[\frac{35 \times 115^3}{12} + 4.025 \times (-34,9)^2\right], \\ I_z &= 30,65 \cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

Etapa 3 – Fluxo de cisalhamento na interface em L_1. Para isso usamos a mesma área A_3 da Figura 9.18b. Note que poderíamos pensar em usar a área hachurada A_1 da figura (a). Entretanto o valor q obtido não teria utilidade, uma vez que ele incorporaria as forças na interface L_1 mais as forças em L_2. Como esses fluxos são diferentes, não teríamos como separa-los do total q. Por outro lado,

se usamos A_3 da Figura (b), por simetria sabemos que o fluxo calculado q é duas vezes o fluxo de cada interface L_1. Então, o momento estático para a área A_3 em relação ao eixo principal z é

$$Q_{F3} = A_3\overline{y}_3 = 7.000 \times 40,1 = 2,81 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Logo, usando (9.8) para a área A_3, o fluxo total é

$$q_{A3} = \frac{V_y Q_{F3}}{I_z} = \frac{400 \times 2,81 \cdot 10^5}{30,65 \cdot 10^6} = 3,67 \text{ N/mm}.$$

Então, devido à simetria da área A_3 em relação a y, o fluxo em L_1 é $q_{L1} = q_{A3}/2 = 1,83$ N/mm.
Etapa 4 -- Fluxo de cisalhamento na interface L_2. Usamos a área A_5 hachurada na Figura 9.18c, que também é simétrica em relação a y. Então, o momento estático de A_5 é:

$$Q_{F5} = A_5\overline{y}_3 = (130 \times 35)40,1 = 1,83 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

e o fluxo de cisalhamento total é

$$q_{A5} = \frac{V_y Q_{F5}}{I_z} = \frac{400 \times 1,83 \cdot 10^5}{30,65 \cdot 10^6} = 2,38 \text{ N/mm}.$$

Logo, o fluxo em L_2 é $q_{L2} = q_{A5}/2 = 1,19$ N/mm.
Etapa 5 -- Cálculo do espaçamento dos parafusos. Para a união L_1, o espaçamento máximo deve ser $e_1 = F_{\text{adm}}/q_{L1} = (150 \text{ N/parafuso})/(1,83 \text{ N/mm}) = 81$,9 mm/parafuso, onde F_{adm} é a força admissível por parafuso. Para a união L_2, o espaçamento entre parafusos deve ser no máximo $e_2 = F_{\text{adm}}/q_{L2} = 150/1,19 = 126$ mm.

Este exemplo também mostra que uniões tipo L_1, (ver Figura 9.18), i.e., com a parede estendendo-se até em cima, transmitem mais força e exigem maior quantidade de parafusos que uniões tipo L_2. Assim, para construir uma viga caixão a configuração da Figura 9.17b é mais eficiente que a (c).

9.6 Tensões combinadas - efeitos do momento fletor e cortante

Em geral, a distribuição de momentos fletores numa viga é proveniente de um conjunto de cargas transversais aplicadas que simultaneamente provocam uma distribuição de esforços cortantes. Num problema de flexão plana, a distribuição de tensões normais é linear ao longo de y, i.e., $\sigma_x(y) = -M_z y/I_z$, e tem seu valor máximo na fibra mais distante da linha neutra, de cota $y_{\max}$. Já as tensões cisalhantes devidas ao cortante tem distribuição parabólica em y, com máximo geralmente sobre a linha neutra e valores nulos nos extremos $y_{\max}$ e $y_{\min}$ da seção. Em resumo, onde σ_x vale nulo (mínimo), τ_{xy} é máximo (nulo). A questão que se apresenta é, **em qual cota y ocorre o ponto crítico? i.e., se usarmos o critério da máxima tensão cisalhante (Tresca), por exemplo, onde ocorre $\tau^{\text{abs}}_{\max}$?** Uma indicação prática de projeto será extraída dos resultados numéricos do exemplo a seguir.

Exemplo 9.4 Critério de Tresca em flexão

Considere um problema comum como o da viga em balanço da Figura 9.19a, com a força $F = 10$ kN, vão $L = 1$ m e seção transversal retangular com dimensões $b \times h = 30 \times 333,3$ mm^2.

(a) Determine as tensões principais σ_1 e σ_2 e orientações, para os pontos A a E ao longo da seção s próximas do engaste. Os pontos A e E estão nas cotas $y = \pm h/2$, B e D em $y = \pm(h/2 - d)$, onde $d = h/c$ é a distância do ponto B até a borda superior. Use $c = 3$, tal que a distância de B à linha neutra é 1/3 da meia altura da viga. O ponto C está sobre a linha neutra. Isso

permitirá identificar aproximadamente a distribuição de tensões ao longo de y na seção do engaste. Considere apenas tensões nominais, i.e., ignore os efeitos da concentração de tensões na região do engaste.

(b) Determine a tensão cisalhante máxima absoluta $\tau^{\text{abs}}_{\text{max}}$ nesses pontos.

(c) Observe que esta viga tem um aspecto $L/h = 1.000/333,3 = 3$, indicando que é bastante curta. Recalcule as tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos A e C, $\tau^{\text{abs}}_{\text{max}\,A}$ e $\tau^{\text{abs}}_{\text{max}\,C}$, respectivamente, para valores de altura da seção $h = \{333,3;\ 200;\ 150;\ 100;\ 75;\ 50\}$ mm. Plote as curvas L/h versus a relação $\tau^{\text{abs}}_{\text{max}\,C}/\tau^{\text{abs}}_{\text{max}\,A}$

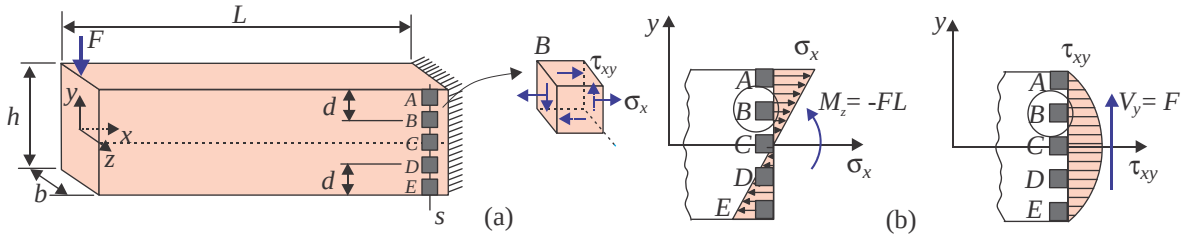


Figura 9.19: (a) Dados do Exemplo 9.4; (b) Tensões normais e cisalhantes em pontos da seção s do engaste e estado de tensões no ponto B.

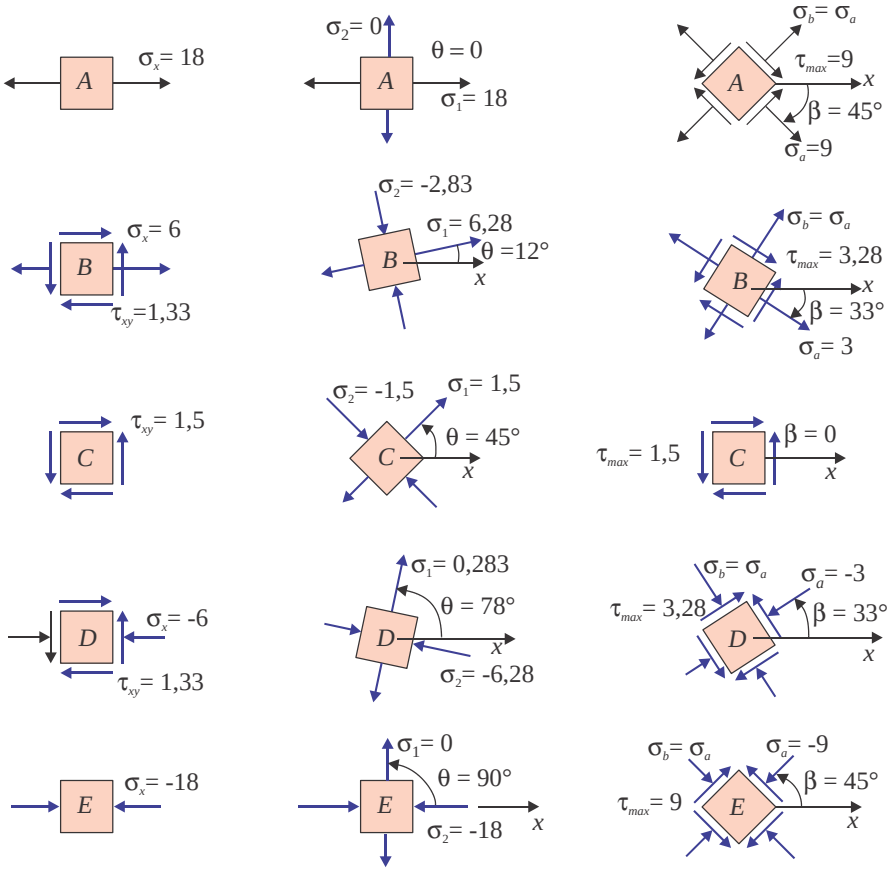


Figura 9.20: Estados de tensão nas direções xy, principais 12 e ab de cisalhamento máximo. Tensões em MPa.

Solução:

Etapa 1 – Os **esforços na seção** s do engaste são obtidos pelo método das seções como:

$$M_z = -FL = -10.000 \times 1.000 = -10 \text{ kNm}, \qquad V_y = 10.000 \text{ N}.$$

As distribuições de tensões σ_x e τ_{xy} na seção s são ilustradas na Figura 9.19b. O momento de inércia é $I_z = bh^3/12 = 92,6 \cdot 10^6$ mm^4 e a equação de tensão normal é

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z}y = -\frac{(-10 \cdot 10^6)}{92,6 \cdot 10^6}y = 0,108\ y \qquad (y \text{ dado em mm e } \sigma_x \text{ em MPa}). \tag{9.29}$$

No ponto A da seção, onde $y = h/2 = 166,7$ mm, a tensão é $\sigma_x^A = 18$ MPa. A expressão para a distribuição de tensões cisalhantes numa seção retangular foi desenvolvida em (9.14) como $\tau_{xy}(y) = 6V_y(h^2/4 - y^2)/bh^3$. Aplicando os dados do problema, a distribuição fica

$$\tau_{xy}(y) = \frac{6 \times 10^4}{30 \times 333,3^3}\left(\frac{333,3^2}{4} - y^2\right) = 5,4 \cdot 10^5\left(27.778 - y^2\right). \tag{9.30}$$

No ponto C da seção, onde $y = 0$, a tensão cisalhante é $\tau_{xy}^C = 1,5$ MPa. Para um ponto típico, como o **ponto B** na seção, de cota $y_B = h/2 - d = 333,3/2 - 333,3/c = 55,6$ mm, as fórmulas (9.29) e (9.30) produzem as tensões $\sigma_x^B = 6$ MPa e $\tau_{xy}^B = 1,33$ MPa. Esse estado de tensões é visualizado na Figura 9.19b.

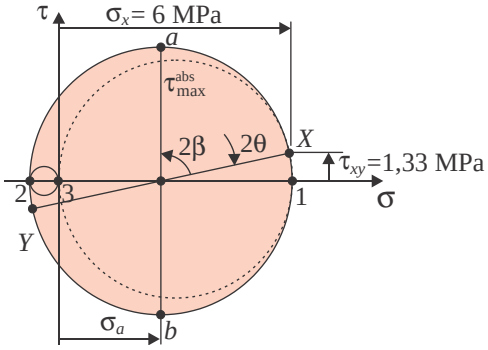


Figura 9.21: Círculos de Mohr para um ponto arbitrário na viga de seção retangular sob momento e cortante.

Etapa 2 – O círculo de Mohr para o estado de tensões no ponto B é obtido plotando no plano $\sigma - \tau$ os pontos $X(\sigma_x; \tau_{xy}) = (12; 1,33)$ MPa e $Y(\sigma_y; \tau_{xy}) = (0; -1,33)$ MPa, como visto na Figura 9.21. Ali temos também as indicações das tensões principais σ_1, σ_2, σ_3, e a orientação θ entre os eixo x e 1. Também temos a ilustração dos eixos ab onde atua o cisalhamento máximo absoluto $\tau_{\max}^{\text{abs}}$, e o ângulo β entre os eixos x e a. Os valores são obtidos das seguintes equações, usando $\sigma_y = 0$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{12+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12-0}{2}\right)^2 + 1,33^2}, \qquad (9.31)\\
\text{tg}2\theta &= \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{1,33}{(12-0)/2} = 0,444 \qquad \rightarrow \theta = 12^o,\\
\text{tg}2\beta &= \frac{1}{\text{tg } 2\theta} \qquad \rightarrow\ \beta = 33^o.
\end{aligned}$$

Os resultados são: $\sigma_1 = 6,28$ MPa, $\sigma_2 = -0,283$ MPa e $\sigma_3 = 0$. Como $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$, o maior círculo é do plano 12, e $\tau_{\max}^{\text{abs}} = 3,28$ MPa. Esses valores são representados na Figura 9.20 para o elemento diferencial no ponto B.

Para os demais pontos o procedimento é repetido e os resultados são vistos na Figura 9.20. Se estivermos buscando o **ponto crítico da viga** usando o **critério de Tresca**, observamos que **o**

ponto de maior solicitação ainda é a fibra externa, exatamente como previsto no caso de flexão pura, i.e., nos pontos A e E, onde a tensão $\tau_{\max}^{\text{abs}} = 18$ MPa é a maior em toda a seção.

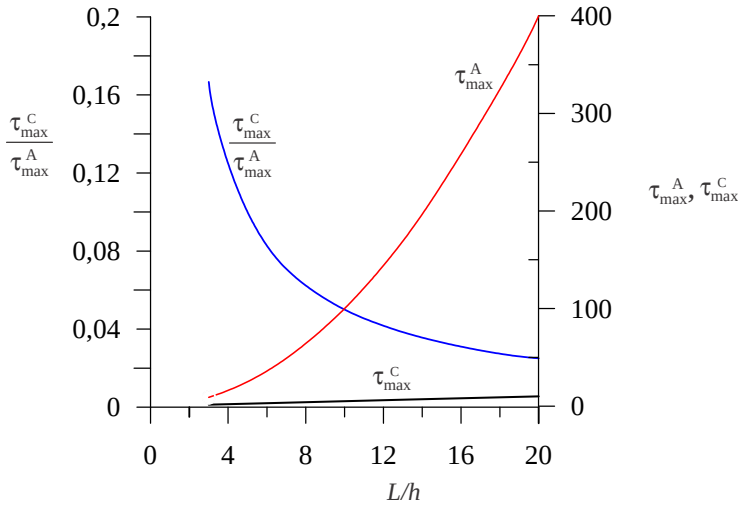


Figura 9.22: Variação da relação entre as tensões máximas equivalentes nos pontos A e C versus L/h. $L = 1$ m, $b = 30$ mm, $F = 10$ kN.

Etapa 3 – A Figura 9.22 mostra a variação das tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos A ($\tau_{\max}^{\text{A}}$) e C ($\tau_{\max}^{\text{C}}$) da seção do engaste, versus o aspecto da viga L/h. A tensão $\tau_{\max}^{\text{A}}$ é unicamente definida pela tensão normal de flexão ($\tau_{\max}^{\text{A}} = \sigma_x^{\text{A}}/2$), e $\tau_{\max}^{\text{C}}$ é inteiramente definida pelo esforço cortante. Nota-se que, conforme a viga se torna mais fina (L/h crescente), $\tau_{\max}^{\text{C}}$ se torna progressivamente menor em comparação à tensão de flexão $\tau_{\max}^{\text{A}}$, como se pode ver pela curva decrescente $\tau_{\max}^{\text{C}}/\tau_{\max}^{\text{A}} \times L/h$.

Exemplo 9.5 - Cisalhamento em viga de seção I

Considere a viga de aço ilustrada do Exemplo 9.1, com a seção transversal mostrada na Figura 9.23. Determine as tensões cisalhantes máximas absolutas no topo e no centroide da seção, os pontos 1 e 2 marcados na figura. Faça essa determinação para os seguintes valores de altura total da seção, $H = \{50;\ 101,6;\ 150;\ 200;\ 250\}$ mm, mantendo as outras dimensões como na Figura 9.23. Como se comporta a tensão no centroide com o crescimento de H? Considere o esforço cortante $V_y = 20$ kN e esforço de momento fletor $M_z = 2$ kNm.

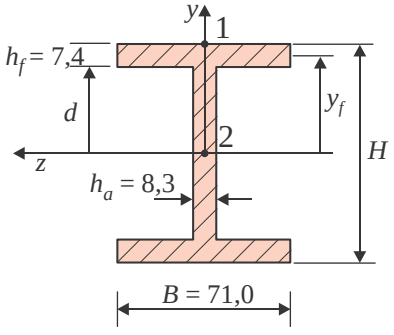


Figura 9.23: Seção transversal I do Exemplo 5. Dimensões em mm.

Solução:

A coordenada da superfície inferior do flange é $d = H/2 - h_f$ e a coordenada do centroide do flange é $y_f = d + h_f/2$. O segundo momento de inércia principal da seção é

Tabela 9.1: Variação de $t^{abs}_{max1} e t^{abs}_{max2} nos pontos 1 e 2 da seção em função da altura total H$.

H	σ_{x1}	τ_{xy2}	τ_{xy1}/τ_{xy2}
50	97,7	58	1,2
101,6	36,4	28,1	1,54
150	21,3	19,3	1,81
200	14,1	14,7	2.08
250	10,2	11,9	2,38

$$I_z = \frac{h_a\,(2d)^3}{12} + 2\left[\frac{Bh_f^3}{12} + (Bh_f)\,y_f^2\right]. \tag{9.32}$$

A área de um flange é $A_f = Bh_f$ e o momento estático da parte da seção acima da linha neutra, em relação ao eixo z é

$$Q_z = A_f y_f + (h_a d)\frac{d}{2}. \tag{9.33}$$

A tensão normal (em módulo) no ponto 1 da seção, e a tensão cisalhante no ponto 2, são obtidas por

$$\sigma_{x1} = \frac{M_z}{I_z}(H/2) \qquad \text{e} \qquad \tau_{xy2} = \frac{V_y Q_z}{h_a I_z}. \tag{9.34}$$

A tensão cisalhante máxima absoluta no ponto 1 é $\tau^{abs}_{\max 1} = \sigma_{x1}/2$, e no ponto 2 é $\tau^{abs}_{\max 2} = \tau_{xy2}$. Os resultados para diversos valores de altura da seção H são calculados na Tabela 9.6 e na Figura 9.24. Nota-se que o crescimento de H aumenta a área da seção e o momento de inércia, o que fazem com que ambas as tensões, cisalhante devida à flexão no topo da seção, $\tau^{abs}_{\max 1}$, e cisalhante máxima na linha neutra devida ao cortante, $\tau^{abs}_{\max 2}$, diminuam. Entretanto, **conforme H cresce, a queda da tensão de flexão é mais acentuada que a tensão devida ao cortante, de forma que a relação $\tau^{abs}_{\max 2}/\tau^{abs}_{\max 1}$ cresce. A partir de certo valor de H, a relação $\tau^{abs}_{\max 2}/\tau^{abs}_{\max 1}$ ultrapassa o valor 1, o que significa que o ponto crítico na seção ocorre na linha neutra em vez de na fibra extrema como no caso de flexão pura ou de seções maciças.**

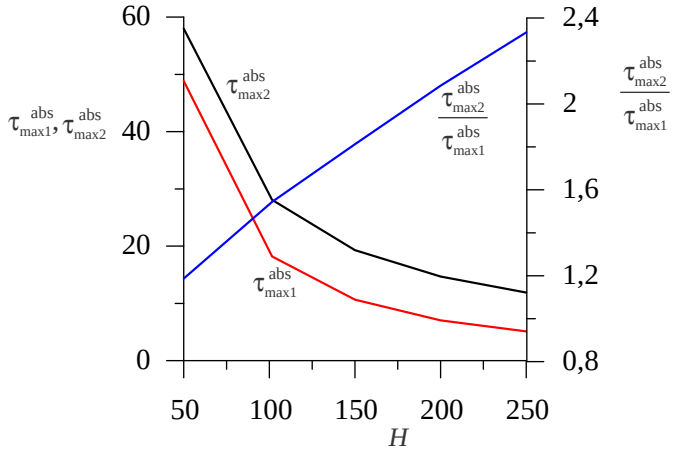


Figura 9.24: Variação de $\tau^{abs}_{\max 1}$ e $\tau^{abs}_{\max 2}$ nos pontos 1 e 2 da seção em função da altura total H.

A situação típica para a identificação dos pontos críticos em vigas sob flexão pode ser resumida por:

- Em seções maciças, como circular ou retangular, sob momento fletor e esforço cortante, o ponto mais solicitado é aquele na fibra extrema da seção ($|y|_{\max}$).
  O principal efeito é do momento fletor e da tensão normal σ_x.

- No caso de perfis I, T, TT, etc, ou seções retangulares ou circulares tubulares, o alto valor do momento de inércia pode gerar baixos valores de σ_x em $y_{\max}$, e a pequena espessura da alma podem gerar altos valores de τ_{xy} na superfície neutra. Assim, torna-se necessário verificar as tensões em ambos os pontos da seção,como no Exemplo 9.5 acima.

(9.35)

9.7 Tensões combinadas - torção e cortante em vigas

Barras em máquinas e outras estruturas frequentemente, encontram-se simultaneamente submetidos a torção e a cargas transversais que geram esforços cortantes. Como ambos os esforços são associados a tensões cisalhantes, analisaremos aqui o processo de sobreposição das tensões em casos elástico-lineares.

Exemplo 9.6 - Momento fletor e cisalhamento de torção e cortante

Considere a viga em balanço da Figura 9.25a, de comprimento $L = 100$ mm e seção transversal circular maciça com diâmetro $d = 10$ mm, submetida a uma força transversal $F = 100$ N na direção y, e a um momento tensor $T = 25$ kNmm. Determine a máxima tensão cisalhante absoluta na barra devido ao efeito simultâneo de momento torsor, fletor e cortante. Considere apenas as tensões nominais, ignorando o efeito de concentrações de tensões na região do engaste.

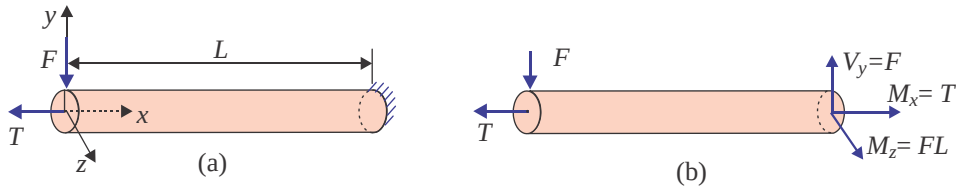


Figura 9.25: (a) Dados do Exemplo 6; (b) esforços no engaste.

Solução:

Um corte na seção do engaste (Figura 9.25b) permite que se determine os **esforços de momento torçor**, $M_x = T = 25$ kNmm e o **esforço cortante** $V_y = F = 500$ N. Como a seção transversal é circular, a distribuição de tensões cisalhantes vem da **fórmula de torção**, $\tau^t = M_x r/J$, i.e., em que a tensão varia linearmente com o raio. Temos o momento polar de inércia $J = \pi d^3 = 981,7$ mm^4. Assim, a **tensão máxima no engaste devida à torção é**

$$\tau^t_{\max} = \frac{M_x}{J}(d/2) = \frac{25 \cdot 10^3}{981,7}(10/2) = 127,3 \text{ MPa}, \tag{9.36}$$

em todos os pontos do perímetro da seção. As tensões devidas à torção são mostradas na Figura 9.26a, nos pontos A, B, C e D da seção. Nesses mesmos pontos podemos determinar as tensões cisalhantes devido ao **cortante**. Para a seção circular, tínhamos já determinado a distribuição parabólica (9.20), tal que a tensão máxima vem de (9.21):

$$\tau^c_{\max} = \frac{4V_y}{3A} = \frac{4\times 100}{3\times 78,5} = 1,70 \text{ MPa, nos pontos } B \text{ e } D. \tag{9.37}$$

onde a área da seção é $A = \pi 10^2/4 = 78,5$ mm^2. Os valores em A e C são nulos, como ilustrado na Figura 9.26b.

Podemos fazer a sobreposição dos valores de tensão cisalhante em cada ponto, $A-D$, simplesmente adicionando vetorialmente as componentes, uma vez que elas atuam sobre a mesma área.

$$\begin{array}{lll} \text{Pontos } A, C & \rightarrow & \tau_A = \tau^t_{\max} = 127,3 \text{ MPa}, \\ \text{Ponto } B & \rightarrow & \tau_B = -\tau^t_{\max} + \tau^c_{\max} = -127,3 + 1,70 = -125,6 \text{ MPa}, \\ \text{Ponto } D & \rightarrow & \tau_D = \tau^t_{\max} + \tau^c_{\max} = 127,3 + 1,70 = \boxed{129 \text{ MPa} = \tau_{\max}} \end{array} \tag{9.38}$$

Essas tensões são o efeito combinado de torção e cortante mostrados na Figura 9.26c. Entretanto, a força transversal F gera também momento fletor $M_z = FL = 50$ kNmm. A tensão normal máxima na seção, atuante nos pontos A e C, em módulo, é:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}(d/2) = \frac{10^4}{490,9}(10/2) = 102 \text{ MPa}, \tag{9.39}$$

onde o momento de inercia $I_z = J/2 = 490,9$ mm^4. A variação da tensão normal devida à flexão é mostrados na Figura 9.26d. As tensões cisalhantes máximas absolutas nos pontos $A-D$ pode ser calculadas por $\tau^{abs}_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$:

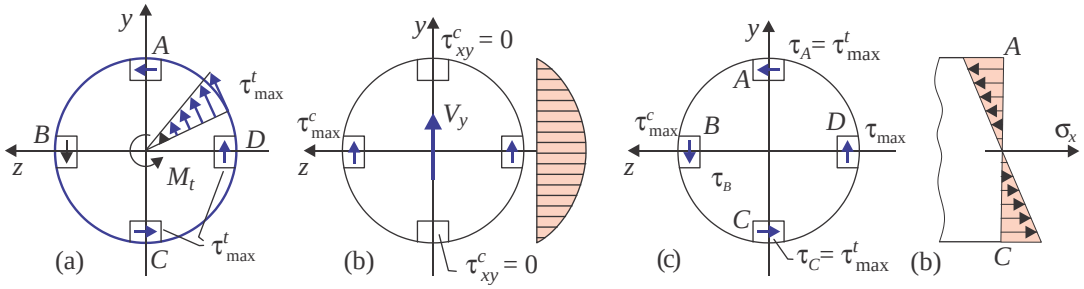


Figura 9.26: (a) tensão cisalhante de torção; (b) tensão devida ao cortante; (c) tensões resultantes de torção e cortante em alguns pontos da seção; (d) tensões normais de flexão.

$$\begin{array}{lll} \text{Pontos } A, C & \rightarrow & \tau^{abs}_{\max\, A} = \sqrt{\left(\frac{102}{2}\right)^2 + 127,3^2} = \boxed{137,1 \text{ MPa} = \tau^{abs}_{\max}}, \\ \text{Ponto } B & \rightarrow & \tau^{abs}_{\max\, B} = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 125,6^2} = 125,6 \text{ MPa}, \\ \text{Ponto } D & \rightarrow & \tau^{abs}_{\max\, D} = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 129^2} = 129 \text{ MPa}. \end{array} \tag{9.40}$$

Então, mesmo com a torção, as tensões normais de flexão fazem o ponto crítico na seção se localizar no ponto mais distantes da linha neutra, $y = \pm d/2$, exatamente como no caso de flexão pura.

9.8 Centro de torção e perfis abertos não simétricos

Em todos os problemas considerados nas seções anteriores, as vigas eram de seção transversal com dois planos de simetria. Então, basta que o carregamento seja aplicado sobre os pontos da linha neutra, que deve ser a centroidal, para que a resposta da viga seja apenas de flexão, sem torção.

Entretanto a situação é distinta se a viga possui apenas um ou nenhum plano de simetria. **Nesses casos, uma força transversal pode sim gerar torção na viga**, além de flexão. Isso será entendido com o desenvolvimento mostrado a seguir.

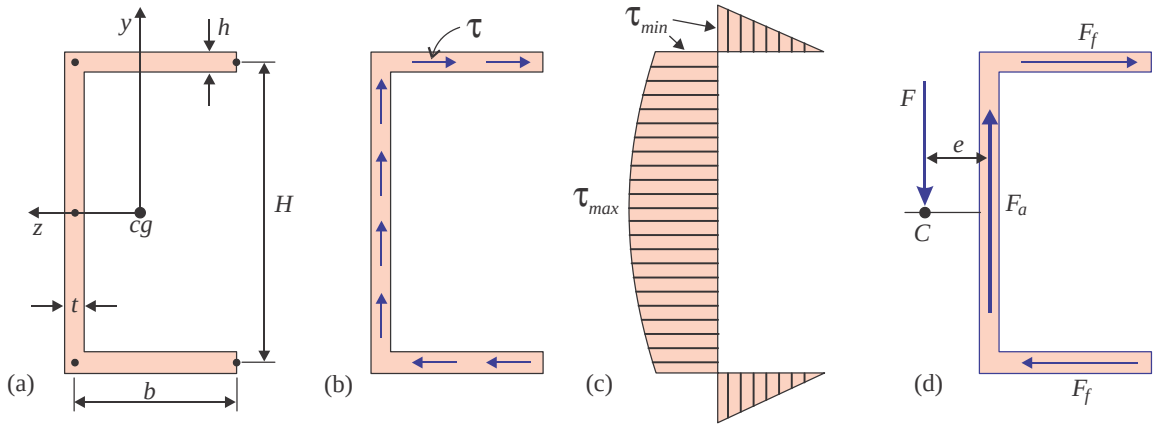


Figura 9.27: Tensões e fluxos cisalhantes numa canaleta e **centro de torção**.

Consideremos uma viga constituída por um perfil aberto de parede delgada, como ilustrado na Figura 9.27. Nesse primeiro caso, começamos por uma seção que possui um plano de simetria, o eixo principal z. Sob o efeito de um esforço cortante vertical, V_y, se desenvolvem o fluxo de cisalhamento e as tensões cisalhantes na seção, como nas figuras (b) e (c). A integração dos fluxos em cada flange gera duas forças resultantes horizontais F_f, e na alma gera uma força vertical F_a. Nota-se que existe uma força resultante vertical, F_f, atuante na alma, que deve ser igual ao cortante V_y, e as forças nos flanges geram um torque de valor HF_f, onde H é a altura da seção entre as linhas médias dos flanges.

Na presente dedução se considera que a parede do perfil seja delgada, de forma que as força cisalhantes verticais desenvolvidas nos flanges são desprezíveis em relação àquelas ilustradas na Figura 9.27b, que mostra apenas as forças horizontais nos flanges.

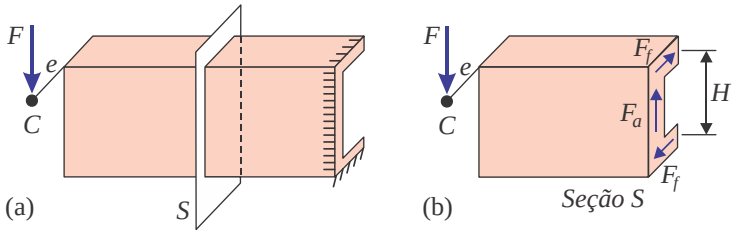


Figura 9.28: (a) Viga em balanço e (b) fluxos numa seção arbitrária s.

A Figura 9.28 mostra o caso de uma viga em balanço, com uma força F aplicada na extremidade. Como ilustrado em (b) e (c), essa força precisa ser aplicada a uma certa distância e do flange, de forma a gerar um binário Fe que equilibre o binário HF_f devido aos fluxos nos flanges. Com isso, podemos montar duas equações de equilíbrio do trecho da viga mostrado em (b), uma de forças verticais e outra de momentos torsores:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \rightarrow \quad V_y = F, \\ \sum M_x &= 0 \quad \rightarrow \quad Fe = HF_f. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Logo, a posição necessária para aplicação do carregamento transversal para que não ocorra torção é

$$e = \frac{HF_f}{F} = \frac{HF_f}{V_y}. \tag{9.42}$$

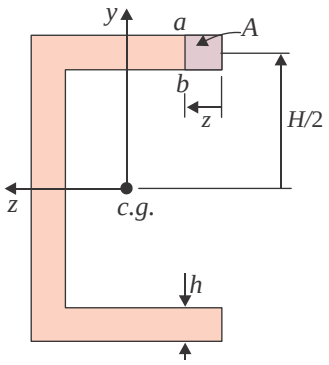


Figura 9.29: Segmento ab para definir o fluxo de cisalhamento na aba numa posição z arbitrária.

A força no flange F_f é a resultante do fluxo de cisalhamento q, e varia linearmente no flange, como deduzido a seguir. Consideremos na Figura 9.29 o fluxo no segmento ab numa posição genérica do flange definida pela coordenada Z medida a partir de sua extremidade. O segmento ab define uma área A_{F12}. O momento estático dessa área em relação ao eixo centroidal z da seção é $Q_{F12} = A_{F12}\overline{Y}_{12} = (hZ)\cdot(H/2)$. A situação é similar àquela do perfil I do Exemplo 2. Então o fluxo é

$$q_f(Z) = \frac{V_y}{I_z} Q_{F12} = \frac{V_y}{I_z}\frac{hH}{2} Z. \tag{9.43}$$

Essa expressão é similar ao fluxo em (9.24). Claramente, esta é uma função linear em Z ao longo do flange, com máximo em $Z = b$, i.e.,

$$q^{\max}_{\text{flange}} = V_y \frac{hHb}{2I_z}. \tag{9.44}$$

A força total no flange é

$$F_f = \int_{Z=0}^{b} q_f(Z)dZ = V_y \frac{hHb^2}{4I_z}. \tag{9.45}$$

Substituindo (9.45) na equação de equilíbrio torsional (9.42), fica

$$\boxed{e = \frac{HF_f}{V_y} = \frac{hH^2b^2}{4I_z}} \tag{9.46}$$

Nota-se que essa distância e é independente do valor do carregamento aplicado, F no presente caso, mas que poderia ser constituído por várias forças e carga distribuída aplicadas sobre a viga. Todas essas cargas devem ser aplicadas à distância e da alma do perfil para evitar a torção da viga. O ponto de aplicação da força é conhecido como **centro de cisalhamento, ou de torção**, e será representado nesse texto por C.

Algumas observações gerais são as seguintes:

1. Uma análise detalhada de perfis sob carregamento de torção mostra que, qualquer que seja o tipo de perfil, com um, dois ou nenhum plano de simetria, a torção se dá em torno do centro de torção C.

2. Se a seção apresenta **um plano de simetria**, definido pelos eixos xz como no presente exemplo da canaleta, o carregamento aplicado na direção y, transversal ao plano, na posição C, causará apenas flexão, e não torção na viga. Nesse caso C se localiza sobre o eixo z.

3. Se a seção possui dois planos de simetria, como as circulares e retangulares, o centro de torção se localiza sobre o centroide da seção, de forma que se os carregamentos transversais forem aplicados sobre a linha neutra, não ocorrerá torção.

Exemplo 9.7 - Centro de torção em canaleta

Determine a posição e do centro de torção do perfil canaleta mostrado na Figura 9.27a, com $H = 200$ mm, $h = t = 2$ mm, $b = 100$ mm.

Solução:

O momento de inércia da seção é a soma dos momentos dos flanges e da alma em relação ao eixo principal z, $I_z = 2I_{zf} + I_{za}$, onde

$$I_{zf} = \frac{bh^3}{12} + (bh)\left(\frac{H}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \text{e} \qquad I_{za} = \frac{tH^3}{12} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Então $I_z = 5,33 \cdot 10^6$ mm^4. Note-se que, como o perfil é de parede fina, o primeiro termo de I_{zf}, do momento do flange em relação ao seu próprio centroide, pode ser ignorado nos cálculos. Isso resultaria $I_{zf} = 2 \cdot 10^6$ mm^4, com diferença igual a 67. A posição do centro de cisalhamento pode ser calculada de (9.46):

$$e = \frac{hH^2b^2}{4I_z} = \frac{2 \times 200^2 \times 100^2}{4 \times 5,33 \cdot 10^6} = 37,5 \text{ mm}.$$

9.9 Exercícios

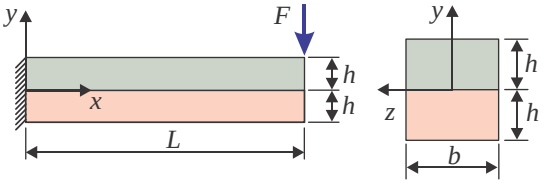
9.1 Deduza a eq.(9.14) para a tensão cisalhante numa seção retangular.

9.2 Deduza a eq.(9.20) para a tensão cisalhante numa seção circular.

(a) Mostre que numa seção circular o momento estático Q_F é máximo sobre a linha neutra.

(b) Mostre que numa seção circular a tensão cisalhante é máxima sobre a linha neutra.

9.3 Uma viga é constituída pela sobreposição de duas barras de seção retangular de dimensões $b \times h = 100 \times 100$ mm^2 cada. Essas barras de madeira são coladas como na figura. A resistência cisalhante da cola é $\tau_c^{adm} = 0,1$ MPa. Se a força aplicada for $F = 1$ kN, qual o coeficiente de segurança na cola?



9.4 No problema anterior considere que a tensão normal máxima admissível na madeira seja $\sigma_{adm} = 13$ MPa na direção das fibras. Qual a máxima força admissível F? Considere falha por tração e por cisalhamento na cola. O comprimento da viga é 1 m.

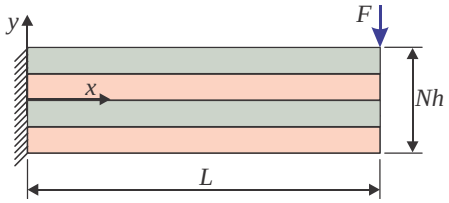
9.5 Considere uma viga de madeira, de seção circular, biapoiada com uma força transversal F aplicada no centro. Qual o coeficiente de segurança quanto a falha por tração e por cisalhamento? $F = 1$ kN, comprimento $L = 1$ m, diâmetro da seção $d = 100$ mm, e tensões normal e cisalhante admissíveis na madeira são $\sigma_{adm} = 13$ MPa e $\tau_m^{adm} = 0,8$ MPa. Qual o provável modo de falha?

9.6 No problema anterior, determine a máxima força admissível F e identifique o provável modo de falha.

9.7 Recalcule a força máxima no Exercício 5, considerando uma madeira com $\sigma_{adm} = 10$ MPa e $\tau_m^{adm} = 0,6$ MPa. Qual o modo provável de falha?

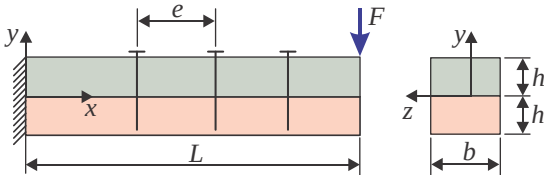
9.8 Uma viga é constituída pela sobreposição de uma quantidade par N de barras de seção retangular de dimensões $b \times h = 100 \times$

50 mm^2 cada. Essas barras de madeira são coladas como na Figura. A resistência cisalhante da cola é $\tau_c^{adm} = 0,1$ MPa, e a madeira tem $\sigma_{adm} = 13$ MPa. Se a força aplicada for $F = 6$ kN e comprimento $L = 1$ m, quantas barras são necessárias?



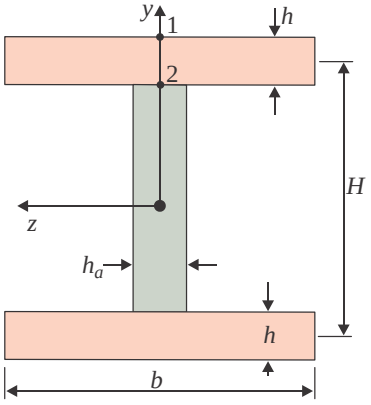
9.9 Uma viga em balanço é constituída pela sobreposição de 3 de barras de seção retangular de dimensões $b \times h = 100 \times 100$ mm^2 cada. Essas barras de madeira são coladas como na Figura do Exercício 8. A resistência cisalhante da cola é $\tau_c^{adm} = 0,1$ MPa, e a madeira tem $\sigma_{adm} = 13$ MPa e $\tau_m^{adm} = 0,8$ MPa. A força aplicada é $F = 2$ kN e o comprimento é $L = 1$ m. Determine o coeficiente de segurança quanto às falhas por cisalhamento na madeira, na cola, e tensão normal na madeira.

9.10 Uma viga é constituída pela sobreposição de duas barras de seção retangular de dimensões $b \times h = 100 \times 100$ mm^2 cada, como na viga do Exercício 3. Essas barras de madeira são unidas por uma sequência de pregos igualmente espaçados em distâncias e. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego. Se a força aplicada for $F = 500$ N, determine o espaçamento e necessário.



9.11 No Exercício 10, qual o coeficiente de segurança nos pregos se for usado um espaçamento $e = 40$ mm?

9.12 Uma viga é um perfil I constituído pela colagem de três barras de madeira, como na figura. A viga é em balanço e suporta uma força F na extremidade. Qual o coeficiente de segurança em relação às uniões coladas, quanto ao cisalhamento na madeira e quanto às tensões normais de flexão? $F =$ 700 N, comprimento $L = 1$ m, $b = 100$ mm, $h = 50$ mm, $h_a = 30$ mm, $H = 250$ mm. As tensões normal e cisalhante admissíveis na madeira são $\sigma_{adm} = 13$ MPa e $\tau_m^{adm} = 0,8$ MPa e a resistência cisalhante da cola é $\tau_c^{adm} = 0,1$ MPa. Qual o provável modo de falha?

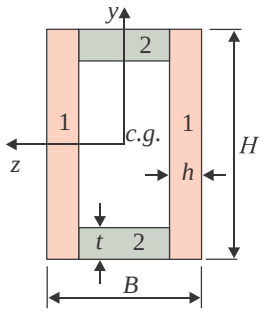


9.13 Considere a viga do Exercício 12, porém com as três peças do perfil I unidas por uma fileira de pregos. Determine o espaçamento e necessário. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego.

9.14 Considere a viga do Exercício 12, porém com as três peças do perfil I unidas por uma fileira de pregos. Determine a força F admissível na viga se o espaçamento entre os pregos for $e = 80$ mm. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego.

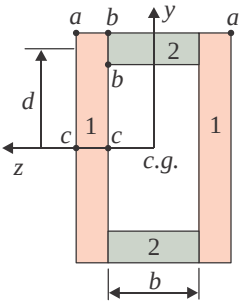
9.15 Uma viga é um perfil caixão como na figura, constituído pela colagem de quatro barras de madeira, como na figura. A viga é em balanço e suporta uma força F na extremidade. Qual o coeficiente de segurança em relação às uniões coladas, quanto ao cisalhamento na madeira e quanto às tensões normais de flexão? $F = 3$ kN, comprimento $L = 1$ m, $B = 100$ mm, $h = 25$ mm, $t = 50$ mm, $H = 250$ mm. As tensões normal e cisalhante admissíveis na madeira são $\sigma_{adm} = 13$ MPa e $\tau_m^{adm} = 0,8$ MPa e a resistência cisalhante da cola é $\tau_c^{adm} = 0,1$

MPa. Qual o provável modo de falha?



9.16 Refaça o Exercício 15 para $h = 18$ mm.

9.17 Considere o Exercício 15, em que a viga caixão tenha as mesmas dimensões externas, porém seja construída pelas quatro barras coladas como na figura. Em relação à configuração do Exercício 15, qual das duas configurações é mais eficiente? Porque?



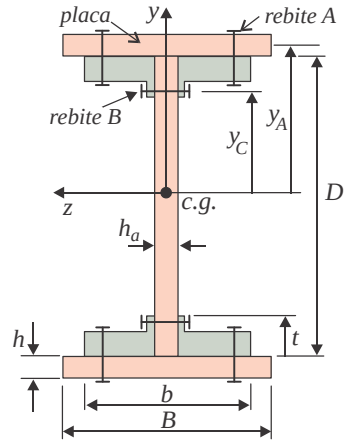
9.18 Na viga do Exercício 17, qual o coeficiente de segurança para os dados do Exercício 15?

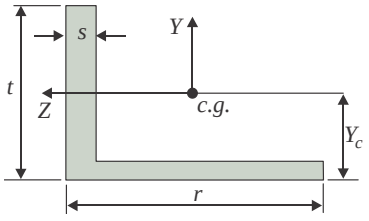
9.19 Considere o Exercício 15, em que a viga caixão tenha sido formada por quatro barras através de pregos. Determine o espaçamento e necessário. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego.

9.20 Considere o Exercício 15, em que a viga caixão tenha sido formada por quatro barras através de pregos. Determine o espaçamento e necessário. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego. Use $h = 18$ mm como no Exercício 16.

9.21 Considere o Exercício 17, em que a viga caixão tenha sido formada por quatro barras através de pregos. Determine o espaçamento e necessário. A resistência cisalhante do prego é $F_p^{adm} = 300$ N/prego.

9.22 Uma viga de aço de grandes dimensões é construída pela união arrebitada de diversas peças de aço, formando o perfil I como na figura. São duas placas de base e de topo que formam os flanges, com dimensões $B = 350$ mm por $h = 12$ mm. A alma tem dimensões $D = 1$ m por $h_a = 10$ mm. Cada uma das quatro cantoneiras L (mostrada o detalhe da figura) tem dimensões $r = 150$ mm, $t = 100$ mm e espessura $s = 12$ mm. Esse é um perfil normalizado, de forma que suas características de área são tabeladas em norma: área $A_c = 3.100$ mm^2, momento de inércia em relação ao eixo Z centroidal da cantoneira é $I_Z = 2,61 \cdot 10^6$ mm^4 e a posição do centroide é $Y_c = 25$ mm. As peças são unidas por rebites que possuem diâmetro $d_r = 18$ mm e tensão cisalhante admissível $\tau_r^{adm} = 100$ MPa. O esforço cortante na seção completa é $V_y = 750$ kN. Determine os espaçamentos necessários entre os rebites A e entre os rebites B.



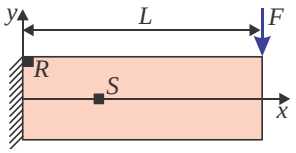


9.23 Resolva o Exercício 22 para o caso em que a placa da alma do perfil tenha as dimensões $D = 1$ m por $h_a = 15$ mm.

9.24 Resolva o Exercício 22 para o caso em que a placa da alma do perfil tenha as dimensões $D = 1{,}3$ m por $h_a = 10$ mm.

9.25 Para a viga do Exercício 22, determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S). Considere a viga em balanço como na figura, com $F = 750$ kN

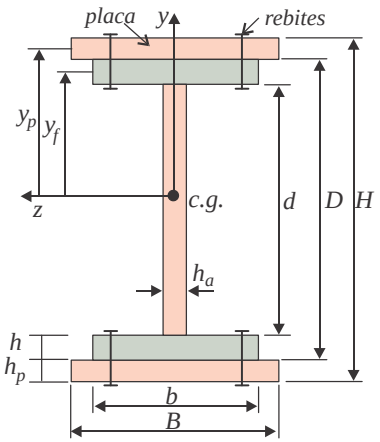
e comprimento $L = 4$ m.



9.26 Para a viga do Exercício 22, determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S). Considere a viga em balanço como na figura, com $F = 750$ kN e comprimento $L = 4$ m. Considere o caso em que a placa da alma do perfil tenha as dimensões $D = 1$ m por $h_a = 15$ mm.

9.27 Para a viga do Exercício 22, determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S). Considere a viga em balanço como na figura, com $F = 750$ kN e comprimento $L = 4$ m. Considere o caso em que a placa da alma do perfil tenha as dimensões $D = 1{,}3$ m por $h_a = 10$ mm.

9.28 Uma viga de aço é construída pela união arrebitada de duas placas de aço sobre os flanges de um perfil I como na figura. As dimensões de cada placa são $B = 250$ mm e $h_p = 20$ mm. O perfil I tem altura total $D = 250$ mm e alma com espessura $h_a = 10$ mm. Cada flange do perfil I tem dimensões $b = 200$ mm e $h = 15$ mm. As peças são unidas por rebites que possuem força cisalhante admissível $F_r^{adm} = 100$ kN. A viga e em balanço com comprimento $L = 4$ m e força transversal na extremidade $F = 100$ kN. Determine os espaçamentos necessários entre os rebites.



9.29 Resolva o Exercício 28 para o caso em que cada placa tenha as dimensões $B = 250$ mm e $h_p = 15$ mm.

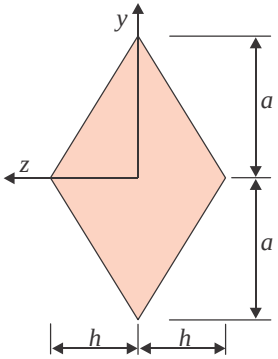
9.30 Resolva o Exercício 28 para o caso em que perfil I tenha altura total $D = 300$ mm.

9.31 Para a viga do Exercício 28, determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste mostrado no Exercício 25) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S).

9.32 Para a viga do Exercício 28 para o caso em que cada placa tenha as dimensões $B = 250$ mm e $h_p = 15$ mm. Determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste mostrado no Exercício 25) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S).

9.33 Para a viga do Exercício 28 para o caso em que perfil I tenha altura total $D = 300$ mm. Determine a tensão normal atuando nos flanges (ponto R próximo ao engaste mostrado no Exercício 25) e a tensão cisalhante atuando num ponto da linha neutra na alma (ponto S).

9.34 Para uma viga com seção transversal trapezoidal como na figura, determine a tensão cisalhante máxima e a tensão normal máxima. Considere o esforço cortante $V_y = 400$ kN, esforço de flexão $M_z = 4 \cdot 10^8$ Nmm, dimensões $h = 100$ mm e $a = 200$ mm. O momento fletor é $I_z = 2a^3h/12$, como deduzido no Exercício 64 do Capítulo 8 de flexão plana.

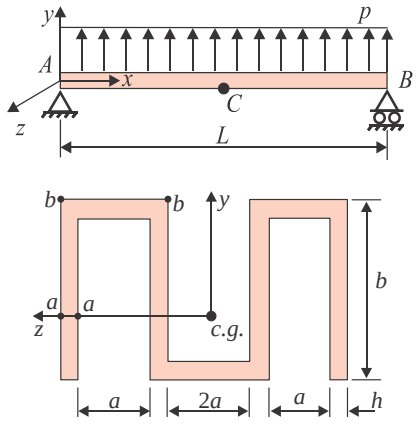


9.35 Refaça o Exercício 34 para $h = 50$ mm e $a = 400$ mm. Note que a área da seção é a mesma do Exercício 34.

9.36 Considere a viga de seção trapezoidal do Exercício 34, sob esforços cortante e de

flexão V_y e M_z arbitrários. Mostre que, para uma dada área A de seção transversal fixa, a tensão cisalhante máxima não muda para quaisquer dimensões a e h da seção, e que a tensão normal máxima varia linearmente com o fator $1/a$.

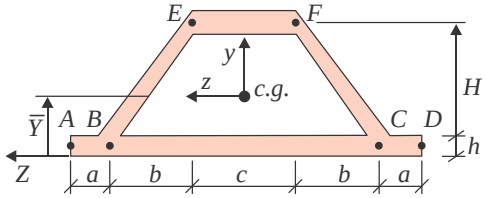
9.37 A viga biapoiada é submetida a uma carga distribuída uniforme p e com a seção transversal formada por uma chapa corrugada de espessura h como na figura. (a) prove ou explique que o centroide se localiza à meia altura da seção; (b) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e as seções onde atuam; (c) determine as tensões cisalhante e normal máximas. Use os valores $p = 100$ N/mm, $L = 1,5$ m, $a = 15$ mm, $b = 50$ mm e espessura uniforme $h = 2$ mm.



9.38 Refaça o Exercício 37 para $a = 15$ mm, $b = 60$ mm e $h = 3$ mm.

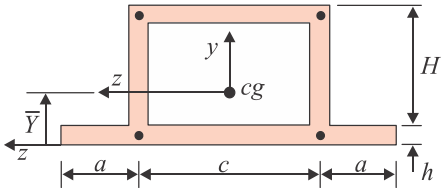
9.39 Refaça o Exercício 37 para $a = 15$ mm, $b = 80$ mm e $h = 3$ mm.

9.40 Considere a viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p para cima com a seção transversal de espessura h como na figura. (a) determine a posição $\bar{Y}$ do centroide; (b) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e as seções onde atuam; (c) determine as tensões cisalhante e normal máximas. Use os valores $p = 1$ N/mm, $L = 1$ m, $a = 15$ mm, $b = 15$ mm, $c = 30$ mm, $H = 30$ mm e espessura uniforme $h = 3$ mm.

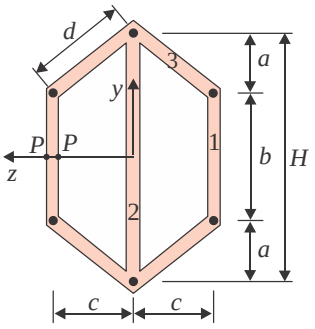


9.41 Refaça o Exercício 40 para $a = 15$ mm, $b = 15$ mm, $c = 30$ mm, $H = 50$ mm e $h = 3$ mm.

9.42 Refaça o Exercício 40 para $a = 15$ mm, $b = 0$ mm, $c = 60$ mm, $H = 30$ mm e $h = 3$ mm. Qual configuração entre esta e a do Exercício 40 é mais eficiente em suportar flexão?

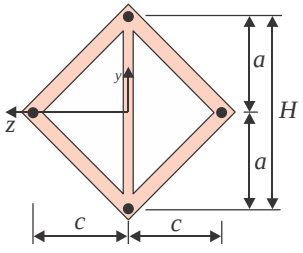


9.43 Considere a viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p para cima com a seção transversal de espessura h como na figura. (a) determine os esforços máximos cortante e de flexão, e as seções onde atuam; (b) determine as tensões cisalhante e normal máximas. Use os valores $p = 1$ N/mm, $L = 1$ m, $a = 15$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm, e espessura uniforme $h = 3$ mm.



9.44 Refaça o Exercício 43 para $a = 10$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm,.

9.45 Refaça o Exercício 43 para $a = 20$ mm, $b = 0$ mm, $c = 20$ mm.



Capítulo 10

Carregamentos combinados

Por: Prof. Paulo de Tarso R Mendonça, Ph.D., e
Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng.,
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.

O objetivo deste capítulo é o de completar a análise de tensões em problemas mais complexos de vigas submetidas a carregamentos oblíquos, ou carregamentos envolvendo simultaneamente diferentes tipos de solicitações, como momentos fletores, torçores e esforços axiais. Nesses casos tensões normais axiais e de flexão, e cisalhamento por torção ocorrem simultaneamente.

Figura 10.1: Foto de eixo de redutor de velocidade, mostrando rolamento (na extremidade direita), e diversas engrenagens helicoidais.

Em duas classe importante de estruturas, os componentes de barras e vigas encontram-se sob a ação de forças que geram simultaneamente esforços normal, cortantes e de momentos fletores e torçores. Essas classes são:

1. Componentes mecânicos, como os eixos rotativos em redutores de engrenagens, mecanismos, manipuladores robóticos, máquinas ferramentas;

2. Estruturas de construção civil, em vigas e colunas em prédios, pontes e viadutos.

A Figura 10.1 ilustra a foto de um eixo de redutor de velocidade, mostrando um rolamento montado na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. No detalhe aparecem também um rolamento radial de esferas e uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. Cada engrenagem se acopla a uma outra, que é montada num eixo distinto, formando um conjunto, que é uma caixa de redução de velocidade. Um esboco simplificado dessa situação é visto na Figura 10.2a, com um par de eixos que suportam um par de engrenagens acopladas. A interação entre as engrenagens resulta em forças que se transmitem a ambos os eixos. Considerando o eixo AC e a engrenagem B, temos na Figura 10.2b as forças na engrenagem B devidas ao acoplamento. Essas forças são F_r e F_t, nas

direções radial e tangencial à engrenagem e, se a engrenagem for helicoidal como aquela ilustrada, desenvolve-se também uma força axial F_a.

Quando se analiza isoladamente o eixo, como faremos nesse capítulo, fazemos a transferências dessas três forças, F_r, F_t e F_a, para a seção B do eixo. Nesse caso, devemos também incorporar os momentos concentrados decorrentes, como indicado na Figura 10.2c. Esses momentos aplicados são:

$$\begin{array}{ll} \cdot \text{ Momento fletor devido a } F_a\text{:} & \rightarrow m_z^a = F_a R, \\ \cdot \text{ Torque devido a } F_t\text{:} & \rightarrow m_x^t = F_t R. \end{array} \tag{10.1}$$

As forças aplicadas no dente da engrenagem também causam distribuições de esforços ao longo da viga:

1. A força radial F_r está na direção y, logo causa um esforço de momento fletor M_z em toda a viga, e esforço cortante V_y;

2. A força tangencial F_t está na direção z, logo causa um esforço de momento fletor M_y em toda a viga, e esforço cortante V_z.

Agora, devemos considerar o que ocorre na situação prática de um redutor de velocidades. O eixo AC em geral não suportará apenas uma engrenagem, em B como mostrado, mas terá pelo menos duas. Note que, na foto do redutor na Figura 10.1, o eixo possui diversas engrenagens. Cada uma delas pode estar acoplada a uma engrenagem montada em um eixo distinto. Dessa forma, cada engrenagem montada no eixo AC sofrerá uma força radial F_r com uma orientação distinta no plano xy. Isso fará com que cada seção do eixo AC sofra flexão numa direção no plano xy diferente das demais seções.

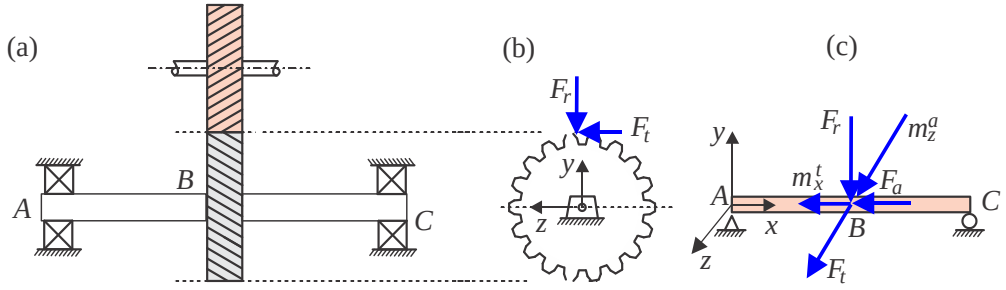


Figura 10.2: (a) Ilustração de eixo com dois mancais e uma engrenagem de dentes helicoidais acoplada a outra engrenagem; (b) forças radial e tangencial na engrenagem B; (c) forças e momentos aplicados no eixo AC na seção B.

10.1 Carregamento combinado - torção e tração

Em muitas aplicações, os eixos de seção circular usados para transmitir potência são submetidos não apenas à torção, que gera as tensões cisalhantes, mas também suportam carga axial, que gera tensões normais uniformes na seção. A carga axial pode surgir, por exemplo, do peso de componentes montados num eixo vertical, por mudança de temperatura durante o serviço, ou devido às forças no contato entre engrenagens helicoidais.

A Figura 10.3a ilustra uma barra tubular submetida a torção e carga axial. Os estados de tensões correspondentes a cada carregamento, **quando aplicados individualmente**, são:

$$\begin{array}{lll} \text{Tração} & \rightarrow \sigma_x = \dfrac{N_x}{A}, & \text{uniforme na seção;} \\ \text{Torção} & \rightarrow \tau_{x\theta}(r) = \dfrac{M_t}{J} r, & \text{varia radialmente na seção.} \end{array} \tag{10.2}$$

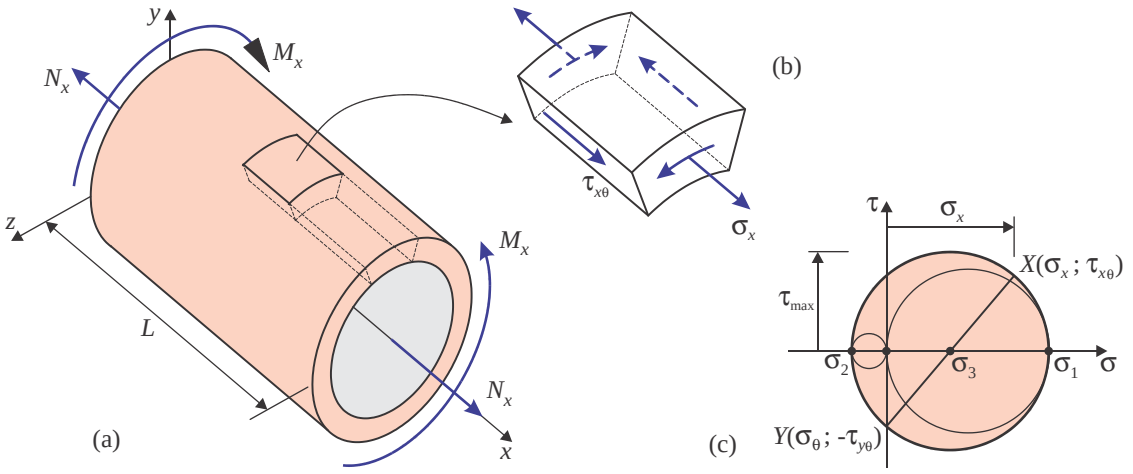


Figura 10.3: Estado de tensões num ponto de uma barra sob carregamento combinado de torção e tração.

onde $A = \pi(d_e^2 - d_i^2)/4$ é a área da seção tubular e J o momento polar dado por $J = \pi(d_e^4 - d_i^4)/32$.

Caso as tensões e deformações sejam suficientemente pequenas tal que o **princípio de sobreposição dos efeitos** possa ser aplicado, o estado de tensões resultante da aplicação simultânea da torção e da tração é constituído pela sobreposição dos estados de tensão individuais. Matematicamente, isso é representado simplesmente pela soma dos tensores tensão correspondentes:

$$\left.\begin{aligned} \text{tração} \rightarrow\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{torção} \rightarrow\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10.3}$$

A Figura 10.3b ilustra essas componentes de tensão num elemento diferencial do tubo. A aplicação de um critério de falha requer uma transformação de tensões. O círculo de Mohr correspondente a esse tensor tensão é visto na Figura 10.3c. Nota-se que, **em todos os problemas de torção+tração, o maior círculo é sempre aquele no plano** xt, uma vez que as tensões principais σ_1 e σ_2 tem sempre sinais contrários, e σ_3 é nula, o que faz com que os outros dois círculos sejam internos.

Assim, a tensão cisalhante máxima absoluta é obtida usando (5.43):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{x\theta}^2} \tag{10.4}$$

onde as tensões máximas são:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{4N_x}{\pi(d_e^2 - d_i^2)} \qquad \text{e} \qquad \tau_{x\theta} = \frac{M_x}{J}\frac{d_e}{2} = \frac{16M_x}{\pi(d_e^4 - d_i^4)}d_e. \tag{10.5}$$

Lembra-se que, em qualquer problema, a relação solicitação-resistência ao início do escoamento dada pelo **critério de Tresca** é

$$\underbrace{\tau_{\max}}_{\text{Solicitação}} = \underbrace{\frac{\sigma_E/2}{n}}_{\text{Resistência}}, \tag{10.6}$$

então, no presente problema de torção+tração, a tensão solicitante é dada por (10.4), que substituindo as expressões da área e do momento polar de inércia, A e J, em (10.2) torna-se

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{N_x^2}{(d_e^2 - d_i^2)^2} + \frac{64 M_x^2 d_e^2}{(d_e^4 - d_i^4)^2}}} \tag{10.7}$$

O dimensionamento é feito substituindo (10.7) em (10.6) e resolvendo a expressão

$$\boxed{\sqrt{\frac{N_x^2}{(d_e^2 - d_i^2)^2} + \frac{64 M_x^2 d_e^2}{(d_e^4 - d_i^4)^2}} = \frac{\pi \sigma_E}{4n}} \tag{10.8}$$

para um dos dois diâmetros, por exemplo o diâmetro externo d_e, para dado valor d_i. Em geral, a solução de (10.8) só poderá ser feita de forma numérica. Em alguns casos particulares a equação pode ser estabelecida em forma polinomial. Por exemplo,

- **Caso 1 - eixo seja maciço**, i.e., $d_i = 0$ a equação pode ser posta na forma:

$$k\ t^3 - N_x^2\ t - 64\ M_x^2 = 0, \tag{10.9}$$

onde $k = \left(\frac{\pi \sigma_E}{4n}\right)^2$ e $t = d_e^2$.

- **Caso 2 - eixo vazado**. O processo de dimensionamento é facilitado especificando a relação entre os dois diâmetros: $\alpha = d_i/d_e$. Assim, a solução é uma das raízes de

$$k t^3 - \frac{N_x^2}{(1-\alpha^2)^2} t - 64 \frac{M_x^2}{(1-\alpha^4)^4} = 0, \tag{10.10}$$

Nota-se que (10.10) resulta em (10.9) no caso de eixo maciço ($\alpha = 0$).

Exemplo 10.1 – Dimensionamento de barra sob tração e torção

Considere a barra da Figura 10.3a, de seção maciça, i.e., com $d_i = 0$ e $d_e = d$. Determine o diâmetro necessário para evitar o início do escoamento na barra, com coeficiente de segurança $n = 2,0$, tensão de início de escoamento do material $\sigma_E = 200$ MPa. A barra tem comprimento $L = 1$ m, e está submetida a esforço normal $N_x = 10$ kN e de momento torçor $M_x = 40$ kNmm.

Solução:

Todo o desenvolvimento segue as equações (10.2)-(10.8). De fato, basta aplicarmos os dados à equação (10.8):

$$\sqrt{\frac{(10^4)^2}{d^4} + \frac{64(40 \cdot 10^3)^2 d^2}{d^8}} = \frac{200\pi}{4 \times 2}$$

Simplificando obtemos $d^6 - 16211\ d^2 - 16,6 \cdot 10^6 = 0$. Fazendo uma substituição de variáveis, $t = d^2$, temos $t^3 - 16211\ t - 16,6 \cdot 10^6 = 0$ (de fato, essa é a eq.(10.8), com $k = 6168,5$). A única raiz positiva é $t = 276,23$ mm^2. Logo, o diâmetro necessário é $d = \sqrt{t} = 16,62$ mm. Usando esse diâmetro em (10.2) obtemos $\sigma_x = 46,1$ MPa e $\tau_{r\theta}^{\max} = 44,37$ MPa. Note que a prova de que todas as operações foram corretas, é obtida verificando se (10.6) é satisfeita.

10.2 Carregamento oblíquo - flexão não plana elástica

Até esse ponto estivemos considerando apenas o caso de **flexão plana**, i.e., quando todas as forças aplicadas estão contidas numa das duas direções principais de inércia da seção, direção y no caso estudado (ou z), e o momento fletor desenvolve-se na outra direção principal, z no caso (ou y).

A partir dessa seção estudaremos a situação mais comum, em que a flexão não é plana, i.e., as diversas forças aplicadas na viga não estão contidas num mesmo plano. Pode-se facilmente imaginar que a configuração deformada da viga também não estará contida num único plano. Também, a linha neutra terá uma orientação diferente em cada seção transversal.

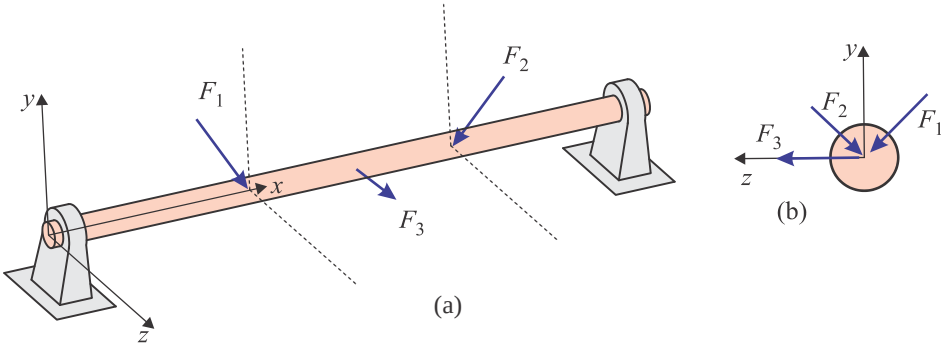


Figura 10.4: Ilustração de carregamento não-coplanar.

O **procedimento geral de análise** nessas situações segue as seguintes etapas:
Etapa 1 - Determinar os **eixos principais de inércia** y e z de cada seção. Isso é feito conforme visto na seção 10.4 e exemplificado a seguir. Entretanto, os casos mais frequentes em engenharia se constituem nos seguintes:

1. Vigas com pelo menos um plano de simetria, como os perfis T, ⌞ e [, onde o único trabalho necessário é a determinação de uma das coordenadas do centroide;

2. Vigas com dois planos de simetria, como os perfis □ e I, onde o centroide e as direções principais são conhecidas;

3. Seção circular, em eixos rotativos, onde qualquer par de eixos centroidais ortogonais são eixos principais. Nesse caso os processos de solução de dimensionamento e de análise de segurança é particularmente simplificado, como será exemplificado.

Etapa 2 - **Decompor cada carregamento** em suas componentes nas direções principais de inércia, F_y e F_z, (caso as direções principais sejam as mesmas ao longo de toda a viga, como é usual).
Etapa 3 - Determinar os dois diagramas de **esforços de flexão**, i.e., determinar as equações $M_y(x)$ e $M_z(x)$ a partir das forças F_z e F_y respectivamente. Usar, por exemplo, o método das seções conforme o Capítulo 2.
Etapa 4 - Aplicar a **fórmula de flexão** adaptada, conforme será visto a seguir na equação (10.13) ou (10.19), e fazer o dimensionamento ou análise de segurança. Isso é feito considerando diversas seções da viga que são pré-selecionadas pelo analista, como possíveis candidatas a serem **seção crítica**, i.e., a seção submetida a maior tensão.
Etapa 5 - Verificar se a **tensão máxima é elástica**. Toda a formulação vista nesse curso é para problemas elástico-lineares, exceto em algumas poucas seções. Além disso, em problemas de carregamento combinado ou oblíquo, usaremos o **princípio de sobreposição dos efeitos**, que só é válido em problemas lineares.

10.2.1 Fórmula de flexão oblíqua

Um problema genérico de flexão oblíqua pode ser sintetizado como na Figura 10.29. Consideremos previamente determinadas as direções principais de inércia da seção x, os eixos yz, e as componentes dos esforços de momento fletor $M_y(x)$ e $M_z(x)$. Esse conjunto constitui todos os dados necessários numa dada seção, e podem ser visualizados na Figura 10.5. **Se os momentos fletores forem suficientemente pequenos** (tal que as tensões associadas sejam elásticas), podemos considerar as

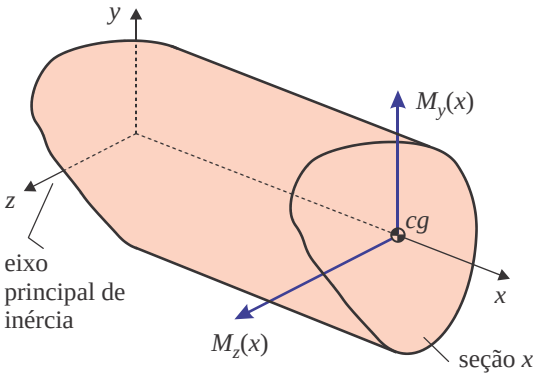


Figura 10.5: Componentes de esforços nas direções principais de uma seção genérica.

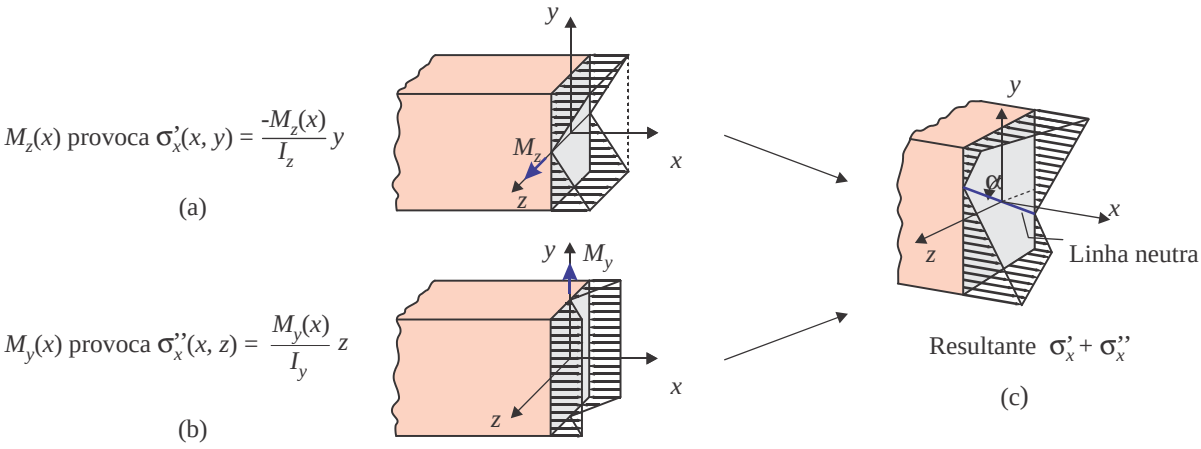


Figura 10.6: Sobreposição de tensões de flexão elásticas.

tensões normais σ_x que cada componente de momento geraria se agisse sozinha. Isso é ilustrado na Figura 10.6. Em (a) temos o efeito de M_z agindo sozinho, que é a distribuição σ'_x. Em (b) temos o efeito de M_y agindo sozinho, produzindo σ''_x. Assim,

$$\sigma'_x(x,\, y) = -\frac{M_z(x)}{I_z} y \qquad \text{e} \qquad \sigma''_x(x,\, y) = +\frac{M_y(x)}{I_y} z \ . \tag{10.11}$$

Observe que a expressão para σ''_x devido a M_y foi tomada simplesmente "imitando" a expressão de σ'_x devido a M_z. Uma única alteração se faz necessária, quanto ao sinal: o sinal deve ser positivo pois, interpretando fisicamente (ver Figura 10.6b), sabemos que para $M_y > 0$ e $z > 0$, devemos ter que σ''_x deve ser também positiva.

Se tivermos valores tais que

$$\boxed{|\sigma'_x(x,y)| \le \sigma_E, \qquad |\,\sigma''_x(x,y)| \le \sigma_E \qquad \text{e} \qquad |\sigma'_x(x,y) + \sigma''_x(x,y)| \le \sigma_E} \tag{10.12}$$

para qualquer y, z na seção x, então o estado de tensões na seção proveniente da aplicação simultânea de $M_y(x)$ e $M_z(x)$ é dado pela sobreposição de σ'_x e σ''_x, i.e.,

$$\boxed{\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y} \tag{10.13}$$

A Figura 10.6c ilustra essa distribuição, que é também linear na seção.

10.2.2 Linha neutra

Uma consequência da distribuição de σ_x em (10.13) é que agora a linha neutra na seção não mais coincide com o eixo z como na flexão plana. Lembremos que, **por definição, a linha neutra na seção é constituída pelos pontos onde** $\sigma_x = 0$. Aplicando essa condição a (8.45) temos que

$$\sigma_x(x, \overline{y}, \overline{z}) = 0 = \frac{M_y}{I_y}\overline{z} - \frac{M_z}{I_z}\overline{y} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{z} = \underbrace{\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}}_{\text{tg }\alpha}\overline{y}} \tag{10.14}$$

Se $M_y = 0$, a fórmula acima não se aplica, e a linha neutra é definida apenas por $\overline{y} = 0$. Se $M_z = 0$, ela é definida por $\overline{z} = 0$.

Definimos α como o **ângulo de inclinação da linha neutra, medido anti-horário em torno do eixo** z, a partir de y, como mostrado na Figura 10.6c ou 10.7.

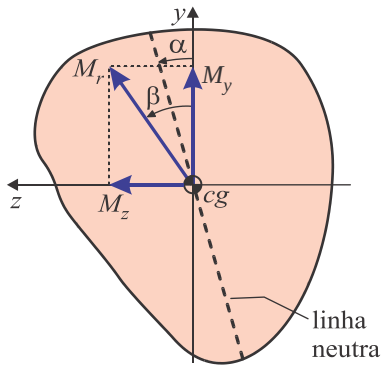


Figura 10.7: Orientação da linha neutra e do esforço resultante na seção.

Definimos também o ângulo β de orientação do momento fletor resultante na seção, como ilustrado na Figura 10.7. β é dado por

$$\text{tg }\beta \equiv \frac{M_z}{M_y}. \tag{10.15}$$

Então, (10.14) toma a forma

$$\text{tg }\alpha = \frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y} = \frac{I_y}{I_z}\text{tg }\beta. \tag{10.16}$$

Logo, a orientação da linha neutra é, em geral, diferente da orientação do momento fletor resultante, exceto em casos particulares onde $I_y = I_z$ (seções circulares e quadradas, por exemplo). Se $I_z > I_y$, i.e., $I_y/I_z < 1$, então $\alpha < \beta$ como na Figura 10.7.

Nos cálculos, a grande utilidade da determinação da linha neutra deve-se ao seguinte:

> A tensão normal máxima de flexão, $\sigma_x^{\max}$, sempre ocorre no ponto da seção mais distante da linha neutra. (10.17)

O motivo disso é claro quando consideramos que a distribuição de tensões é linear na seção, como visto na Figura 10.6c.

Exemplo 10.2 - Flexão não plana - seções circular e retangular

Considere a viga da Figura 10.8 para $a = 600$ mm e $F_1 = F_2 = F = 6$ kN. As forças fazem ângulos $\theta = \pm 30^o$ em relação ao eixo y. Determine o valor da tensão normal máxima caso a seção seja retangular com lados 50 mm $\times$ 50π mm e circular com diâmetro 100 mm.

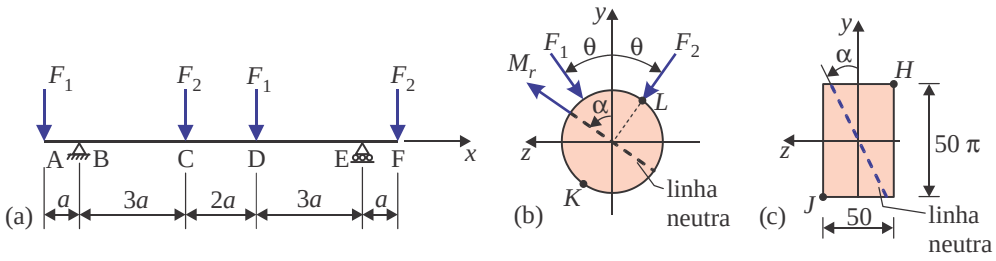


Figura 10.8: Dados do Exemplo 10.2.

Solução:

Uma vez que o posicionamento do centroide e dos eixos principais de inércia é óbvio em ambas as seções, pode-se iniciar diretamente pelo **cálculo dos esforços** em cada plano.

Forças no plano xy - momentos em z A Figura 10.9a mostra a viga com as componentes y do carregamento e das reações nos apoios. O processo de solução é o método das seções visto no Capítulo 2. As **reações** nos apoios B e E, vem das equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sum F_y & \rightarrow \quad R_{By} + R_{Ey} = 2F\sqrt{3}, \\ \sum M_z^B & \rightarrow \quad -F\dfrac{\sqrt{3}}{2}a + F\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3a) + F\dfrac{\sqrt{3}}{2}(5a) - R_{Ey}(8a) + F\dfrac{\sqrt{3}}{2}(9a) = 0. \end{cases}$$

Logo, $R_{By} = \sqrt{3}F$ e $R_{Ey} = \sqrt{3}F$.

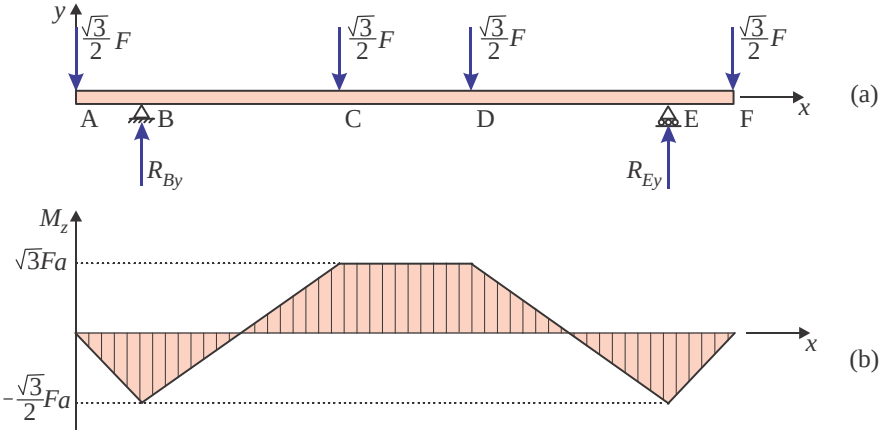


Figura 10.9: Carregamento no plano xy e diagrama de momentos $M_z(x)$.

Os esforços M_z são obtidos usando o método das seções e o diagrama é visto na Figura 10.9b.

Forças no plano xz - momentos em y Na Figura 10.10a temos as componentes z do carregamento, e as componentes das reações são obtidas pelas equações de equilíbrio como: $R_{Bz} = R_{Ez} = F/2$.

O método das seções pode ser aplicado para M_y usando a mesma convenção de sinais definida para M_z, como detalhado na Figura 2.16, página 23. Deve-se ter atenção para o fato que, numa seção tomada à esquerda do corte, M_y é positivo se estiver no sentido positivo do eixo y. Por exemplo, para a seção C^- (logo à esquerda da seção C), o diagrama de corpo livre do lado esquerdo do corte é como na Figura 10.11. Os esforços em C^- são obtidos por

$$\begin{cases} \sum F_z \quad \rightarrow \quad V_{C^-}^- + \dfrac{F}{2} - \dfrac{F}{2} = 0 & \rightarrow \boxed{V_{C^-}^- = 0} \\ \sum M_y^C \quad \rightarrow \quad M_y^{C^-} + \dfrac{F}{2}(3a) - \dfrac{F}{2}(4a) = 0 & \rightarrow \boxed{M_y^{C^-} = \dfrac{Fa}{2}} \end{cases}$$

Procedimento semelhante pode ser seguido para as demais seções. O diagrama de $M_y(x)$ é visto na Figura 10.10b.

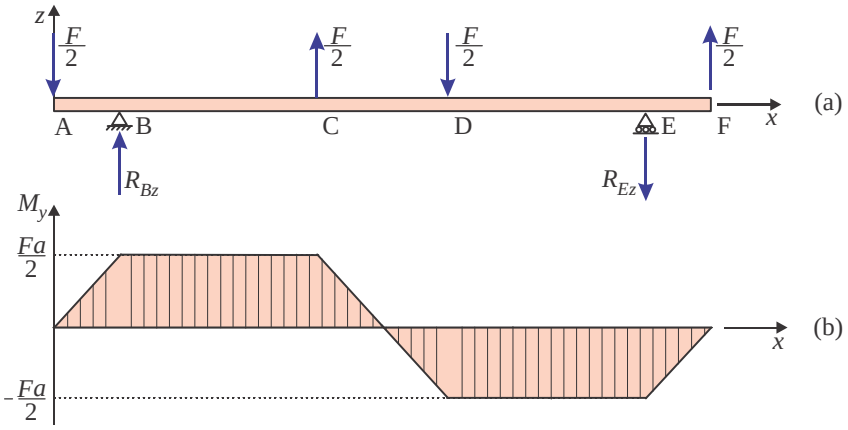


Figura 10.10: Carregamento no plano xz e diagrama de momentos M_y.

Seção crítica Como a seção é uniforme, a tensão máxima deve ocorrer na seção de maior momento resultante. Comparando os diagrama M_y e M_z concluímos que a seção C (e D) é crítica, com momentos

$$\begin{cases} M_y^c = \dfrac{Fa}{2} = \dfrac{6.000 \times 600}{2} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm.} \\ M_z^c = \sqrt{3}Fa = \sqrt{3}6.000 \times 600 = 6,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm.} \end{cases}$$

Tensão normal na seção retangular Com as dimensões da seção como na Figura 10.8c, os momentos de inércia são obtidos usando adequadamente a fórmula (8.27): $I_z = bh^3/12 = 50(50\pi)^3/12 = 1,61 \cdot 10^7 \text{mm}^4$, e $I_y = hb^3/12 = 50\pi 50^3/12 = 1,64 \cdot 10^6$ mm^4.

A orientação da linha neutra na seção C vem de (10.14):

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y} = \frac{1,64 \cdot 10^6}{1,61 \cdot 10^7}\,\frac{6,2 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^6} = 0,353 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = 19,4^o}$$

A linha neutra é plotada na Figura 10.8c. Claramente, os pontos mais distantes da linha neutra na seção C (onde as tensões serão máximas) são os pontos J e H. Então, usando (8.45) com as coordenadas do ponto J, $(y;\, z)_J = (-25\pi;\, 25)$ mm, temos

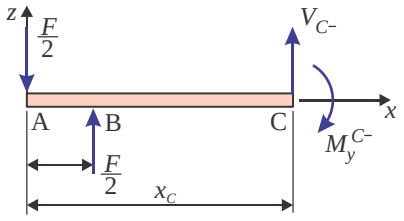


Figura 10.11: Diagrama de corpo livre para o corte na seção C^-.

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_x(x_c;\, y;\, z)_J = \frac{M_y^c}{I_y} z_J - \frac{M_z^c}{I_z} y_J, \\ &= \frac{1,8\cdot 10^6}{1,64\cdot 10^6} 25 - \frac{6,2\cdot 10^6}{1,64\cdot 10^7}(-25\pi) = 27,4 + 30,2, \\ \rightarrow &\quad \boxed{\sigma_{\max} = +57,6 \text{ MPa}}\end{aligned}$$

e em H a tensão é $\sigma_x = -57,6$ MPa.

Tensão normal na seção circular

Caso a seção seja circular os momentos de inércia são $I = I_y = I_z = \pi d^4/64 = \pi 100^4/64 = 4,91\cdot 10^6$ mm^4. O caso da seção circular é provavelmente o único em que podemos obter a tensão máxima sem determinar previamente a linha neutra. Basta usar o momento resultante na seção

$$M_r \equiv \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(1,8\cdot 10^6)^2 + (6,2\cdot 10^6)^2} = 6,46.10^6 \text{ Nmm}.$$

Como qualquer eixo ortogonal é principal de inércia, podemos simplesmente usar M_r como se fosse um problema de flexão plana na seção C. Assim a tensão máxima é

$$\sigma_{\max} = \frac{M_r\ d/2}{I} = \frac{6,46\cdot 10^6 (100/2)}{4,91\cdot 10^6} = \boxed{65,7 \text{ MPa} = \sigma_{\max}} \tag{10.18}$$

A linha neutra pode ser determinada usando (10.14): $\text{tg}\,\alpha = M_z/M_y = 6,2\cdot 10^6/1,8\cdot 10^6 = 3,44$, o que resulta $\alpha = 73,8^o$. É bastante próximo ao eixo z, como ilustrado na Figura 10.8b. A tensão normal máxima ocorre nos pontos K e L mais distantes da linha neutra. Usando trigonometria, facilmente obtemos as coordenadas de K como $(y; z)_{\text{K}} = (-48,0; 13,9)$ mm, que levadas a (10.13) resulta na tensão máxima já obtida em (10.18) usando o momento resultante. **Devemos enfatizar que o momento resultante só pode ser usado no cálculo de tensões de flexão em seções circulares**.

10.3 Flexão oblíqua com carregamento axial

Diversos sistemas importantes em engenharia incluem componentes submetidos à ação combinada de flexão e esforço axial, por exemplo, em eixos de redutores de velocidade e colunas em construção civil. A formulação para a determinação do estado de tensões é obtida de forma análoga ao do caso de flexão oblíqua simples, i.e., aplicando o **princípio de sobreposição dos efeitos, quando o problema for linear**.

A situação mais simples ocorre quando a viga é submetida a flexão plana e a esforços normais, como na Figura 10.12. Ali temos uma vista lateral da viga; (a) e (b) mostram as tensões de flexão e devido ao esforço normal. Quando o momento e o esforço normal são aplicados simultaneamente, a distribuição de tensões é como nas figuras (c) ou (d). É uma distribuição ainda linear, porém com a **linha neutra deslocada** em relação ao centroide da seção.

O estado de tensões em cada ponto de coordenadas (y, z) de uma seção de coordenadas x, é obtido como a soma direta dos estados de tensão proveniente dos momentos fletores com o estado proveniente do esforço axial. A Figura 10.13 ilustra essa sobreposição para o estado de tensões de flexão oblíqua e esforço normal. Assim, a tensão normal num ponto arbitrário da seção é

$$\boxed{\sigma_x(x,y,z) = \underbrace{\frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y}_{\text{flexão}} + \underbrace{\frac{N(x)}{A}}_{\text{axial}}} \tag{10.19}$$

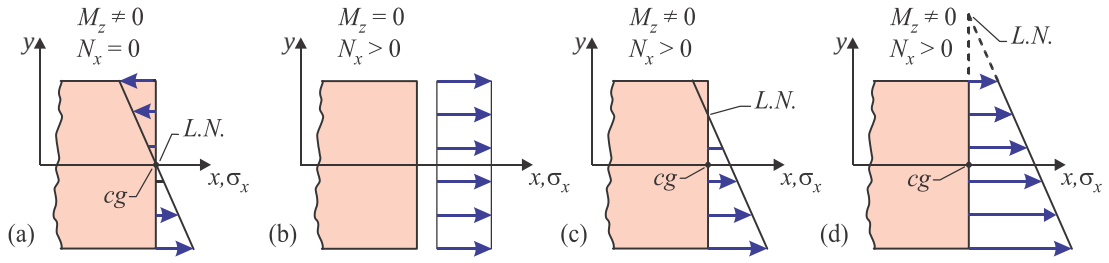


Figura 10.12: Sobreposição de tensões em viga sob flexão plana e esforço normal de tração.

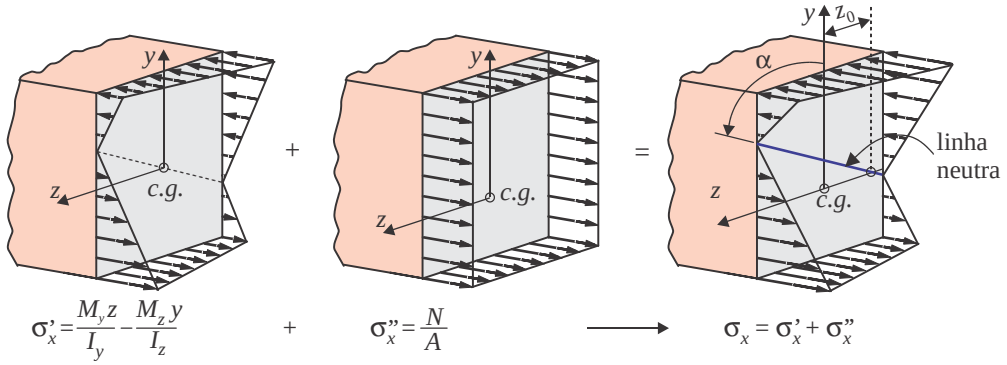


Figura 10.13: Sobreposição de tensões de flexão oblíqua e de esforço axial na viga. Em (a) $\sigma'_x = -M_z y/I_z + M_y z/I_y$; (b) $\sigma''_x = N/A$; (c) $\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x$.

Uma primeira observação sobre a equação (10.19) e sobre as Figuras 10.12 e 10.13 mostra que agora a **linha neutra não mais passa pelo centroide da seção**. De fato, se $y = z = 0$, temos que $\sigma_x = N/A \neq 0$, i.e., se o esforço normal é não nulo, a linha neutra sofre um deslocamento sobre a seção e pode até mesmo localizar-se fora dela.

A equação da **linha neutra** na seção x é obtida fazendo $\sigma_x(x, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ em (10.19), o que resulta

$$\boxed{\overline{z} = \underbrace{\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}}_{\text{tg }\alpha}\overline{y} - \underbrace{\frac{I_y}{A}\frac{N}{M_y}}_{z_o} \qquad \text{caso } M_y \neq 0 \text{ e } M_z \neq 0.} \tag{10.20}$$

onde α é a inclinação da linha neutra, medida a partir do eixo y, positiva quando anti-horário em torno do eixo z. A coordenada onde a linha intercepta o eixo $y = 0$ é z_o, como ilustrado na Figura 10.14.

Caso $M_y = 0$, a (10.20) não pode ser usada, e localização da linha neutra deve ser obtida da eq.(10.19), impondo $\sigma_x(x, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ com $M_y = 0$, o que resulta em

$$\boxed{\overline{y} = \frac{I_z}{A}\frac{N}{M_z} = const. \qquad \text{caso } M_y = 0 \text{ e } M_z \neq 0.} \tag{10.21}$$

Exemplo 10.3 - Problema de flexão oblíqua e carga axial

Considere a estrutura da Figura 10.15, sob as cargas concentradas $F_1 = F_2 = 100$ N, atuando nas direções x e z respectivamente e a carga distribuída $q = 1$ kN/m na direção y. Determine a tensão normal máxima agindo no trecho BC da viga. A seção transversal no trecho BD é retangular, com seção 10×20 mm^2.

Solução:

As primeiras etapas na análise consistem na identificação dos tipos de apoios, no cálculo das

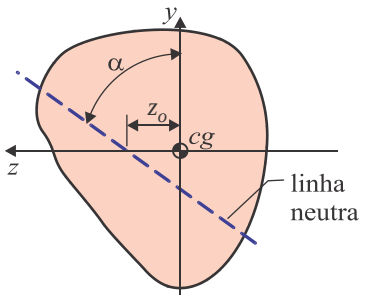


Figura 10.14: Posição e orientação da linha neutra.

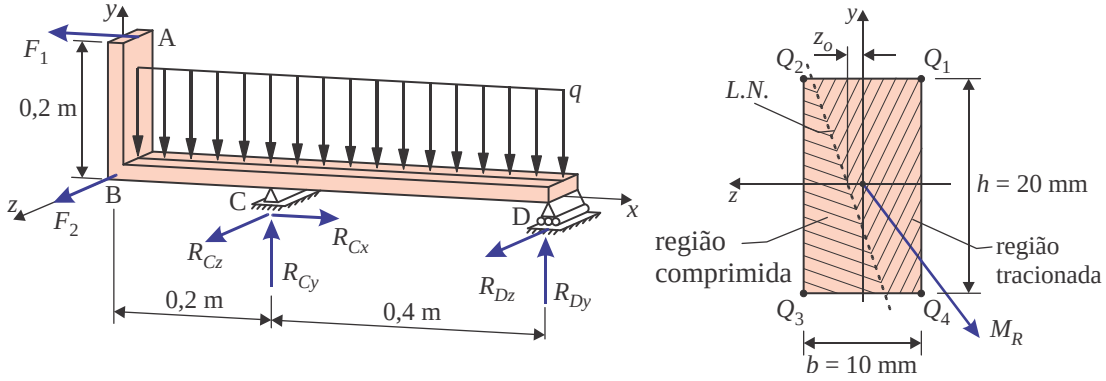


Figura 10.15: Dados do Exemplo 10.3.

reações e na determinação dos esforços normais e de momentos fletores M_y e M_z. Os valores das **reações nos apoios** C e D, nas direções y e z são:

$$\begin{array}{lcllll} R_{Cy} & = & 50 \text{ N}, & R_{Dy} = 100 \text{ N}, & R_{Cx} = 100 \text{ N}, \\ R_{Cz} & = & -150 \text{ N}, & R_{Dz} = 50 \text{ N}, & \end{array}$$

onde as orientações positivas são aquelas dos eixos cartesianos xyz mostradas na figura.

Os esforços em cada trecho, BC e CD são obtidos pelo método das seções:

$$\begin{array}{ll} \text{Trecho BC:} & \left\| \begin{array}{l} N_x = 100 \ [N] \\ M_y(x) = -100x \ [\text{Nm}] \\ M_z(x) = -500x^2 - 20 \ [\text{Nm}] \end{array} \right. \\ \text{Trecho CD:} & \left\| \begin{array}{l} N_x = 0 \\ M_y(x) = -50x - 30 \ [\text{Nm}] \\ M_z(x) = -500x(1-x) - 120 \ [\text{Nm}] \end{array} \right. \end{array}$$

Os diagramas de esforços e seus valores máximos são vistos na Figura 10.16.

A próxima etapa é o cálculo dos momentos de inércia e a área da seção:

$$\left\| \begin{array}{l} A = bh = 10 \times 20 = 200 \text{ mm}^2, \\ I_y = \dfrac{hb^3}{12} = \dfrac{20 \cdot 10^3}{12} = 1666,7 \text{ mm}^4, \\ I_z = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{10 \cdot 20^3}{12} = 6666,7 \text{ mm}^4. \end{array} \right.$$

Finalmente, identificamos a seção crítica como a seção C, onde simultaneamente os três esforços são máximos: $N_{xC} = 100$ N, $M_{yC} = -20$ Nm e $M_{zC} = -40$ Nm. Assim, a tensão máxima ocorre

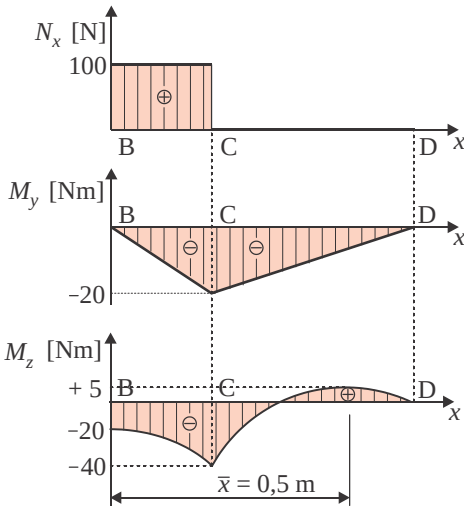


Figura 10.16: Diagramas de momento no Exemplo 8.5.

na seção C, onde a distribuição de tensões é dada pela eq. (10.19):

$$\begin{aligned}\sigma_x(x_C;y;z) &= \frac{N_x}{A}+\frac{M_{yC}}{I_y}z-\frac{M_{zC}}{I_z}y\\ &= \frac{100}{200}+\frac{(-20\cdot 10^3)}{1,67\cdot 10^3}z-\frac{(-40\cdot 10^3)}{6,67\cdot 10^3}y\\ &= 0,5-12z+64 \quad \text{em mm e MPa.}\end{aligned} \tag{10.22}$$

Como a tensão máxima na seção deve ocorrer no ponto mais distante da linha neutra, certamente ocorrerá num dos quatro vértices da seção, (pontos Q_1, Q_2, Q_3 ou Q_4 na Figura 10.15b), e certamente **será aquele ponto cujas coordenadas faz com que as três parcelas de (8.54) tenham o mesmo sinal**. Após certa análise identificamos o ponto Q_1 como aquele de tensão máxima: $y_{Q_1}=+h/2$ e $z_{Q_1}=-b/2$. Assim, (10.22) produz

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_x(x_C;y=+20/2;z=-10/2)=0,5-12(-5)+6(10)\\ &= 0,5+60+60=120,5 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Note que o ponto de máxima tensão poderia ter sido identificado primeiro determinando a **linha neutra** usando (10.20), o que resulta $\alpha=26,57^o$ e $z_o=-0,0417$ mm. A linha neutra e a orientação do momento fletor resultante são ilustrados na Figura 10.15b. Claramente, o ponto Q_1 é o mais afastado da linha neutra.

Exemplo 10.4 - Colunas sob carga excêntrica

Considere uma coluna de seção retangular de lados $b\times h$, submetida a uma carga axial compressiva F. Essa carga é aplicada com uma excentricidade em relação ao centroide da seção, nas coordenadas $(y_o;z_o)$, como mostrado na Figura 10.17. Determine o seguinte: (a) a tensão no ponto A da base; (b) as posições de aplicação da carga que garantem que o ponto A permaneça comprimido contra a base de apoio.

Solução:

Na seção da base a força F gera um esforço normal $N=F$. Entretanto, a excentricidade da carga gera um efeito de flexão oblíqua. As componentes de momento fletor são causadas pela

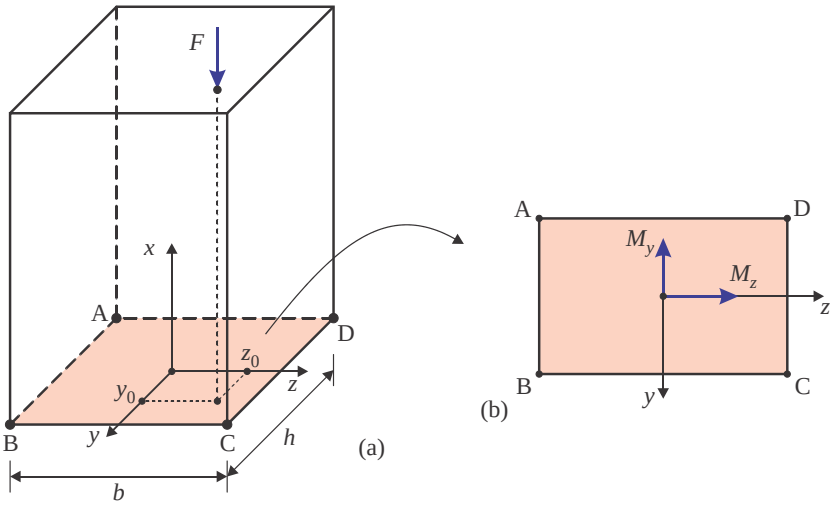


Figura 10.17: (a) Dados do Exemplo 10.4; (b) Esforços de flexão na seção da base.

excentricidade da força:

$$M_y = -Fz_o \qquad \text{e} \qquad M_z = Fy_o. \tag{10.23}$$

A tensão normal no ponto A da base pode ser obtida da eq. (10.19)

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y,$$

onde $(y;z) = (-h/2;-b/2)$, os momentos de inércia são $I_z = bh^3/12$ e $I_y = hb^3/12$, e a área da seção é $A = bh$. Assim,

$$\sigma_A = \frac{-F}{bh} + \frac{-Fz_o}{hb^3/12}\left(-\frac{b}{2}\right) - \frac{Fy_o}{bh^3/12}\left(-\frac{h}{2}\right)$$

Nota-se que, para geometria e força definidas, a tensão no ponto depende do valor da excentricidade, i.e., $\sigma_A = \sigma_A(y_o;z_o)$. Para que se tenha tensão compressiva em A, é necessário que:

$$\sigma_A(y_o;z_o) = -\frac{F}{bh} + \frac{Fz_o}{hb^2/6} + \frac{Fy_o}{bh^2/6} \leq 0. \tag{10.24}$$

Simplificando, obtém-se uma região delimitada por uma reta:

$$\boxed{\frac{z_o}{b/6} + \frac{y_o}{h/6} \leq 1, \qquad \text{i.e.,} \qquad z_o \leq -\frac{by_o}{h} + \frac{b}{6}} \tag{10.25}$$

Essa expressão define três situações:

- Se a força F for aplicada sobre pontos da reta definida pela igualdade, o ponto A fica sob tensão nula. Essa igualdade é definida pela reta $z_o \leq -hy_o/b + h/6$, e é plotada na Figura 10.18a.
- O ponto de intersecção da reta com o eixo z é obtido fazendo $y_o = 0$ em (10.25), o que gera $z_o = h/6$. A intersecção da reta com o eixo y é obtido fazendo $z_o = 0$ em (10.25), o que gera $y_o = b/6$.
- Os pontos de carregamento definidos pela desigualdade (a região sombreada na Figura 10.18a) fazem o ponto A ficar comprimido.
- Se a carga for aplicada fora da região delimitada pela eq. (10.25), (a região clara na Figura 10.18a), o ponto A é tracionado.

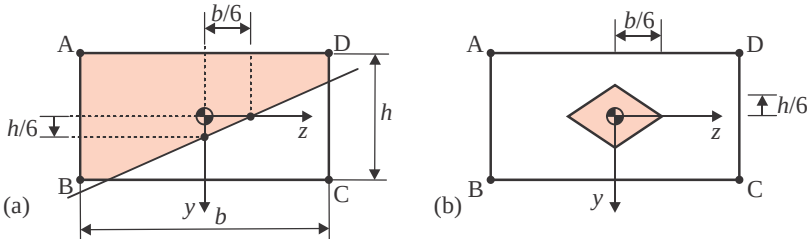


Figura 10.18: Regiões de carregamento que garantem compressão em toda a base da coluna.

Esse é um dos mais tradicionais problemas em engenharia civil clássica. As colunas utilizadas em épocas pré-industriais, antes do advento do concreto armado (com sua capacidade de suportar tração), eram simplesmente apoiadas sobre o solo, sem nenhum encravamento na base que pudesse suportar tração. Assim, a única capacidade da coluna para suportar cargas de flexão era o peso próprio. No caso de colunas leves, a carga devia ser apenas vertical, compressiva, e bastante bem centrada em torno do centroide da seção, a fim de manter toda a base comprimida, uma vez que uma flexão excessiva devido à excentricidade de carga faria parte da seção da base simplesmente perder o contato e se descolar, deixando de contribuir para suportar a carga. Estendendo a solução do exemplo, nota-se que **a região tolerada para aplicação da carga axial que gere apenas compressão em toda a base é um trapézio de diâmetros** $b/3$ e $h/3$, **em torno do centroide**, como ilustrado na Figura 10.18b.

10.4 Propriedades geométricas de uma seção

Quando observamos a fórmula de flexão oblíqua (10.19) notamos que existem apenas cinco parâmetros a serem determinados, $N_x(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$ $I_y(x)$ e $I_z(x)$ numa dada seção de coordenada x. Em **problemas isostáticos**, a determinação dos esforços normal e de momentos fletores segue os procedimentos próprios, vistos no Capítulo 2, de forma que apenas o correto posicionamento dos eixos principais da inércia na seção e a determinação dos momentos de inércia $I_y(x)$ e I_{zz} podem apresentar algum desafio. De fato, essas etapas devem ser trabalhadas de forma criteriosa. Apresentaremos nessa seção um detalhamento do estudo das propriedades de área que são relevantes no cálculo das tensões de flexão. Caso o leitor sinta-se seguro do tema, esta seção pode ser suprimida e a leitura continuada na próxima seção.

10.4.1 Momentos estáticos e centroide de uma seção assimétrica

Considere uma seção de formato arbitrário, como na Figura 10.19a, na qual desejamos localizar o centroide. A **primeira etapa** consiste em definir um **sistema provisório** de **eixos**, OYZ, como ilustrado. Esses eixos podem ser definidos em qualquer posição do espaço em relação à seção. Em relação a esses eixos, buscaremos determinar as coordenadas $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$ do centroide.

Por definição, os momentos estáticos da inércia em relação aos eixos Y e Z são:

$$\boxed{Q_z = \int_A Y\ dA \qquad \text{e} \qquad Q_Y = \int_A Z\ dA.} \tag{10.26}$$

As coordenadas do centroide são obtidas por

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{A}\int_A Y\ dA \qquad \text{e} \qquad \overline{Z} = \frac{1}{A}\int_A Z\ dA.} \tag{10.27}$$

onde A é a área total da seção. As equações acima podem também ser postas como

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{Q_z}{A} \qquad \text{e} \qquad \overline{Z} = \frac{Q_Y}{A}} \tag{10.28}$$

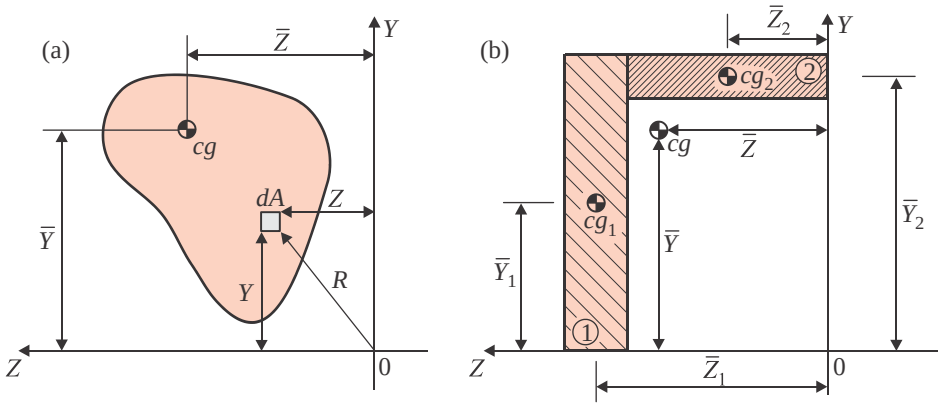


Figura 10.19: (a) Coordenadas do centroide de uma seção em relação a um sistema provisório de eixos OYZ; (b) seção composta por dois retângulos, 1 e 2.

Área composta

Frequentemente, em casos práticos, a seção pode ser considerada como um conjunto de áreas regulares como retângulos, triângulos, círculos ou semicírculos. A Figura 10.19b ilustra o caso de uma seção L, que consideramos ser constituída por duas áreas regulares, 1 e 2. Nesse caso, os momentos estáticos Q_Y e Q_Z podem ser obtidos como a soma dos momentos Q_{Yj} e Q_{Zj} de cada área j em relação aos eixos Y e Z:

$$Q_Y = \sum_{j=1}^{n} Q_{Yj} \qquad \text{e} \qquad Q_z = \sum_{j=1}^{n} Q_{Zj},$$

onde n é o número de regiões da seção, e os momentos de cada região, Q_{Yj} e Q_{Zj}, podem ser obtidos por $Q_{Yj} = A_j \overline{Z}_j$ e $Q_{Zj} = A_j \bar{Y}_j$. Nesse caso, (10.27) pode ser reescrito como

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j A_j \qquad \text{e} \qquad \overline{Z} = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n} \overline{Z}_j A_j} \tag{10.29}$$

se A_j é a área da região j e $\overline{Y}_j$ e $\overline{Z}_j$ são as coordenadas do centroide da área j. Note que, se a área j corresponde a um furo, ela é computada com valor negativo em A_j. Também, as coordenadas $\overline{Y}_j$ e $\overline{Z}_j$ possuem sinal, dependendo da posição do centroide j em relação aos eixos Y e Z.

10.4.2 Momentos de inércia da seção assimétrica

Dada uma seção arbitrária, sem planos de simetria, e dois eixos arbitrários ortogonais Y e Z como na Figura 10.19a, definem-se quatro momentos de inércia (ou segundos momentos) da área:

$$\boxed{I_{YY} \equiv \int_A Z^2\, dA, \qquad I_{ZZ} \equiv \int_A Y^2\, dA, \qquad I_{YZ} \equiv \int_A YZ\, dA, \qquad J \equiv \int_A R^2\, dA} \tag{10.30}$$

I_{YZ} é também chamado **produto da inércia** da seção. I_{YY} e I_{ZZ} são os momentos em relação aos eixos Y e Z respectivamente e J é o momento polar de inércia da seção, me relação ao polo O, que nesse caso é a origem do sistema de eixos. Em geral, J só tem uso se a área for circular, quando então é aplicado na teoria de torção de barras de seção circular (conforme Capítulo 7). **Em qualquer caso**, como $R^2 = Y^2 + Z^2$, tem-se que que os três momentos são relacionados por

$$\boxed{J = I_{YY} + I_{ZZ}} \tag{10.31}$$

Observe-se das definições que os momentos J, I_{YY} e I_{ZZ} são sempre positivos, em unidades de m^4 ou mm^4 por exemplo. O produto de inércia I_{YZ} pode ser positivo, negativo ou nulo.

Como os momentos I_{YY} e I_{ZZ} têm índices repetidos,
para simplificar a notação, frequentemente usam-se apenas I_Y e I_Z. (10.32)

10.4.3 Teorema dos Eixos Paralelos para momentos de inércia

Caso os momentos de uma área em relação a um par de **eixos centroidais** $y_c - z_c$ sejam conhecidos, podemos determinar os momentos em relação a **qualquer par de eixos** YZ **paralelos a** $y_c z_c$ usando o chamado Teorema dos Eixos Paralelos, cuja dedução é como segue.

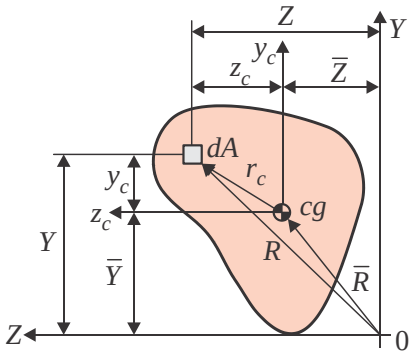


Figura 10.20: Eixos arbitrários YZ e centroidais $y_c z_c$ numa seção.

Considere a Figura 10.20 com os pares de eixos YZ e $y_c z_c$, sendo que as distâncias entre os eixos são $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$. Podemos usar as definições (10.30) para obter, por exemplo, I_{YY}. Como $Z = z_c + \overline{Z}$,

$$I_{YY} \equiv \int_A (z_c + \overline{Z})^2 \, dA.$$

Expandindo a potência temos

$$I_{YY} = \underbrace{\int_A z_c^2 \, dA}_{I_{y_c}} + 2\overline{Z} \underbrace{\int_A z_c \, dA}_{Q_{y_c}=0} + \overline{Z}^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}.$$

A primeira integral é o momento de inércia em relação ao eixo centroidal y_c, a segunda é o momento estático em relação ao eixo centroidal y_c, logo é igual a zero. A última integral é simplesmente o valor da área da seção. Assim temos

$$\boxed{I_{YY} = I_{y_c y_c} + \overline{Z}^2 A} \tag{10.33}$$

Repetindo o mesmo procedimento para os demais momentos temos:

$$\boxed{I_{ZZ} = I_{z_c z_c} + \overline{Y}^2 A, \qquad J_O = J_{cg} + \bar{R}^2 A \qquad \text{e} \qquad I_{YZ} = I_{y_c z_c} + \overline{YZ} A} \tag{10.34}$$

A relação para J_O pode ser detalhada observando na Figura 10.20 que, se $\bar{R}$ é a distância do centroide ao ponto 0, R é a posição do elemento diferencial dA ao ponto O, e r_c é a distância do ponto ao centroide, segue-se que, vetorialmente, $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{r}_c$. Em componentes cartesianas se tem: $R_z = \bar{Z} + z_c$ e $R_y = \bar{Y} + y_c$. O momento polar em relação ao polo O é

$$J_O \equiv \int_A \|\mathbf{R}\|^2 \, dA = \int_A \left(R_z^2 + R_y^2\right) \, dA.$$

Substituindo em termos de $\bar{Z}$, z_c, $\bar{Y}$ e y_c, temos

$$J_O = \int_A \left(\bar{Z} + z_c\right)^2 \, dA + \int_A \left(\bar{Y} + y_c\right)^2 \, dA.$$

Abrindo os quadrados obtemos

$$\begin{aligned} J_O &= \int_A \left(\bar{Z}^2 + 2\bar{Z}z_c + z_c^2\right)\, dA + \int_A \left(\bar{Y}^2 + 2\bar{Y}y_c + y_c^2\right)\, dA, \\ &= \left(\bar{Z}^2 \underbrace{\int_A dA}_{A} + 2\bar{Z}\underbrace{\int_A z_c dA}_{Q_{y_c}=0} + \underbrace{\int_A z_c^2\, dA}_{I_{y_c}}\right)\, dA + \left(\bar{Y}^2 \underbrace{\int_A dA}_{A} + 2\bar{Y}\underbrace{\int_A y_c dA}_{Q_{zc}=0} + \underbrace{\int_A y_c^2\, dA}_{I_{z_c}}\right) \end{aligned} \tag{10.35}$$

Nota-se que, como $z_c^2 + y_c^2 = r_c^2$, do terceiro e do sexto termos acima se tem que $J_{cg} = I_{y_c} + I_{z_c}$, onde J_{cg} é o momento polar de inércia da seção em relação a seu centroide. Com isso, se obtém $(10.34)_2$. Observe que $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$ possuem sinais algébricos, porém aparecem ao quadrado em I_{ZZ} e I_{YY}. Esses sinais são necessários apenas ao produto de inércia I_{YZ}.

10.4.4 Rotação de eixos - Eixos Principais de Inércia

Conhecidos os momentos de inércia de uma seção em relação a um par de eixos, por exemplo os eixos centroidais $y_c z_c$, buscamos expressões para determinar os momentos em relação a um outro par de eixos, $y_c' z_c'$, determinados por uma rotação plana de $y_c z_c$ em torno do eixo x_c. Esses dois pares de eixos são ilustrados na Figura 10.21. Observe que estaremos deduzindo aqui as expressões para relacionar momentos de inércia entre dois pares de eixos centroidais, porém as expressões serão válidas para eixos arbitrários também.

Podemos tomar as definições (10.30) para os momentos e aplicá-las aos eixos y_c e z_c:

$$I_{y_c'} \equiv \int_A z_c'^{\,2}\, dA, \qquad I_{z_c'} = \int_A y_c'^{\,2}\, dA, \qquad I_{y_c' z_c'} = \int_A y_c' z_c'\, dA \tag{10.36}$$

Entretanto, de trigonometria (ou diretamente das expressões para transformação de coordenadas em rotação plana), as coordenadas do ponto na área dA (Figura 10.21) em relação aos novos eixos $(y_c' z_c')$ são dadas por

$$\left\| \begin{aligned} y_c' &= y_c \cos\theta + z_c \text{ sen } \theta, \\ z_c' &= -y_c \text{ sen } \theta + z_c \cos\theta. \end{aligned} \right. \tag{10.37}$$

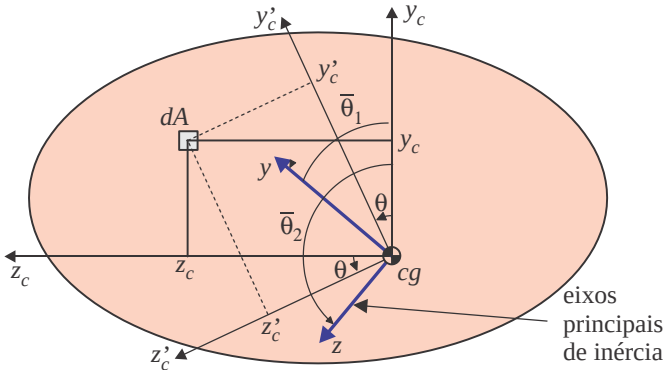


Figura 10.21: Rotação de eixos centroidais $y_c z_c$ e $y_c' z_c'$ para os eixos principais de inércia da seção yz.

Substituindo em (10.36) e reconhecendo que $I_{y_c} = \int_A z_c^2\, dA$, etc., obtemos

$$\left\| \begin{aligned} I_{z_c'} &= I_{y_c} \text{sen}^2\theta + I_{z_c} \cos^2\theta + 2I_{y_c z_c} \text{ sen } \theta \cos\theta, \\ I_{y_c'} &= I_{z_c'} = I_{y_c} \cos^2\theta + I_{z_c} \text{ sen}^2\ \theta - 2I_{y_c z_c} \text{ sen } \theta \cos\theta, \\ I_{y_c' z_c'} &= (I_{z_c} - I_{y_c}) \text{ sen } \theta \cos\theta + I_{y_c z_c}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\ \theta). \end{aligned} \right. \tag{10.38}$$

Usando as relações trigonométricas (5.20) na página 177, essas equações também podem ser postas na forma

$$\begin{aligned} I_{y_c'} &= \frac{1}{2}(I_{y_c} + I_{z_c}) + \frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{z_c})\cos 2\theta + I_{y_c z_c} \text{ sen } 2\theta, \\ I_{z_c'} &= \frac{1}{2}(I_{y_c} + I_{z_c}) - \frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{z_c})\cos 2\theta - I_{y_c z_c} \text{ sen } 2\theta, \\ I_{y_c' z_c'} &= -\frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{z_c}) \text{ sen } 2\theta + I_{y_c z_c}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{10.39}$$

Nesse ponto devemos lembrar que **a teoria de vigas exige que os eixos de coordenadas usados sejam eixo centroidais e sejam tais que** $I_{yz} = 0$ (ver equação (8.18)). Podemos usar $(10.39)_3$ para buscar os particulares valores de θ que satisfazem a essa condição. Fazendo $I_{y_c' z_c'} = 0$ na terceira equação, determinamos as raízes $\overline{\theta}$ por

$$\boxed{\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{-I_{y_c z_c}}{(I_{y_c} - I_{z_c})/2}} \tag{10.40}$$

Existem dois ângulos que satisfazem a essa equação, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$, que são defasados de 90^o. Eles indicam as direções de dois eixos y e z, os chamados **eixos principais de inércia** da seção, em relação aos quais o produto de inércia $I_{yz} = 0$, como exige a teoria de flexão. Esses são os eixos principais y e z indicados na Figura 10.21, e são orientados pelos ângulos $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$, positivos quando **anti-horários a partir do eixo** y_c **em torno do eixo** x.

Os valores dos momentos de inércia associados aos eixos principais são obtidos simplesmente substituindo $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ em $(10.39)_1$, i.e.,

$$\left\| \begin{aligned} I_y &= \frac{1}{2}(I_{y_c} + I_{z_c}) + \frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{z_c})\cos 2\overline{\theta}_1 - I_{y_c z_c}\text{sen } 2\overline{\theta}_1, \\ I_z &= \frac{1}{2}(I_{y_c} + I_{z_c}) + \frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{z_c})\cos 2\overline{\theta}_2 - I_{y_c z_c}\text{sen } 2\overline{\theta}_2. \end{aligned} \right. \tag{10.41}$$

Por outro lado, podemos buscar os valores máximo e mínimo de $I_{y_c'}$ dentre todas as infinitas orientações θ. Derivando (10.39) em relação a θ temos

$$\frac{dI_{y_c'}}{d\theta} = -\frac{(I_{y_c} - I_{z'})}{2} 2\text{sen } 2\theta - 2I_{y_c' z_c'}\cos 2\theta^* = 0$$

Logo, as raízes θ^* são os ângulos que satisfazem

$$\text{tg } 2\theta^* = \frac{-I_{y_c z_c}}{(I_{y_c} - I_{z_c})/2}. \tag{10.42}$$

Comparando com (10.40) vemos que os ângulos que geram os valores extremos de momento de inércia são os mesmos ângulos em que o produto de inércia é zero, i.e., as direções principais de inércia da seção.

As relações de transformação (10.38)-(10.42) tem exatamente o mesmo formato das expressões de transformação de tensões planas. Por exemplo, compare (10.38) e (10.39) a (5.17) e (5.21), e as orientações dos eixos principais em (10.40) e (5.23). De fato, essas são as expressões de transformação plana de qualquer tensor de segunda ordem, como as tensões e deformações. Assim, pode-se usar a representação do **círculo de Mohr** também para a determinação dos eixos e momentos principais de inércia. Em relação ao círculo de Mohr de tensões, basta que se faça as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\rightarrow I_{y_c} \\ \sigma_y &\rightarrow I_{z_c} \\ \tau_{xy} &\rightarrow -I_{y_c z_c} \end{aligned} \tag{10.43}$$

Assim, o círculo é plotado num plano $I \times I_{yz}$, onde os momentos dos eixos y_c e z_c são representados

por dois pontos de coordenadas $Y_c = (I_{y_c};\ -I_{y_c z_c})$ e $Z_c = (I_{z_c};\ I_{y_c z_c})$. O círculo então apresenta-se como na Figura 10.22.

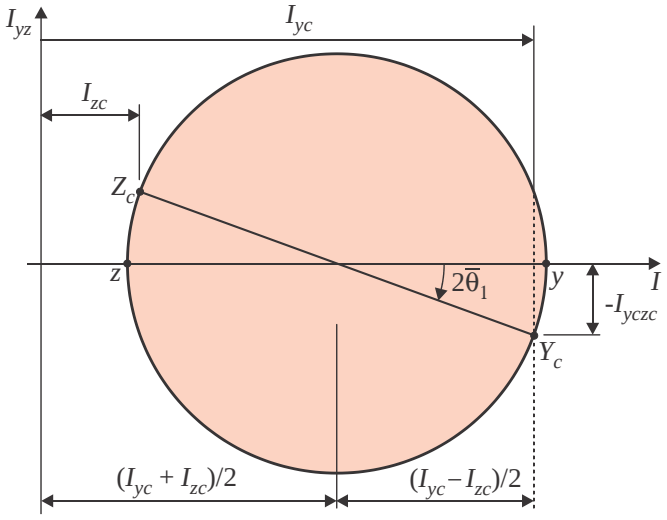


Figura 10.22: Círculo de Mohr para determinação de direções e valores principais de momentos de inércia.

Os valores principais do momento de inércia, I_y e I_z, tanto podem ser obtidos de (10.41) quanto pelas expressões advindas da trigonometria do círculo (análogo a (5.44)):

$$\left.\begin{matrix} I_y \\ I_z \end{matrix}\right\} = \frac{(I_{y_c} + I_{z_c})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} \tag{10.44}$$

10.5 Flexão em viga de seção assimétrica

Exemplo 10.5 - Flexão em viga de seção L

Determine a tensão máxima na seção mostrada na Figura 10.23a, submetida a um esforço de momento fletor $m = 7,5 \cdot 10^5$ Nmm na orientação indicada pelo ângulo $\delta = 20°$ anti-horário a partir do eixo centroidal z_c, paralelo à base (a posição do centroide é ainda desconhecida). As dimensões são: $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm.

Solução:

Parametrizamos a geometria como se segue. A largura e altura total da seção são designadas por $b = 76,2$ mm e $h_1 = 101,6$ mm. Dividimos a seção nas duas regiões hachuradas mostradas na Figura 10.23a. A região vertical é denominada **área 1**, de dimensões $b_1 = h = 12,7$ mm e altura $h_1 = H + t = 101,6$ mm. A região horizontal é a **área 2**, de dimensões $b_2 = b = B - h = 63,4$ mm e altura $h_2 = t = 12,7$ mm. As áreas são

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Área 1} \rightarrow A_1 = b_1 h_1 = 101,6 \times 12,7 = 1.290,32 \text{ mm}^2, \\ \text{Área 2} \ \rightarrow A_2 = b_2 h_2 = 63,4 \times 12,7 = 805,18 \text{ mm}^2, \\ \text{Área} \quad \rightarrow A = A_1 + A_2 = 2.095,5 \text{ mm}^2. \end{array} \right.$$

Etapa 1 - Posição do centroide. São definidos os eixos temporários OYZ, como ilustrado na Figura 10.23a. As coordenadas $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$ do centroide são obtidas usando (10.29):

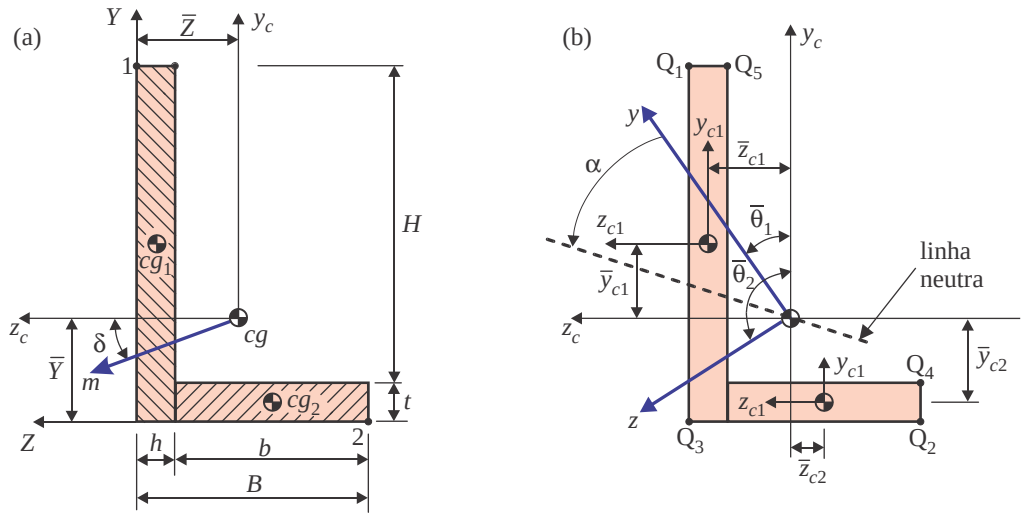


Figura 10.23: Seção L sob flexão no Exemplo 10.5.

$$
\left\|\begin{array}{l}
A = A_1 + A_2 = 2.096,8 \text{ mm}^2, \\
\overline{Y} = \dfrac{1}{A}\left[\overline{Y}_1 A_1 + \overline{Y}_2 A_2\right] = \dfrac{1}{2.096,8}\left[\dfrac{101,6}{2}A_1 + \dfrac{12,7}{2}A_2\right] = 33,7 \text{ mm}, \\
\overline{Z} = \dfrac{1}{A}\left[\overline{Z}_1 A_1 + \overline{Z}_2 A_2\right] = \dfrac{1}{2.096,8}\left[\dfrac{-12,7}{2}A_1 + (-44,45)A_2\right] = -21,0 \text{ mm}.
\end{array}\right.
$$

Etapa 2 - Momentos de inércia centroidais. Tem-se agora definidos os eixos centroidais $(y_c; z_c)$ indicados na figura 10.23b. Primeiro obtém-se as coordenadas centroidais de cada área em relação a esse sistema:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{y}_{c1} = \overline{Y}_1 - \overline{Y} = 17,1 \text{ mm}, & \overline{z}_{c1} = \overline{Z}_1 - \overline{Z} = 14,6 \text{ mm}, \\
\overline{y}_{c2} = \overline{Y}_2 - \overline{Y} = -27,4\text{mm}, & \overline{z}_{c2} = \overline{Z}_2 - \overline{Z} = -23,4 \text{ mm}.
\end{array}
$$

Usando (10.33)-(10.34), tem-se

$$
\begin{aligned}
I_{y_C} = I_{y_c}^{(1)} + I_{y_c}^{(2)} &= \left[I_{y_{c1}} + \overline{z}_{c1}^2 A_1\right] + \left[I_{y_{c2}} + \overline{z}_{c2}^2 A_2\right], \\
&= \left[\frac{h_1\, b_1^3}{12} + 14,65^2 \times 1.290\right] + \left[\frac{h_2\, b_2^3}{12} + 23,45^2 \times 806,5\right], \\
&= 2,94 \cdot 10^5 + 7,14 \cdot 10^5 = 1,01 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{z_C} = I_{z_c}^{(1)} + I_{z_c}^{(2)} &= \left[I_{z_{c1}} + \overline{y}_{c1}^2 A_1\right] + \left[I_{z_{c2}} + \overline{y}_{c2}^2 A_2\right], \\
&= \left[\frac{b_1\, h_1^3}{12} + 17,1^2 \times 1.290\right] + \left[\frac{b_2\, h_2^3}{12} + 27,35^2 \times 806,5\right], \\
&= 1,49 \cdot 10^6 + 6,14 \cdot 10^5 = 2,10 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{y_C z_C} = I_{y_c z_c}^{(1)} + I_{y_c z_c}^{(2)} &= \overline{y}_{c1}\overline{z}_{c1} A_1 + \overline{y}_{c2}\overline{z}_{c2} A_2, \\
&= 17,1 \times 14,65 \times 1.290 + (-27,75)(-23,45) \times 806,5 \\
&= 8,39 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.
\end{aligned} \tag{10.45}
$$

Etapa 3 - Direções e momentos principais de inércia. Os valores principais dos momentos podem ser obtidos diretamente de (10.44):

$$\begin{aligned}\{I_z; I_y\} &= \frac{1}{2}\left(I_{y_c} + I_{z_c}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2},\\ &= \frac{1}{2}\left(1,01\cdot 10^6 + 2,10\cdot 10^6\right) \pm 10^6\sqrt{\left(\frac{1,01-2,10}{2}\right)^2 + 0,84^2} = (1,555 \pm 1,00)\cdot 10^6,\\ &= \{2,55;\ 0,551\}\cdot 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned} \tag{10.46}$$

Os ângulos de orientação dos eixos principais yz vem de (10.40):

$$\text{tg } 2\overline{\theta} = \frac{-I_{y_c z_c}}{(I_{y_c} - I_{z_c})/2} = \frac{-0,840}{(1,01-2,10)/2} = -1,54 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \overline{\theta}_1 = 28,4^o \\ \overline{\theta}_2 = 118,4^o \end{cases} \tag{10.47}$$

Os ângulos $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ indicam as direções dos eixos y e z a partir do eixo y_c, como indicado na Figura 10.23b. Substituindo $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$ em (10.41) obtemos $I_y = 0,553\cdot 10^6$ e $I_z = 2,56\cdot 10^6$ mm^4, o que confirma (10.46). A Figura 10.24 mostra a representação dos eixos e momentos de inércia no círculo de Mohr e no sistema físico.

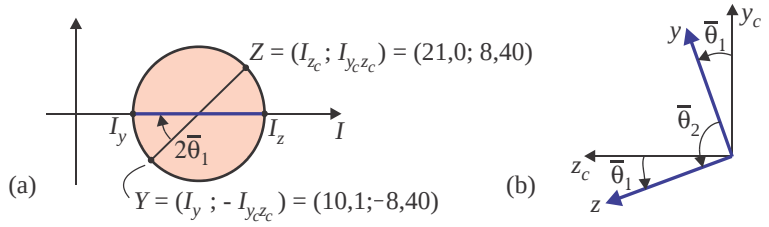


Figura 10.24: Representação dos eixos e momentos de inércia no círculo de Mohr e no sistema físico para o Exemplo 5.

Etapa 4 - Componentes do momento fletor resultante nas direções principais. O ângulo formado entre a direção do momento fletor m e o eixo principal y é $\beta = \delta + 90 - \overline{\theta}_1 = 20^o + 90^o - 28,4^o = 81,58^o$, como ilustrado na Figura 10.25. Então,

$$\begin{aligned} M_y &= m\ \cos\beta = 7,5\cos 81,58^o = 1,10\cdot 10^6 \text{ Nmm},\\ M_z &= m\ \text{sen}\ \beta = 7,5\ \text{sen}\ 81,58^o = 7,41\cdot 10^6 \text{ Nmm}. \end{aligned}$$

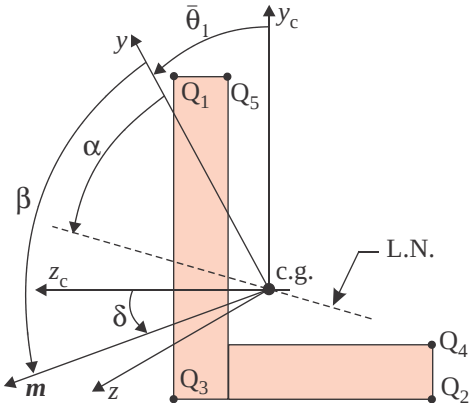


Figura 10.25: Indicação dos eixos principais yz e do momento resultante na seção.

Etapa 5 - Orientação da linha neutra é obtida a partir de (10.14):

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y} = \frac{0,553\cdot 10^6}{2,56\cdot 10^6}\cdot\frac{7,42}{1,11} = 1,446 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = 55,5^o}$$

onde α é medido a partir do eixo principal y, como mostrado na Figura 10.23b.

Etapa 6 - Tensão máxima na seção. Tendo orientado a linha neutra, buscamos os pontos mais distantes dela, que são os pontos Q_5 (máxima compressão) e Q_3 (máxima tração), como indicados na Figura 10.23b. Em módulo, a tensão máxima deve ocorrer no ponto Q_5, que tem coordenadas $(y_c; z_c)_{Q_5} = (H + t - \overline{Y}; -h - \overline{Z}) = (67,9; 8,3)$ mm em relação aos eixos centroidais. Precisamos rotacionar essas coordenadas para o sistema principal yz. Como yz é definido por uma rotação $\overline{\theta}_1$ a partir dos eixos $y_c\ z_c$, a transformação é feita por

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\}_{Q_5} = \left[\begin{array}{cc} \cos\overline{\theta}_1 & \text{sen}\ \overline{\theta}_1 \\ -\ \text{sen}\ \overline{\theta}_1 & \cos\overline{\theta}_1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} y_c \\ z_c \end{array}\right\}_{Q_5}.} \tag{10.48}$$

Substituindo os valores temos as coordenadas de Q_5 como

$$\left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\}_{Q_5} = \left[\begin{array}{cc} \cos(28,5^o) & \text{sen}\ (28,5^o) \\ -\ \text{sen}\ (28,5^o) & \cos(28,5^o) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 67,9 \\ 8,3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 63,4 \\ -25,1 \end{array}\right\}\text{mm}. \tag{10.49}$$

A tensão no ponto Q_5 então vem de (8.45):

$$\sigma_{Q_5} = \sigma_x(y;z)|_{Q_5} = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = \frac{1,11\cdot 10^5}{0,553\cdot 10^6}\times(-25,1) - \frac{7,42\cdot 10^5}{2,56\cdot 10^6}\times 63,4. \tag{10.50}$$

Logo, $\sigma_{Q_5} = -23,5$ MPa. No ponto Q_3 as coordenadas são $(y_c; z_c)_{Q_3} = (-\overline{Y}; -\overline{Z}) = (-33,7; 21)$ mm em relação aos eixos centroidais. Usando a relação (10.48) para essas coordenadas obtemos as coordenadas no sistema principal de inércia: $(y; z)_{Q_3} = (-19,6; 34,5)$ mm. Com isso, uma relação análoga a (10.50) produz $\sigma_{Q_3} = 12,6$ MPa. A verificação que essas são as tensões máximas na seção pode ser feita calculando as tensões em alguns outros pontos extremos da seção.

10.6 Carregamento combinado - tração, flexão e torção

Em muitas aplicações, os eixos de seção circular usados para transmitir potência mecânica são submetidos não apenas à torção, que geram as tensões cisalhantes, mas também suportam cargas axiais e de flexão, que geram tensões normais. A carga axial pode surgir, por exemplo, de peso de componentes montados num eixo vertical ou por mudança de temperatura durante o serviço. A carga de flexão surge das forças aplicadas em engrenagens e polias montadas no eixo. Toda a dedução que segue é bastante similar àquela da seção 10.1 de carregamento de torção com tração.

A Figura 10.26a ilustra uma barra tubular submetida a torção, flexão e carga axial. Os estados de tensões correspondentes a cada carregamento, **quando aplicados individualmente**, são:

$$\begin{array}{lll} \text{Tração} & \rightarrow \sigma_x = \dfrac{N_x}{A}, & \text{uniforme na seção;} \\ \text{Flexão} & \rightarrow \sigma_x(y) = -\dfrac{M_z}{I_{zz}}y, & \text{varia ao longo da altura } y; \\ \text{Torção} & \rightarrow \tau_{x\theta}(r) = \dfrac{M_t}{J}r, & \text{varia radialmente na seção.} \end{array} \tag{10.51}$$

onde $A = \pi(d_e^2 - d_i^2)/4$ é a área da seção tubular, I_{zz} é o momento de inércia dado por $I_{zz} = \pi(d_e^4 - d_i^4)/64$ e J é o momento polar dado por $J = \pi(d_e^4 - d_i^4)/32$.

Caso as tensões e deformações sejam suficientemente pequenas, tal que o **princípio de sobreposição dos efeitos** possa ser aplicado, o estado de tensões resultante da aplicação simultânea da torção, da flexão e da tração é constituído pela sobreposição dos estados de tensão individuais. Matematicamente, isso é representado simplesmente pela soma dos tensores tensão correspondentes:

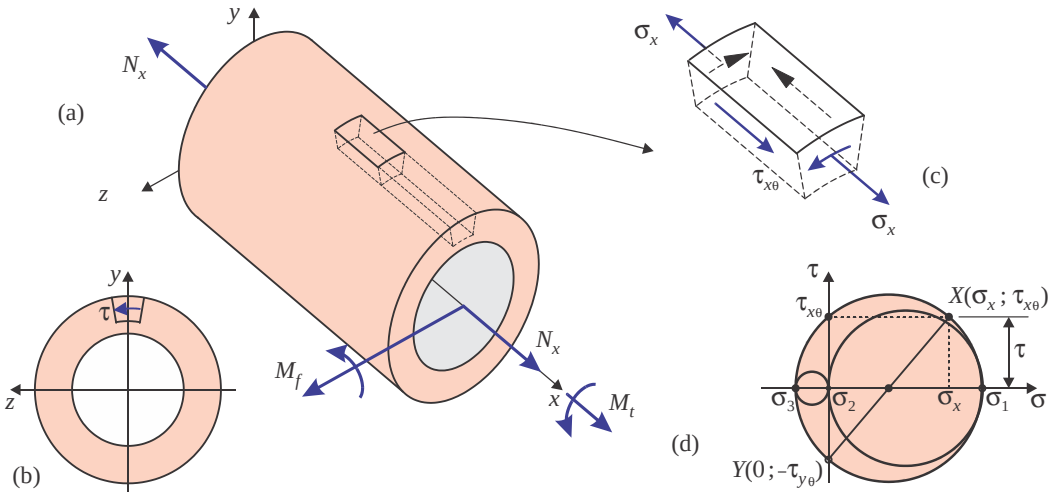


Figura 10.26: Estado de tensões no ponto crítico de uma barra sob carregamento combinado de torção, flexão e tração.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tração} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{tr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{flexão} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{fl}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{torção} \rightarrow\; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{\text{tr}} + \sigma_x^{\text{fl}} & 0 & \tau_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{x\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10.52}$$

As Figuras 10.26b e c ilustram essas componentes de tensão no elemento diferencial do tubo em que as tensões de torção e de flexão são máximas. A aplicação de um critério de falha requer uma transformação de tensões. O círculo de Mohr correspondente a esse tensor tensão é visto na Figura 10.26d. Nota-se que, **em todos os problemas de torção+flexão+tração, o maior círculo é sempre aquele no plano** xt, uma vez que as tensões principais σ_1 e σ_2 tem sempre sinais contrários, e σ_3 é nula, o que faz com que os outros dois círculos sejam internos.

Assim, a tensão cisalhante máxima absoluta é obtida usando (5.43):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{x\theta}^2} \tag{10.53}$$

onde as tensões máximas são:

$$\sigma_x = \frac{M_f}{I_{zz}}\frac{d}{2} + \frac{N_x}{A} = \frac{32M_f}{\pi(d_e^4 - d_i^4)}d_e + \frac{4N_x}{\pi(d_e^2 - d_i^2)} \quad \text{e} \quad \tau_{x\theta} = \frac{M_t}{J}\frac{d_e}{2} = \frac{16M_t}{\pi(d_e^4 - d_i^4)}d_e. \tag{10.54}$$

M_f e M_t são os esforços de momento fletor e torçor na seção. Deve-se lembrar que, em qualquer problema, a relação solicitação-resistência ao início do escoamento dada pelo **critério de Tresca** é

$$\underbrace{\tau_{\max}}_{\text{Solicitação}} = \underbrace{\frac{\sigma_E/2}{n}}_{\text{Resistência}}. \tag{10.55}$$

Então, no presente problema de **torção+flexão+tração**, a tensão solicitante é dada por (10.53), que substituindo as tensões em (10.54), torna-se

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{32M_f}{\pi(d_e^4 - d_i^4)}d_e + \frac{4N_x}{\pi(d_e^2 - d_i^2)}\right]^2 + \frac{16^2 M_t^2 d_e^2}{\pi^2(d_e^4 - d_i^4)^2}} \tag{10.56}$$

A situação em que atua na seção **apenas torção e flexão** é mais comum, e a tensão simplifica-se para:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{16d_e}{\pi(d_e^4 - d_i^4)}\sqrt{M_f^2 + M_t^2} = \frac{d_e}{2J}\underbrace{\sqrt{M_f^2 + M_t^2}}_{M_R}} \tag{10.57}$$

onde $M_R = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$ é o momento resultante, e $J = 2I_{zz}$ o momento polar de inércia.

O **dimensionamento para o caso torção+flexão** é feito substituindo (10.57) em (10.55) e resolvendo a expressão obtida após algumas manipulações

$$\boxed{d_e^4 - \left(\frac{32nM_R}{\pi\sigma_E}\right)d_e - d_i^4 = 0} \tag{10.58}$$

Pode-se obter um dos dois diâmetros, por exemplo o diâmetro externo d_e, para dado valor d_i. Em geral, a solução de (10.58) só poderá ser feita de forma numérica. Entretanto, em alguns casos a solução pode ser facilitada.

- **Caso 1 - eixo maciço**, i.e., $d_i = 0$, o diâmetro externo pode ser obtido de (10.58) em forma fechada:

$$\boxed{d_e = \left(\frac{32nM_R}{\pi\sigma_E}\right)^{1/3}} \tag{10.59}$$

- **Caso 2 - eixo vazado**. O processo de dimensionamento é facilitado especificando a relação entre os dois diâmetros: $\beta = d_e/d_i$. Assim, a solução é dada por

$$\boxed{d_i = \left(\frac{32nM_R}{\pi\sigma_E}\frac{\beta}{\beta^4 - 1}\right)^{1/3} \qquad \rightarrow \qquad d_e = \beta d_i} \tag{10.60}$$

Exemplo 10.6 – Análise de segurança de barra sob flexão e torção

O suporte mostrado na Figura 10.27a é de seção circular uniforme, maciça, de diâmetro $d = 30$ mm, e suporta uma força $F = 1.800$ N na direção z. O material é aço, com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 250$ MPa. Determine o coeficiente de segurança quanto ao início de escoamento, utilizando o critério de Tresca.

Solução:
As **reações** na base estão indicadas na Figura 10.27a. A reação de força em z é $R_z = F = 1.800$ N e as reações de momento são:

$$R_{My} = 450F = 450 \times 1.800 = 810 \text{ kNmm} \qquad R_{Mx} = 300F = 300 \times 1.800 = 540 \text{ kNmm}.$$

Os **esforços** na seção infinitesimalmente próxima à base são mostradas na Figura 10.27b. O esforço cortante na direção z é $V_z = R_z = 1.800$ N, e os esforços de momento torçor e fletor são:

$$M_t = R_{My} = 810 \text{ kNmm} \qquad M_f = R_{Mx} = 540 \text{ kNmm}.$$

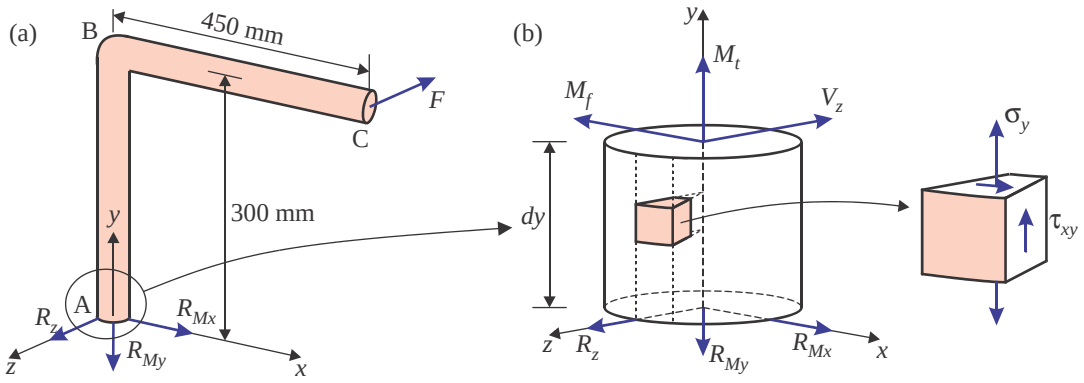


Figura 10.27: Estrutura do Exemplo 10.6, esforços na seção do engaste e tensões de flexão e torção.

As **tensões** de flexão e de torção no ponto crítico são mostradas na Figura 10.27c. Nota-se que o estado de tensões é plano, do mesmo tipo mostrado na Figura 10.26. O momento polar de inércia da seção é $J = \pi d^4/32 = \pi 30^4/32 = 7,95 \cdot 10^4$ mm^4, e o momento resultante na seção do engaste é $M_R = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = \sqrt{540^2 + 810^2} = 973$ kNmm. Assim, a tensão cisalhante máxima no ponto é dada pela eq. (10.57):

$$\tau_{\max} = \frac{d_e}{2J} M_R = \frac{30}{2 \times 7,95 \cdot 10^4} 973 \cdot 10^3 = 183,7 \text{ MPa}.$$

Finalmente, utilizando o **critério de Tresca**, o coeficiente de segurança é obtido por $n = \sigma_E / 2\tau_{\max} = 250/(2 \times 183,7) = 0{,}68 < 1$. Então, o diâmetro utilizado não é satisfatório para a estrutura sob esse carregamento.

Exemplo 10.7 – Dimensionamento de barra sob flexão e torção

Considerar o mesmo suporte do Exemplo 6, mostrado na Figura 10.27a, de seção circular uniforme, submetido ao mesmo carregamento. Determinar o diâmetro necessário (a) caso a barra seja maciça, e (b) caso seja um tubo em que os diâmetros interno e externo tenham entre si a relação $\beta = d_e/d_i = 1,6$. Utilizar o critério de Tresca com um coeficiente de segurança $n = 1,3$.

Solução:

Os esforços na seção de engaste são os mesmos já calculados no Exemplo 7. No caso de **seção maciça**, o diâmetro necessário é dado pela eq. (10.59) $d_e = \left(\frac{32 n M_R}{\pi \sigma_E}\right)^{1/3} = \left(\frac{32 \times 1,3 \times 973 \cdot 10^3}{\pi 250}\right)^{1/3}$ = 37,2 mm. Para a **seção tubular**, primeiramente obtém-se o diâmetro interno necessário pela eq. (10.60) $d_i = \left(\frac{32 n M_R}{\pi \sigma_E} \frac{\beta}{\beta^4 - 1}\right)^{1/3} = \left(5,154 \cdot 10^4 \frac{1,6}{1,6\beta^4 - 1}\right)^{1/3}$ = 24,6 mm, e em seguida o diâmetro externo é obtido por $d_e = \beta d_i = 1{,}6 \times 24{,}6 = 39{,}3$ mm.

10.7 Exercícios

10.1 Detalhe a dedução da eq. (10.7).

10.2 Detalhe a dedução da eq. (10.58).

10.3 Detalhe a dedução da eq. (10.59).

10.4 Detalhe a dedução da eq. (10.60).

10.5 Detalhe a dedução da eq. (10.21).

10.6 Detalhe a dedução da eq. (10.25).

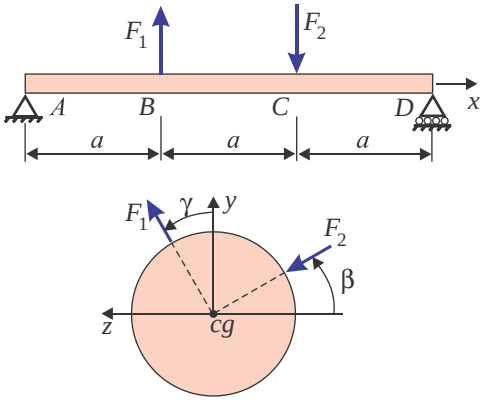
10.7 Detalhe a dedução da eq. (10.35).

10.8 Detalhe a dedução da eq. (10.38).

10.9 Detalhe a dedução da eq. (10.40).

Flexão oblíqua

10.10 A viga biapoiada suporta duas forças concentradas em dois planos distintos, como na figura. (a) Determine as reações nos apoios e (b) os diagramas de esforços de momento fletor. (c) determine a tensão normal máxima e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = F = 100$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 10$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$.



10.11 Resolva o Exercício 10 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 12$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.12 Resolva o Exercício 10 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 12$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 45°$. Se $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.13 Considere a viga do Exercício 10, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine o diâmetro d necessário para um coeficiente de segurança $n = 1,2$.

10.14 Considere a viga do Exercício 11, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine o diâmetro d necessário para um coeficiente de segurança $n = 1,2$.

10.15 Considere a viga do Exercício 12, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine o diâmetro d necessário para um coeficiente de segurança $n = 1,2$.

10.16 Considere a viga do Exercício 10, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine os diâmetros externo D e interno d de uma seção tubular necessários para um coeficiente de segurança $n = 1,2$. Use a relação $\alpha = d/D = 0,6$.

10.17 Considere a viga do Exercício 11, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine os diâmetros externo D e interno d de uma seção tubular necessários para um coeficiente de segurança $n = 1,2$. Use a relação $\alpha = d/D = 0,6$.

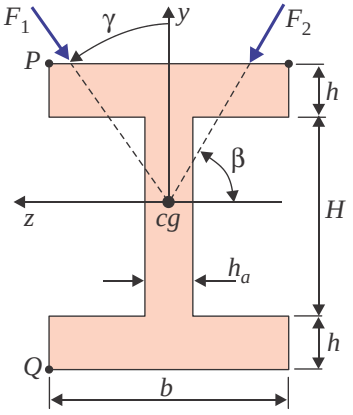
10.18 Considere a viga do Exercício 12, com o material com tensão de início de escoamento $\sigma_E = 180$ MPa. Determine os diâmetros externo D e interno d de uma seção tubular necessários para um coeficiente de segurança $n = 1,2$. Use a relação $\alpha = d/D = 0,6$.

10.19 Considere o problema do Exercício 10, com uma seção retangular em vez de circular, como na figura. Determine a tensão normal máxima, o ponto onde atua e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.

10.20 Considere o problema do Exercício 11, com uma seção retangular em vez de circular, como na figura do Exercício 19. Determine a tensão normal máxima, o ponto onde atua e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 12$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.

10.21 Considere o problema do Exercício 12, com uma seção retangular em vez de circular, como na figura do Exercício 19. Determine a tensão normal máxima, o ponto onde atua e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 12$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = \beta = 45°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.

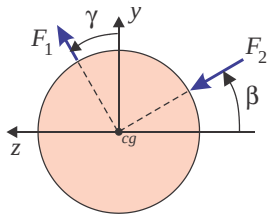
10.22 Considere o problema do Exercício 10, com uma seção padrão I em vez de circular, como na figura. Determine a tensão normal máxima, o ponto onde atua e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 20$ mm, $h = h_a = 3$ mm, $H = 20$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.



10.23 Considere o problema do Exercício 10, com uma seção padrão I em vez de circular, como na figura do Exercício 22. Determine a tensão normal máxima, o ponto onde atua e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 15$ mm, $h = h_a = 2$ mm, $H = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.

Flexão oblíqua + tração

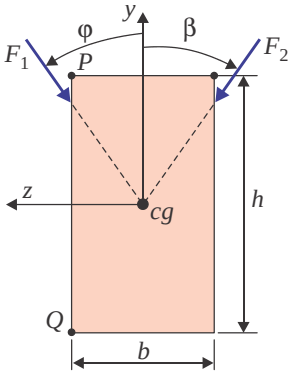
10.24 A viga biapoiada suporta duas forças concentradas transversais em dois planos distintos, como na figura, e um par de forças axiais F nas seções B e C. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 10. Determine a tensão normal máxima e a posição e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $F = 1$ kN, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 10$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.



10.25 Resolva o Exercício 24 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 12$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 11. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.26 Resolva o Exercício 24 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 12$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 45°$. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 12. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.27 Considere o problema do Exercício 24, com uma seção retangular em vez de circular como na figura, e um par de forças axiais F nas seções B e C. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 10. Determine a tensão normal máxima e a posição e a orientação da linha neutra. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Para isso analise as seções B e C.

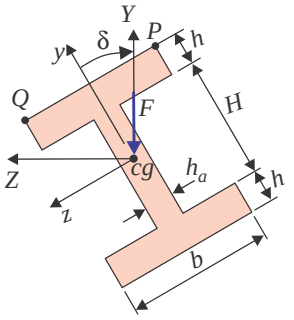


10.28 Resolva o Exercício 27 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da

seção são $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 11. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.29 Resolva o Exercício 27 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, as dimensões da seção são $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $\gamma = \beta = 45°$. As reações nos apoios e os diagramas de esforços de momento fletor são os mesmos do Exercício 11. Se o tensão de início de escoamento é $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga.

10.30 A viga em balanço mostrada na figura suporta uma força F vertical. A seção transversal é um perfil I rotacionado em relação à vertical em um ângulo δ. Determine a tensão normal máxima na viga e identifique onde atua. Identifique a linha neutra. Use $L = 600$ mm, $F = 100$ N. As dimensões da seção são $b = 20$ mm, $h = h_a = 3$ mm, $H = 20$ mm, $\delta = 30°$. Para $\sigma_E = 180$ MPa, determine o coeficiente de segurança na viga. Note que a seção é a mesma do Exercício 22.



10.31 Resolva o Exercício 30 para $b = 18$ mm, $h = 3$ mm, $h_a = 2$ mm, $H = 15$ mm.

Perfil L

10.32 Considere uma viga em balanço de comprimento L, submetida a uma força transversal na extremidade, orientada por um ângulo δ como mostrado na Figura. A seção transversal é aquela do Exemplo 10.5. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = 30°$, $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) No Exercício 32, qual a máxima força F admissível?

10.33 Considere uma viga do Exercício 32. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = 45°$, $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) Qual a máxima força F admissível?

10.34 Considere uma viga do Exercício 32. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = 60°$, $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) Qual a máxima força F admissível?

10.35 Considere uma viga com os dados do Exercício 32. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = -30°$ (i.e, F orientado em sentido horário), $h = t = 12,7$ mm, $B = 76,1$ mm, $H = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) Qual a máxima força F admissível?

10.36 Considere uma viga com os dados do Exercício 32. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = 20°$, com um perfil L de abas iguais: $h = t = 12,7$ mm, $H = b = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) Qual a máxima força F admissível?

10.37 Considere uma viga com os dados do Exercício 32. Determine a tensão máxima trativa e compressiva na seção próxima ao engaste, o ponto da seção onde atua, a

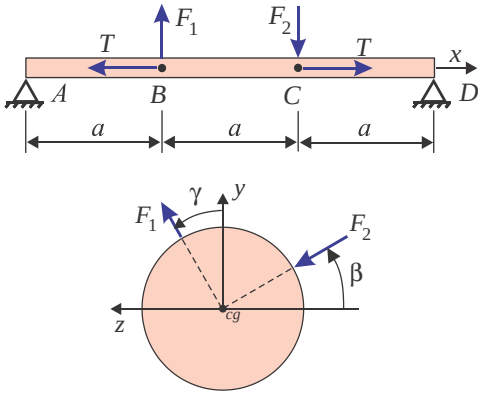
posição da linha neutra e o coeficiente de segurança se $\sigma_E = 200$ MPa. Determine também as tensões em todos os 5 pontos Q_1-Q_5 marcados na figura do Exemplo 10.5. Use os dados $F = 12,5$ kN, $\delta = 60°$, com um perfil L de abas iguais: $h = t = 12,7$ mm, $H = b = 88,9$ mm, $L = 600$ mm.

(a) Qual a máxima força F admissível?

10.38 Elabore um **programa computacional** para a formulação do Exemplo 10.5 e teste seus resultados.

(a) Flexão + torção, eixos

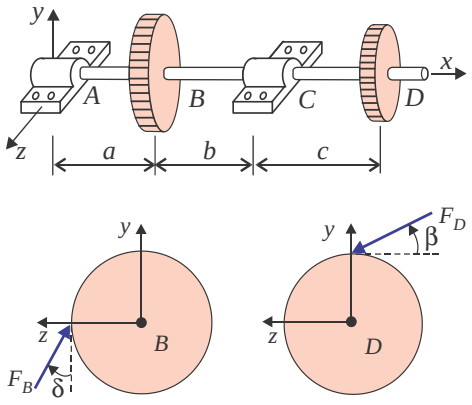
10.39 O eixo é biapoiado em A e D por dois mancais de rolamento como na figura. Nas seções B e C estão montadas duas engrenagens, através das quais são aplicadas sobre o eixo duas forças concentradas transversais, em dois planos distintos, e um par de torques T. (a) Determine as reações nos apoios e (b) os diagramas de esforços de momento fletor. (c) determine a tensão normal máxima e a orientação da linha neutra, (d) o coeficiente de segurança para início do escoamento usando o critério de Tresca, se $\sigma_E = 180$ MPa. Use $F_1 = F_2 = 100$ N, $T = 10$ kNmm, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 15$ mm, $\gamma = 45°$ e $\beta = 30°$. Considere que os rolamentos permitem pequenas rotações em torno dos eixos y e z. (Dica: os esforços flexurais do problema são idênticos aos do Exercício 10.)



10.40 Resolva o Exercício 39 para $F_2 = 200$ N. (Dica: os esforços flexurais do problema são idênticos aos do Exercício 11.)

10.41 Resolva o Exercício 39 para $F_1 = 100$ N, $F_2 = 200$ N, $a = 200$ mm, diâmetro da seção $d = 15$ mm, $\gamma = \beta = 45°$. (Dica: os esforços flexurais do problema são idênticos ao do Exercício 12.)

10.42 O eixo mostrado na figura é apoiado por dois mancais A e C, que podem tolerar pequenas rotações em torno dos eixos coordenados y e z. As engrenagens em B e D são cilíndricas de dentes retos, com diâmetros D_B e D_D, e suportam forças F_B e F_D inclinadas em relação aos eixos y e z como mostrado, por ângulos δ e β. Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento no eixo, pelo critério de Tresca. Use: $\sigma_E = 180$ MPa, $F_B = 3$ kN, $a = 200$ mm, $b = 150$ mm, $c = 100$ mm, $D_B = 300$ mm, $D_D = 125$ mm, $\delta = \beta = 20°$ e diâmetro do eixo $d = 30$ mm. (Nota: lembre-se que esse é um dimensionamento preliminar. Normalmente os cálculos são feitos por fadiga, e levando em conta as concentrações de tensão.)



10.43 Para o Exercício 42, dimensione o diâmetro d do eixo para um coeficiente de segurança $n = 1,8$ quanto ao início do escoamento, ignorando concentração de tensões.

10.44 Resolva o Exercício 42, com $d = 44$ mm.

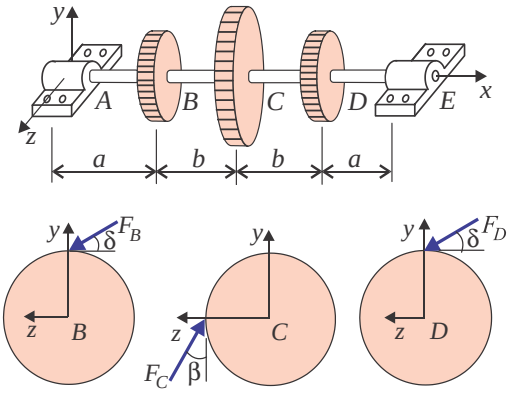
10.45 Resolva o Exercício 42, com $a = b = c = 100$ mm, $d = 40$ mm.

10.46 Para o Exercício 45, dimensione o diâmetro d do eixo para um coeficiente de segurança $n = 1,8$.

10.47 Resolva o Exercício 42, com $d = 35$ mm, $D_B = 200$ mm, $D_D = 80$ mm, para o caso em que as forças F_B e F_D sejam tais que o eixo transmite 1/3 torque do Exercício 42.

10.48 Para o Exercício 47, dimensione o diâmetro d do eixo para um coeficiente de segurança $n = 1,8$ quanto ao início do escoamento, ignorando concentração de tensões.

10.49 O eixo mostrado na figura é apoiado por dois mancais A e E, que podem tolerar pequenas rotações em torno dos eixos coordenados y e z. As engrenagens em B, C e D são cilíndricas de dentes retos, com diâmetros D_B, D_C e D_D, e suportam forças F_B, F_C e F_D inclinadas em relação aos eixos y e z como mostrado, por ângulos δ e β. Determine o coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento no eixo, pelo critério de Tresca. Use: $\sigma_E = 280$ MPa, $F_C = 2,5$ kN, $a = 100$ mm, $b = 200$ mm, $D_B = D_D = 80$ mm, $D_C = 200$ mm, $\delta = 22°$, $\beta = 20°$ e diâmetro do eixo $d = 25$ mm. (Nota: lembre que esse é um dimensionamento preliminar. Normalmente os cálculos são feitos por fadiga.)



10.50 Para o Exercício 49, dimensione o diâmetro d do eixo para um coeficiente de segurança $n = 1,8$.

10.51 Resolva o Exercício 49, com $d = 35$ mm.

10.52 Resolva o Exercício 49, com $F_C = 10$ kN, $b = 100$ mm e $\beta = 30°$.

10.53 Para o Exercício 52, dimensione o diâmetro d do eixo para um coeficiente de segurança $n = 1,8$.

Capítulo 11

* Aplicações de elasticidade e plasticidade plana

Nesse capítulo[1] alguns problemas mecânicos importantes são desenvolvidos utilizando, em grande parte, a teoria de elasticidade linear. Em adição à importância dos problemas tratados, a apresentação serve para ilustrar e exercitar o uso das equações gerais da mecânica dos sólidos, que são as seguintes: (1) as equações diferenciais de equilíbrio, (2) as relações deformação-deslocamento, (3) relação constitutiva (no presente caso a lei de Hooke 3D), e (4) condições de contorno. Essas equações foram deduzidas nos capítulos anteriores, porém, devido ao fato do presente livro ser a primeira apresentação do assunto ao estudante, os problemas anteriores foram bastante simples, geralmente estados uniaxiais de tensão (problemas de barras, vigas e torção). As aplicações no presente capítulo visam evitar que o estudante permaneça com uma visão incorreta da mecânica dos sólidos, inteiramente restrita a problemas uniaxiais. Assim, aqui as equações gerais são aplicadas a problemas de estado plano de tensões, em que as componentes de tensão variam de forma acentuada ao longo da geometria do corpo. Com isso se introduz, de forma natural, o conceito de concentração de tensões, que, embora não seja assunto natural de um primeiro curso, é essencial nos estudos seguintes.

O capítulo trata dos problemas de distribuições de tensão em discos sob carga coplanar, que são importantes em aplicações industriais como os volantes de motores. Em seguida a formulação é adaptada para a solução do problema de cilindros pressurizados com paredes espessas. Inicialmente o desenvolvimento é feito para a relação tensão-deformação elástica, e em seguida a solução é adaptada para os casos em que a pressão é tal que plastifica completamente a parede do cilindro, e também o caso de plastificação parcial, usando o modelo de material elasto-plástico ideal, isto é, sem encruamento. Finalmente a formulação é aplicada a toda a grande classe de barras de seção não circular sob torção.

11.1 Equações gerais em coordenadas cartesianas e polares

As equações gerais para a solução de qualquer problema não-térmico em mecânica dos sólidos foram deduzidas anteriormente, em coordenadas cartesianas, e são as seguintes:

- Equações diferenciais de movimento, eqs.(3.23), pg.(75):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{cx} &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{cy} &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{cz} &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \tag{11.1}$$

[1] Os tópicos do presente capítulo são opcionais, e podem ser suprimidos pelo professor num curso rápido de Resistência dos Materiais de formato tradicional, ou pode ser deslocado para o final do curso, como complementação na formação do aluno em Mecânica dos Sólidos.

- Relações deformação-deslocamento (restritas ao caso linear), eqs.(4.12), pg.(97):

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_x(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}. \end{array} \tag{11.2}$$

- Relações constitutivas (restritas ao caso linear elástico isotrópico da lei de Hooke generalizada), eqs.(4.60), pg.(120):

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}. \end{array} \tag{11.3}$$

As **equações de equilíbrio** são obtidas das equações do movimento, eliminando as forças de inércia do lado direito das eqs.(11.1). Essas 15 equações devem ser suplementadas de **condições de contorno** e condições iniciais adequadas para a solução de um problema. u, v e w são as componentes de deslocamento de um ponto de coordenadas $\mathbf{x} = (x, y, z)$, e $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ e $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma$ são as componentes dos tensores tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ nas direções cartesianas.

Uma vez que esse é um sistema de 15 equações e 15 funções incógnitas (u, v e w, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$) em problemas arbitrariamente complexos, soluções exatas são impossíveis de serem obtidas, e se pode contar apenas com soluções aproximadas via métodos numéricos como o de elementos finitos. Entretanto, para o projeto de componentes mecânicos, é útil dispor de soluções analíticas. Frequentemente essas soluções são viáveis para condições simplificadas, como nos casos de estados planos de tensão, axisimetria e outros.

Nessa seção apresentaremos, sem dedução, as equações gerais convertidas para **coordenadas polares, em estado plano de tensões**, de forma a permitir a solução dos problemas desenvolvidos na sequência. Considera-se o sistema de eixos cartesiano xyz e o sistema polar de coordenadas $r\theta z$, como ilustrado na Figura 11.1.

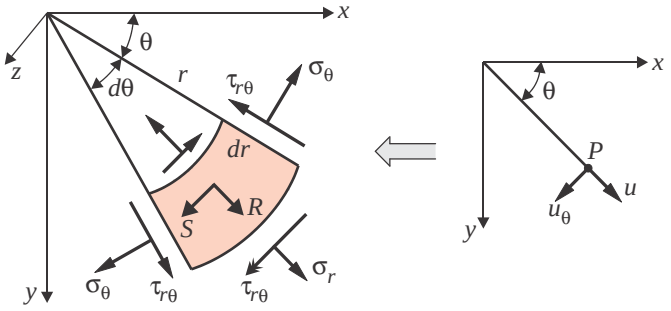


Figura 11.1: Sistema polar de coordenadas e componentes de tensão.

As **equações gerais em coordenadas polares**, para estados planos de tensões (EPT) e de deformações (EPD), são as seguintes:

- Equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \end{array} \tag{11.4}$$

onde R e S são as **forças de corpo por unidade de volume** nas direções radial e tangencial, respectivamente.

- Relações deformação-deslocamento (restritas ao caso linear):

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}} \tag{11.5}$$

onde u e u_θ são as componentes de deslocamento nas direções radial e tangencial, respectivamente.

- Relações constitutivas (restritas ao caso linear da lei de Hooke generalizada), para o estado plano de deformação (EPD) e estado plano de tensões (EPT):

$$\text{EPT} \longrightarrow \boxed{\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - v\sigma_r), \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}} \tag{11.6}$$

$$\text{EPD} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\,\sigma_r - v\sigma_\theta\right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-\nu)\,\sigma_\theta - v\sigma_r\right], \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta} \end{aligned}} \tag{11.7}$$

Frequentemente, em estados planos com forças de corpo nulas ($R = S = 0$), a solução analítica pode ser obtida com mais facilidade com a ajuda das chamadas **função tensão** $\phi(r, \theta)$. Essa é uma função ϕ que define as tensões através de suas derivadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Substituindo essas relações nas equações de equilíbrio (11.4), nota-se que essas são automaticamente satisfeitas, para qualquer função tensão. Entretanto, a função tensão deve satisfazer uma condição extra denominada **equação de compatibilidade**, que em coordenadas polares tem a seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi = 0 \tag{11.9}$$

As equações de compatibilidade são equações adicionais às equações gerais de mecânica dos sólidos, que são necessárias em problemas definidos inteiramente pelo campo de tensões (sem a presença explícita dos deslocamentos nas equações), como no presente caso. A equação de compatibilidade acima pode ser colocada numa notação compacta na forma $\bigtriangledown^2 \bigtriangledown^2 \phi = 0$, onde o **operador diferencial** $\bigtriangledown^2$ é definido em coordenadas polares por

$$\bigtriangledown^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{11.10}$$

Observação:
Nota-se que na Lei de Hooke, eqs. (11.6) e (11.7), as expressões das deformações em EPD podem ser obtidas fazendo as seguintes substituições nas equações de EPT:

$$\boxed{E \;\rightarrow\; \frac{E}{(1-\nu^2)} \qquad \text{e} \qquad \nu \;\rightarrow\; \frac{\nu}{(1-\nu)}} \tag{11.11}$$

De forma geral, considere-se um problema plano, que é definido pela forma da área, pelo carregamento, condições de contorno e propriedades do material. Se as forças de corpo forem nulas,

a solução do campo de tensões são as mesmas, quer sejam obtidas considerando o problema como um EPT ou como um EPD. A diferença surge apenas quando se buscam as deformações e os deslocamentos. Uma vez esses campos tenham sido obtidos para um dos estados planos, podem ser convertidas no outro bastando aplicar as substituições (11.11).

11.2 Problemas axisimétricos: disco e cilindro pressurizado

Consideram-se aqui os problemas axisimétricos em EPT. Um problema é axisimétrico se todos os seus parâmetros são independentes de θ, i.e., a geometria é de revolução, e a espessura, o carregamento e as condições de apoio são todas independentes de θ. Isto significa que a geometria deve ter formato de **disco** ou de **cilindro**. Essa condição é imposta aplicando em todas as equações diferenciais a condição $\partial/\partial\theta = 0$. Nesse caso, $\bigtriangledown^2$ simplifica-se para

$$\bigtriangledown^2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \tag{11.12}$$

A única coordenada restante é o raio. A equação de compatibilidade (11.9) simplifica-se para

$$\begin{aligned} \bigtriangledown^2 \bigtriangledown^2 \phi &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\phi &= 0, \\ \frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr} &= 0 \end{aligned} \tag{11.13}$$

Essa é uma equação diferencial ordinária, homogênea, de quarta ordem. Existe uma forma de $\bigtriangledown^2$mais simples de ser resolvida. Prova-se facilmente que

$$\bigtriangledown^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{11.14}$$

A última forma é denominada **forma "aninhada"** do operador, e é mais adequada a integração. A demonstração da igualdade acima pode ser feita facilmente executando as derivadas no último termo e verificando que se obtém o termo da esquerda.

A equação $\bigtriangledown^2 \bigtriangledown^2 \phi = 0$ pode ser integrada definindo-se uma variável auxiliar $H(r)$ definida como a solução de $\bigtriangledown^2\phi = H$. Então, $\bigtriangledown^2 \bigtriangledown^2 \phi = 0$ torna-se $\bigtriangledown^2 H = 0$. Isso pode ser mais facilmente visualizado por

$$\bigtriangledown^2 \underbrace{\bigtriangledown^2 \phi}_{=H} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \bigtriangledown^2 H = 0 \text{ e} \\ \bigtriangledown^2 \phi = H \end{cases} \tag{11.15}$$

Tem-se então duas equações diferenciais simultâneas: (a) $\bigtriangledown^2 H = 0$ e (b) $\bigtriangledown^2 \phi = H$. Resolve-se inicialmente a primeira equação, integrando sucessivamente a forma aninhada (11.14):

$$\begin{aligned} &\bigtriangledown^2 H = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH}{d_r}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dH}{d_r}\right) = 0, \\ &\int d\left(r\frac{dH}{dr}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad r\frac{dH}{dr} = \overline{A} \\ &\frac{dH}{dr} = \frac{\overline{A}}{r} \quad \rightarrow \quad \boxed{H = \overline{A}\,\ln r + \overline{B}} \end{aligned} \tag{11.16}$$

$\overline{A}$ e $\overline{B}$ são constantes de integração a serem posteriormente determinadas pelas condições de contorno. Essa expressão de G é usada para integrar a segunda equação:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= H \\
\frac{1}{r}\frac{d}{dd}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) &= \overline{A}\,\ln r + \overline{B} \\
\frac{d}{dr}(r\frac{d\phi}{dr}) &= \overline{A}r\,\ln r + \overline{B}r \qquad \rightarrow \qquad r\frac{d\phi}{dr} = \overline{A}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) + \frac{\overline{B}r^2}{2} + A, \\
\frac{d\phi}{dr} &= \overline{A}\left(\frac{r}{2}\ln r - \frac{r}{4}\right) + \frac{\overline{B}r}{2} + \frac{A}{r}, \\
\phi &= \underbrace{\frac{1}{8}\left(\overline{B} - 2\overline{A}\right)}_{C} r^2 + A\,\ln r + \underbrace{\frac{\overline{A}}{4}}_{B} r^2\,\ln r + D.
\end{aligned}
$$

As expressões envolvendo as constantes $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são coletadas em novas constantes, e a função tensão tem a forma geral

$$
\boxed{\phi(r) = A\,\ln r + Br^2\,\ln r + Cr^2 + D} \tag{11.17}
$$

Substituindo essa expressão nas eqs. (11.8), com a condição de axisimetria $\partial/\partial\theta = 0$, obtém-se as expressões gerais das tensões:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\,\ln r) + 2C, \\
&\sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\,\ln r) + 2C, \\
&\tau_{r\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{11.18}
$$

Levando essas tensões à Lei de Hooke generalizada para um **estado plano de tensões (EPT)**, eq.(11.6), tem-se as deformações:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right) = \frac{1}{E}\left[\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + B\left[(1-3\nu) + 2\,(1-\nu)\;\ln r\right] + 2C\,(1-\nu)\right], \\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) = \frac{1}{E}\left[-\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + B\left[(3-\nu) + 2\,(1-\nu)\;\ln r\right] + 2C\,(1-\nu)\right], \\
&\gamma_{r\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{11.19}
$$

A determinação das três constantes de integração, A, B e C, dependem das condições de contorno do corpo. Consideramos no presente texto dois casos clássicos de aplicação muito comum em projeto de sistemas mecânicos: o problema de um disco maciço sem furo e o problema de tubo espesso sob pressão interna e externa.

Levando as deformações às relações deformação-deslocamentos, eq.(11.5), pode-se obter uma função $\bar{u}(r) = r\varepsilon_\theta$, que em seguida pode ser diferenciada:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad &\Longrightarrow \bar{u}(r) = \frac{r}{E}\left\{-\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + B\left[(3-\nu) + 2\,(1-\nu)\;\ln r\right] + 2C\,(1-\nu)\right\}, \\
&\Longrightarrow \frac{\partial\bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{E}\left\{\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + B\left[(5-3\nu) + 2\,(1-\nu)\;\ln r\right] + 2C\,(1-\nu)\right\}
\end{aligned}
$$

Entretanto, essa expressão para $\partial\bar{u}/\partial r$ é diferente da expressão de ε_r em (11.19). A diferença é igual a $-4B/E$. Logo, deve-se ter $B = 0$. Assim, a solução geral para o **estado plano de tensões (EPT)** toma a forma:

$$
\sigma_r(r) = \frac{A}{r^2} + 2C \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta(r) = -\frac{A}{r^2} + 2C, \tag{11.20}
$$

$$\varepsilon_r(r) = \frac{1}{E}\left[\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + 2C\,(1-\nu)\right], \qquad \varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{E}\left[-\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + 2C\,(1-\nu)\right], \tag{11.21}$$

$$u(r) = \frac{r}{E}\left[-\frac{A\,(1+\nu)}{r^2} + 2C\,(1-\nu)\right] \qquad \text{e} \qquad u_\theta = \tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = 0. \tag{11.22}$$

Para um **estado plano de deformações (EPD)**, as deformações e o deslocamento radial podem ser obtidos a partir da solução de EPT, eqs.(11.21) e (11.22), fazendo as substituições indicadas em (11.11), o que resulta em

$$\varepsilon_r(r) = \frac{(1+\nu)}{E}\left[\frac{A}{r^2} + 2C\,(1-2\nu)\right], \qquad \varepsilon_\theta(r) = \frac{(1+\nu)}{E}\left[-\frac{A}{r^2} + 2C\,(1-2\nu)\right], \tag{11.23}$$

$$u(r) = \frac{r\,(1+\nu)}{E}\left[-\frac{A}{r^2} + 2C\,(1-2\nu)\right] \tag{11.24}$$

11.2.1 Barra e disco sem furo

Se o corpo é maciço, há material na coordenada $r = 0$. Entretanto, esse é um ponto de singularidade nas expressões das tensões que envolvem $1/r$, de forma que esses termos não podem estar presentes na solução. Eles são eliminados fazendo $A = 0$ em (11.20), de forma que a solução de tensões se torna simplesmente:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 2C, \tag{11.25}$$

i.e., as tensões são constantes em qualquer direção e em qualquer ponto do disco. O único carregamento de membrana possível deve ser aplicado na única região de contorno, que é a borda externa $r = b$, onde b é o raio externo do disco. Nessa borda pode ser aplicada uma carga distribuída q_r [N/m^2]. Então, num ponto na borda, $\sigma_r(b) = q_r$. Logo, o valor da constante deve ser: $C = q_r/2$, e as expressões das tensões são:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = q_r. \tag{11.26}$$

Um **problema de disco** pode ser aproximado por um EPT e um problema de barra maciça pode ser aproximado por um EPD (desde que as extremidades sejam restringidas ao deslocamento axial). Logo, os deslocamentos radiais vêm de (11.22) e (11.24), e têm variação linear:

$$\begin{aligned} &\text{EPT (disco)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{q_r\,(1-\nu)}{E} r} \\ &\text{EPD (barra)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{q_r\,(1-2\nu)\,(1+\nu)}{E} r} \end{aligned} \tag{11.27}$$

11.2.2 Tubo pressurizado de parede espessa e disco

As soluções para o estado de tensões em ambos os problemas, de barra tubular e de disco, são iguais, e se distinguem apenas nos campos de deformação e de deslocamentos. Nos dois casos o furo deve ser circular, com centro na origem, $r = 0$, de forma a satisfazer a condição de axisimetria geométrica. A solução geral para as tensões é dada em (11.20):

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \qquad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \tag{11.28}$$

Essa é a solução do problema de um cilindro de parede espessa, com raios interno e externo a e b, respectivamente, submetido a pressões interna e externa P_i e P_o, como ilustrado na Figura 11.2. Esse problema foi originalmente resolvido por Lamé, em 1833.

Então as condições de contorno são:

$$\sigma_r(a) = -P_i, \qquad \text{e} \qquad \sigma_r(b) = -P_o. \tag{11.29}$$

Aplicando essas condições em (11.28) obtém-se as condições para a determinação das constantes:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) = -P_i = \frac{A}{a^2} + 2C \qquad &\Rightarrow \qquad A = \frac{a^2b^2(P_o - P_i)}{\Delta}, \\ \sigma_r(b) = -P_o = \frac{A}{b^2} + 2C \qquad &\qquad\quad 2C = \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{\Delta}. \end{aligned} \tag{11.30}$$

Logo, substituindo as constantes de volta em (11.28), obtém-se as expressões finais para as tensões no tubo pressurizado:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= a^2b^2(P_o - P_i)\frac{1}{r^2\triangle} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{\triangle}, \\ \sigma_\theta &= -a^2b^2(P_o - P_i)\frac{1}{r^2\triangle} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{\triangle}, \\ \triangle &= b^2 - a^2. \end{aligned}} \tag{11.31}$$

Nota-se que que $\sigma_r + \sigma_\theta = cte$ em qualquer raio r. A solução é completada pelas expressões para o campo de deslocamento radial, dados em eqs.(11.22) e (11.24), para os casos de EPT (disco com furo) e EPD (tubo):

$$\text{EPT (placa)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{r}{E\triangle}\left[(P_i - P_o)(1+\nu)\frac{a^2b^2}{r^2} + \left(P_i a^2 - P_o b^2\right)(1-\nu)\right]} \tag{11.32}$$

$$\text{EPD (tubo)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{u(r) = \frac{r(1+\nu)}{E\triangle}\left[(P_i - P_o)\frac{a^2b^2}{r^2} + \left(P_i a^2 - P_o b^2\right)(1-2\nu)\right]} \tag{11.33}$$

A componente tangencial do deslocamento deve ser nula, $u_\theta = 0$, em toda a peça.

Caso – Apenas pressão interna, i.e., $P_o = 0$. Fazendo $P = P_i$, as tensões são simplificadas de (11.31):

$$\boxed{\sigma_r = \frac{a^2P}{\triangle}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = \frac{a^2P}{\triangle}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)} \tag{11.34}$$

com $\triangle = b^2 - a^2$. Os deslocamentos radiais são obtidos substituindo as tensões acima na eq. (11.32) e (11.32), o que resulta:

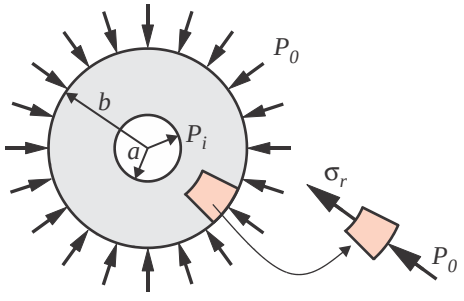


Figura 11.2: Seção transversal de cilindro de parede espessa sob pressões interna e externa.

$$\text{EPT} \longrightarrow \boxed{u(r) = \frac{Pa^2 r}{E\triangle}\left[\frac{b^2}{r^2}(1+\nu) + (1-\nu)\right]} \tag{11.35}$$

$$\text{EPD} \longrightarrow \boxed{u(r) = \frac{Pa^2 r\,(1+\nu)}{E\triangle}\left[\frac{b^2}{r^2} + (1-2\nu)\right]} \tag{11.36}$$

Então, o deslocamento radial tem variação hiperbólica (proporcional a $1/r$). Nota-se que o deslocamento interno é maior que o externo, $u(a) > u(b) > 0$.

Observa-se que a tensão radial é sempre compressiva e a tangencial é sempre trativa, i.e., $\sigma_r < 0$ e $\sigma_\theta > 0$. Em módulo, ambas as componentes são máximas na **borda interna** do tubo, em $r = a$:

$$\sigma_\theta^{\max} = \frac{P}{\triangle}(a^2 + b^2) > P \qquad \text{e} \qquad \sigma_r^{\max} = -P_i. \tag{11.37}$$

As tensões na **borda externa** do tubo, em $r = b$, são:

$$\sigma_\theta^{\min} = \frac{2a^2 P}{\triangle} \qquad \text{e} \qquad \sigma_r^{\min} = 0. \tag{11.38}$$

As distribuições das tensões ao longo da parede do tubo são ilustradas na Figura 11.3 para o caso de apenas pressão interna aplicada.

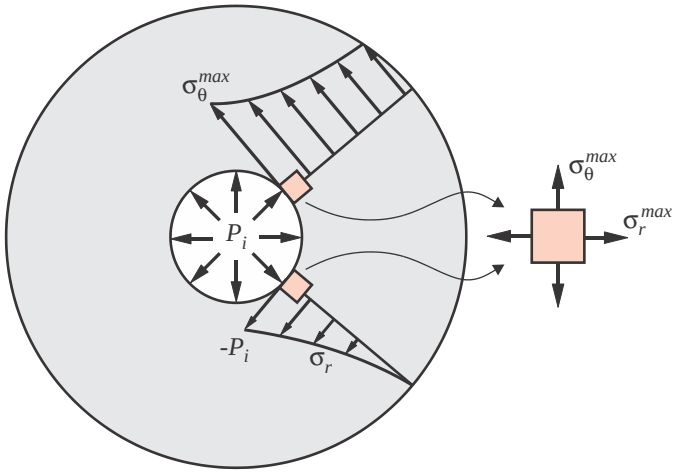


Figura 11.3: Distribuições das tensões radial e tangencial ao longo da parede de um tubo de parede espessa, sumetido à pressão interna.

Aplicação do critério de Tresca

Uma vez calculadas as tensões no tubo de parede espessa sob pressão interna, pode-se aplicar um critério de falha por início de escoamento. Uma vez que na **borda interna ambas as componentes de tensão são máximas** em módulo, esse é o ponto crítico, mais propenso a iniciar o escoamento.

Se o tubo é fechado nas extremidades, formando um vaso de pressão, a tensão axial σ_z em pontos distantes das cabeças devem ser uniformes em qualquer ponto (r, θ, z). Fazemos o equilíbrio de uma parte do vaso cortado num plano transversal ao eixo z, como na Figura 11.4. A força que a pressão exerce sobre o fluido contido no lado considerado do vaso é $F_p = \pi a^2 P$, e a força total atuando no anel de material do vaso é $F_v = \pi\left(b^2 - a^2\right) P_i$. Como $F_v = F_p$, tem-se que a **tensão axial média** na parede é

$$\boxed{\sigma_z = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}} \tag{11.39}$$

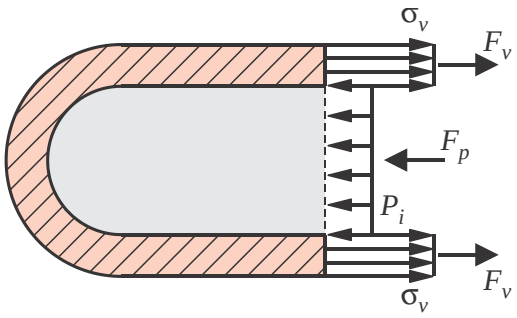


Figura 11.4: Corte num cilindro, com as forças resultantes axiais na parede e no fluido.

Aplica-se o critério da máxima tensão cisalhante, considerando as tensões radial e tangencial num ponto qualquer da borda interna, dados pelas eqs. (11.37). Então o estado de tensões nas direções $r\theta z$ num ponto da borda interna é dado pelo tensor tensão

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & P\dfrac{(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{Pa^2}{b^2-a^2} \end{bmatrix} \tag{11.40}$$

Uma vez que as tensões cisalhantes são nulas, as tensões normais são as próprias **tensões principais**, i.e.,

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = P\frac{(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)}, \qquad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{Pa^2}{b^2-a^2}, \qquad \sigma_3 = \sigma_r = -P. \tag{11.41}$$

Observa-se que $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$. Então, a tensão cisalhante máxima absoluta (na peça inteira) (obtida da eq. (5.74)) é dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^{abs} &= \frac{1}{2}\max\left\{|\sigma_1 - \sigma_2|\,;\ |\sigma_1 - \sigma_3|\,;\ |\sigma_2 - \sigma_3|\right\}, \\ &= \frac{1}{2}\max\left\{|\sigma_\theta - \sigma_r|\,;\ |\sigma_r - 0|\,;\ |\sigma_2 - 0|\right\}, \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) = P\frac{b^2}{(b^2-a^2)}. \end{aligned} \tag{11.42}$$

As tensões são visualizadas no círculo de Mohr na Figura 11.5.

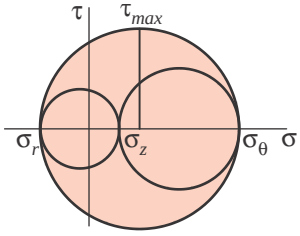


Figura 11.5: Círculos de Mohr para ponto na superfície interna de tubo de parede espessa pressurizado.

Pelo critério de Tresca para o início do escoamento, se tem que

$$\tau_{\max}^{abs} = \frac{\sigma_E}{2n} \quad \Rightarrow \quad \frac{Pb^2}{b^2-a^2} = \frac{\sigma_E}{2n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{\max} = \frac{\sigma_E\left(b^2-a^2\right)}{2nb^2} \qquad \text{Tresca}} \tag{11.43}$$

Pelo critério de von Mises para o início do escoamento, a pressão máxima é um valor diferente, obtido substituindo as tensões (11.41) na expressão (6.24), página 225, de von Mises para EPT

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} &= \frac{\sigma_E}{n}, \\ \sqrt{\left(P\frac{(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)}\right)^2 + P\frac{(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)}P + P^2} &= \frac{\sigma_E}{n}. \end{aligned}$$

após simplificações obtém-se

$$\boxed{P_{\max} = \frac{\sigma_E\left(b^2-a^2\right)}{n\sqrt{(a^4+3b^4)}} \qquad \text{von Mises}} \tag{11.44}$$

Qualquer uma das duas equações, (11.43) ou (11.44), obtidas por ambos os critérios, são equações gerais que relacionam todas as dimensões, a e b, a pressão P, o coeficiente de segurança n e a tensão de escoamento do material, σ_E. O **dimensionamento** pode ser feito com a expressão do **critério de Tresca**. Geralmente o raio interno a é pré-determinado e busca-se o valor necessário do raio externo b:

$$\boxed{b = a\left(\frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{adm}} - 2P}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{onde} \qquad \sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_E}{n}} \tag{11.45}$$

Observa-se que, se a pressão for $P = \sigma_{adm}/2$, tem-se que $b \longrightarrow \infty$, i.e., **existe um valor de pressão além do qual nenhum tubo simples é suficientemente bem dimensionado para suporta-la elasticamente, sem escoamento, não importando o quão espessa a parede seja**. Isso é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 11.1 – Dimensionamento de tubo pressurizado de parede espessa

Determine o raio externo b necessário para um tubo de aço carbono com 0,6 % de carbono, com $\sigma_E = 400$ MPa, raio interno $a = 150$ mm, coeficiente de segurança $n = 1$. Considere as pressões $P = 70$, 100, 130, 160 e 180 MPa. Utilize o critério de Tresca.

Solução:
Substituindo os valores em (11.45) obtém-se os seguintes valores para o raio externo e para a espessura h da parede:

P [MPa]	Raio b [mm]	Espessura h [mm]
70	186,1	36,1
100	212,1	62,1
130	253,5	103,5
160	335,4	185,4
180	474,3	324,3

Observa-se o rápido crescimento da espessura requerida conforme a pressão se aproxima do valor limite $\sigma_E/2 = 200$ MPa. Do ponto de vista prático, uma pressão em torno de 100 MPa (1.000 atm) seria o limite para esse tubo, que teria uma espessura aproximadamente igual a 62 mm.

11.2.3 Limite para Casca Fina

A solução desenvolvida acima para tubos sob pressão interna, de parede espessa, é o caso geral da solução apresentada na seção 6.6 para tubos cilíndricos de paredes finas. Mostra-se a seguir que no limite quando a espessura diminui a zero, as equações de parede espessa geram os mesmos resultados que aqueles das equações para parede finas.

Toma-se como ponto de partida a solução de parede espessa, para as tensões máximas, eqs. (11.41): $\sigma_\theta = P(b^2+a^2)/\left(b^2-a^2\right)$ e $\sigma_r = -P$. Essas expressões estão em termos dos dois parâmetros geométricos, os raios interno/externo, a/b. Para a simplificação que se pretende realizar é mais interessante representar essas tensões em termos de outro par de parâmetros geométricos, o **raio médio** c e **espessura** h. Para isso, pode-se mostrar facilmente que[2]

$$b^2 - a^2 = 2ch \qquad \text{e} \qquad a^2 + b^2 = 2c^2 + \frac{1}{2}h^2. \tag{11.46}$$

Substituindo as eqs. (11.46) na expressão (11.41) obtém-se a tensão tangencial máxima no tubo de parede espessa em termos do raio e da espessura:

$$\sigma_\theta = P\frac{(b^2+a^2)}{b^2-a^2} = \frac{P\left(2c^2+\frac{1}{2}h^2\right)}{2ch} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_\theta = P\frac{c}{h}\left[1+\frac{1}{4\left(c/h\right)^2}\right]} \tag{11.47}$$

Considerando que um tubo de parede fina corresponde ao limite $c/h \to \infty$, tem-se que $\sigma_\theta \to Pc/h$. Por exemplo, tomando um caso típico de tubo de parede fina se $c/h = 100$, a solução exata do modelo de parede espessa, eq. (11.47), é:

$$\sigma_\theta = P \times 100\left[1+\frac{1}{4\times 100^2}\right] = P \times 100\left[1,000025\right],$$

i.e., para um tubo com $c/h = 100$, o erro em se tomar $\sigma_\theta = Pc/h$ é de 0,0025 %. Então, a expressão para a tensão tangencial no tubo de parede fina pode ser aproximada por

$$\boxed{\sigma_\theta = \frac{Pc}{h}} \tag{11.48}$$

que é a expressão já deduzida para o tubo cilíndrico de parede fina. Quanto à tensão radial, observa-se que

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = \frac{P}{Pc/h} = \frac{h}{c}.$$

Quando h/c tende a zero, também a tensão radial tende a zero quando comparada à tensão tangencial, como previsto no modelo de tubo de parede fina.

A equação para tubo espesso para tensão admissível σ_{adm} $(= \sigma_E/n)$, eq. (11.43), pode ser colocada em termos de raio médio c, espessura c, substituindo $a = c - h/2$ e $b = c + h/2$, o que resulta:

$$\frac{\sigma_{adm}}{P} = \frac{2b^2}{b^2-a^2} \qquad \to \qquad \frac{\sigma_{adm}}{P} = \frac{c}{h} + 1 + \frac{h}{4c}. \tag{11.49}$$

Nota-se que, conforme a parede torna-se fina, a relação h/c tende a zero em relação a 1, a relação σ_{adm}/P tende a c/h, que é exatamente a relação já obtida para tubos cilíndricos pressurizados de

[2] Isso pode ser visto considerando-se que o raio médio é $c = (a+b)/2$ e a espessura é $h = b - a$. Dessas relações podem-se fazer

$$\begin{array}{ll} 4c^2 & = a^2 + b^2 + 2ab, \\ h^2 & = a^2 + b^2 - 2ab, \\ \hline 4c^2 + h^2 = 2(a^2+b^2) & \text{(soma)} \end{array}$$

O que resulta em $(11.46)_2$.

parede fina.

A equação (11.49) pode ser invertida para a forma

$$\boxed{\text{Parede espessa:}\quad \frac{P}{\sigma_{adm}} = \left(\frac{c}{h} + 1 + \frac{h}{4c}\right)^{-1}} \tag{11.50}$$

i.e., a relação entre a pressão interna aplicada e a tensão admissível no material é uma função apenas da relação h/c. Essa função $P/\sigma_{adm} = f(h/c)$ para **parede espessa** é plotada na Figura 11.6. Para um tubo de **parede delgada**, se tem

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\theta}{2}. \quad \text{Pelo critério de Tresca,} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_E/2}{n}.$$
$$\text{Logo, } \frac{Pc}{2h} = \frac{\sigma_E/2}{n}, \quad \text{o que resulta em} \quad \boxed{\frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{h}{c}}.$$

onde a tensão admissível é definida como $\sigma_{adm} = \sigma_E/n$. Essa expressão também é plotada na Figura 11.6. Nota-se que, enquanto a variação é linear no tubo delgado, ela é variável no de parede espessa. Uma inspeção nas duas curvas mostra que a diferença no valor previsto de pressão é bastante pequena para espessuras pequenas, em que h/c sejam inferiores a algo como 0,1. Para espessuras maiores, a pressão admissível prevista pelo modelo de parede fina se torna não conservativa, com erros progressivamente crescentes do lado não seguros. Deve-se atentar que os valores de h/c devem variar de zero (limite idealizado de espessura nula), até 2, em que o raio é igual à metade espessura, o que significaria o tubo completamente maciço (outra situação limite idealizada). Observando a curva do modelo de parede espessa, nota-se que, conforme a espessura tende ao máximo, $h/c = 2$, a máxima pressão admissível tende assintoticamente a um limite de 50 % da tensão admissível, i.e., $P/\sigma_{adm} \to 0,5$. Já para valores de espessura altos, por exemplo $h/c > 1$, crescimentos grandes de espessura geram apenas pequenos aumentos na capacidade de pressão do tubo.

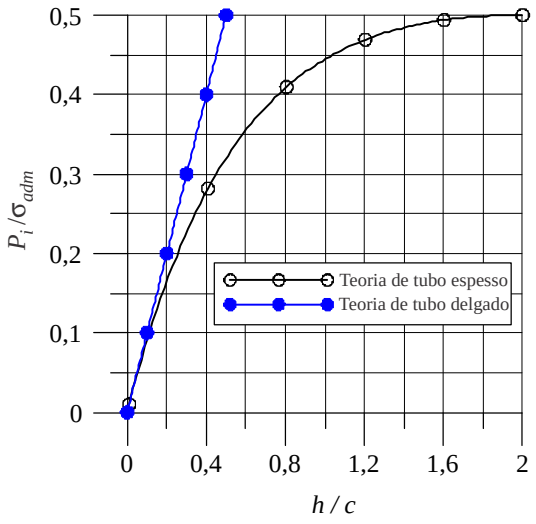


Figura 11.6: Variação de P_i/σ_{adm} com h/c pelos modelos de tubo pressurizado de parede espessa (eq. (11.50)) e de parede delgada ($P_i/\sigma_{adm} = h/c$).

11.3 Plastificação num cilindro de parede espessa

11.3.1 Pressão para início de plastificação

A pressão que leva a parede do cilindro ao **limiar da plastificação** é obtida de (11.43) como

$$P_E = \frac{\sigma_E \left(b^2 - a^2\right)}{2b^2} \tag{11.51}$$

se os raios interno/externo são a e b respectivamente. Para esse valor de pressão, toda a parede é elástica, e apenas na superfície interna a tensão cisalhante máxima aplicada é $\sigma_E/2$, com as componentes de tensão são dadas em (11.40).

11.3.2 Pressão para plastificação total da parede

Consideramos agora que o material tem a curva tensão-deformação aproximada por um modelo elasto-plástico ideal, i.e., um material com plasticidade sem encruamento, como na Figura 11.7. Claramente, as **equações diferenciais de equilíbrio independem do tipo de material**. No presente problema, de estado axisimétrico, a única das equações de equilíbrio não triviais é $(11.4)_1$, que toma a forma

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{11.52}$$

uma vez que $\partial/\partial\theta = 0$. A condição de início de escoamento, segundo o critério de Tresca, é

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_\theta - \sigma_r\right) = \frac{\sigma_E}{2}. \tag{11.53}$$

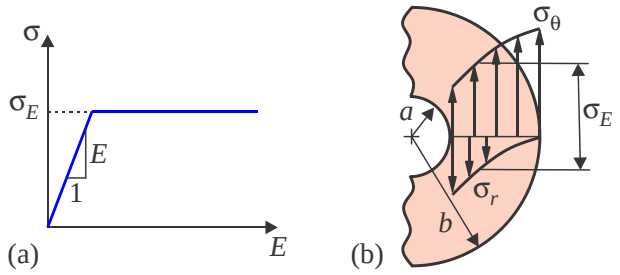


Figura 11.7: Distribuição das tensões ao longo da espessura num tubo em plastificação total.

As equações (11.52) e (11.53) formam um sistema de duas equações e duas funções incógnitas. Eliminando $(\sigma_\theta - \sigma_r)$ do segundo termo de (11.52) com o uso de (11.53), tem-se a equação diferencial

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_E}{r} \qquad \text{solução:} \quad \sigma_r(r) = \sigma_E \ln r + C. \tag{11.54}$$

A constante C é obtida aplicando a **condição de contorno** na superfície externa da parede do cilindro, $\sigma_r(b) = \sigma_E \ln b + C = 0$, o que resulta em $C = -\sigma_E \ln b$. Assim, a solução do estado de tensões vem de (11.54) e (11.53):

$$\boxed{\sigma_r(r) = \sigma_E \ln\frac{r}{b} \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta(r) = \sigma_r + \sigma_E = \sigma_E\left(1 + \ln\frac{r}{b}\right)} \tag{11.55}$$

A pressão que leva à **plastificação completa da parede**, P_P, é obtida fazendo $P_P = -\sigma_r(r = a)$, i.e.

$$\boxed{P_P = -\sigma_E \ln\frac{a}{b}} \tag{11.56}$$

P_P é a pressão máxima de colapso plástico no cilindro para um material que tenha ductibilidade suficiente para a deformação plástica completa na parede. A distribuição das tensões na plastificação total, equações (11.55), é visualizada na Figura 11.7.

11.3.3 Plastificação parcial da parede

Considera-se aqui a situação em que a pressão é superior àquela de início do escoamento na parede, P_E, porém não é suficiente para plastificar a parede totalmente, i.e.,

$$P_E < P < P_P. \tag{11.57}$$

Uma vez que as tensões são máximas na região interna da parede, tem-se que a camada interna de material no tubo encontra-se plastificada, e a camada externa é elástica. Considere-se que o **raio da interface** entre as duas regiões seja designado por c. Assim, a camada plastificada tem raios interno/externo a/c respectivamente, e a camada externa, elástica, tem raios c/b, respectivamente, como ilustrado na Figura 11.8.

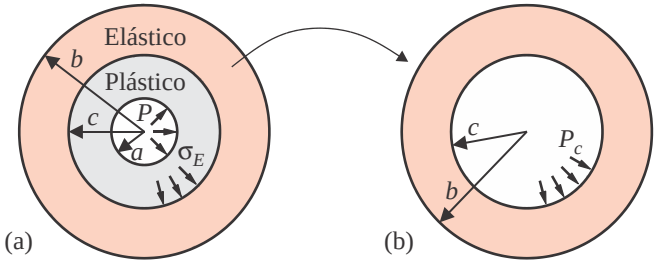


Figura 11.8: Camada plástica e elástica num tubo sob plastificação parcial.

Nota-se que consideramos que o **material seja elasto-plástico ideal**. Toda a camada externa é elástica, exceto em $r = c$, onde a tensão cisalhante máxima é igual a $\sigma_E/2$. Então, a pressão P_c na interface é obtida pela condição $P_c = -\sigma_r(r = c)$, que vem da eq.(11.51):

$$P_c = \frac{\sigma_E \left(b^2 - c^2\right)}{2b^2} \tag{11.58}$$

Tensões na região plástica

Observa-se que a camada interna, totalmente plastificada, comporta-se como o problema da seção 11.3.2, de um cilindro com raios a/c, sob pressões P e P_c nas superfícies interna e externa respectivamente. A solução desse problema vem de $(11.54)_2$, com a condição de contorno $\sigma_r(r = c) = -P_c = \sigma_E \ln c + C$, que resulta em

$$C = -\sigma_E \ln c - P_c \qquad \text{para } a \le r \le c. \tag{11.59}$$

Logo, (11.54) e (11.53) resultam na solução das **tensões na camada interna** ($a \le r \le c$):

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \sigma_E \ln\frac{r}{c} - \frac{\sigma_E \left(b^2 - c^2\right)}{2b^2} \\ \sigma_\theta(r) &= \sigma_E + \sigma_r = \sigma_E \left(1 + \ln\frac{r}{c}\right) - \frac{\sigma_E \left(b^2 - c^2\right)}{2b^2} \end{aligned}} \tag{11.60}$$

A **pressão interna P no cilindro, que plastifica totalmente a região interna,** vem de $(11.60)_1$, com a condição que $P = -\sigma_r(r = a)$. Isso resulta em:

$$\boxed{P = -\sigma_E \ln\frac{a}{c} + \frac{\sigma_E \left(b^2 - c^2\right)}{2b^2}} \tag{11.61}$$

Tensões na região elástica

A região externa, $c \le r \le b$, é completamente elástica, e sua solução é a mesma obtida nas eqs.(11.34), aplicando raios c e b em vez de a e b, com pressão interna P_c obtida de (11.58) para um

dado valor de raio intermediário c:

$$\boxed{\sigma_r = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \sigma_\theta = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \quad \text{para } c \le r \le b} \tag{11.62}$$

As distribuições das tensões nas regiões plástica e elástica do tubo, eqs.(11.60) e (11.62), são visualizadas na Figura 11.9. Da formulação observa-se que, dado um valor para o raio c da interface entre as regiões plastificada e elástica, a pressão interna P_i necessária é diretamente obtida de (11.61) e a distribuição das tensões vem de (11.62). Entretanto, na situação mais comum, em que se conheça a pressão interna aplicada, a determinação de c não pode ser obtida explicitamente de (11.61), mas deve ser obtida numericamente por um método de determinação de raiz de uma equação não-linear.

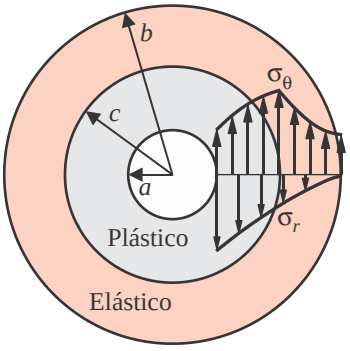


Figura 11.9: Tensões nas regiões plástica e elástica do tubo sob plastificação parcial.

11.3.4 Exemplo 11.2 - Pressões máximas em cilindro de parede espessa

Considere-se um cilindro fechado com raios interno e externo de valores $a = 100$ mm e $b = 150$ mm, respectivamente. O material tem tensão de escoamento $\sigma_E = 220$ MPa.

(a) Determinar a pressão de início de escoamento na parede do cilindro e a pressão de plastificação total;

(b) Para a pressão interna de $P = 77$ MPa, determinar a profundidade plastificada,

(c) e as tensões nas superfícies interna, externa, e na interface entre as regiões elástica e plástica.

Solução:
(a) As pressões para início de escoamento e para plastificação total da parede vêm diretamente de (11.51) e (11.56):

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{\sigma_E\left(b^2 - a^2\right)}{2b^2} = \frac{220\left(150^2 - 100^2\right)}{2 \times 150^2} = 61,11 \text{ MPa}, \\ P_P &= -\sigma_E \ln\frac{a}{b} = -220 \ln\frac{100}{150} = 89,2 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

(b) A equação (11.61) relaciona a pressão interna com a profundidade plastificada. Entretanto, quando a pressão é conhecida, a determinação da profundidade c precisa ser obtida via um método de determinação de raízes de equação não linear, como o método de Newton-Raphson. Entretanto, a equação (11.61) pode ser posta em termos de apenas três invariantes: P/σ_E, b/c e b/a, i.e.:

$$\boxed{\frac{P}{\sigma_E} = \ln\frac{b/c}{b/a} - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{b/c}\right)^2\right]} \tag{11.63}$$

Arbitrando valores para os invariantes geométricos, a/c e b/c, podem-se plotar os valores de P/σ_E como na Figura 11.10. Para os dados do problema tem-se que $P/\sigma_E = 77/220 = 0,35$ e $b/a = 1,5$. Do gráfico pode-se obter aproximadamente o valor $b/c \approx 1,3$. Usando-se a outra opção, do método de Newton-Raphson, obtém-se uma solução mais precisa como $b/c \approx 1,29$, o que resulta na profundidade plastificada $c = b/1,29 = 116,2$ mm.

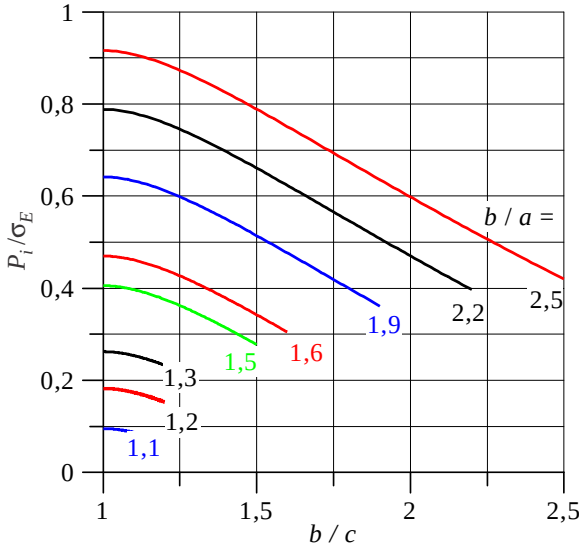


Figura 11.10: Valores de pressão de plastificação parcial, P_i/σ_E, versus parâmetros geométricos a/c e b/c.

(c) Para a pressão interna $P = 77$ MPa, as tensões nas superfícies interna e externa e na superfície da interface são dadas nas eqs.(11.60), usando o valor $c = 116,2$ mm:

$$\sigma_r(a) = \sigma_E \ln\frac{a}{c} - \frac{\sigma_E\left(b^2 - c^2\right)}{2b^2} = -P = -77 \text{ MPa},$$
$$\sigma_\theta(a) = \sigma_E + \sigma_r = 220 - 77 = 143 \text{ MPa},$$

Na interface, a pressão exercida na superfície interna da camada externa elástica é dada por (11.58), que se pode colocar na forma

$$P_c = \frac{\sigma_E}{2}\left(1 - \frac{1}{(b/c)^2}\right) = \frac{220}{2}\left(1 - \frac{1}{1,29^2}\right) = 43,9 \text{ MPa}.$$

Assim, as tensões nas superfícies interna e externa da camada elástica são obtidas por (11.62):

$$\sigma_r(c) = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) = -P_c = -43,9 \text{ MPa},$$
$$\sigma_\theta(c) = \frac{c^2 P_c}{b^2 - c^2}\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) = \frac{43,9}{1,29^2 - 1}\left(1 + 1,29^2\right) = 176,1 \text{ MPa},$$
$$\sigma_r(b) = 0,$$
$$\sigma_\theta(b) = \frac{2c^2 P_c}{b^2 - c^2} = \frac{2 \times 43,9}{1,29^2 - 1} = 132,2 \text{ MPa}.$$

11.4 Furo circular em placa sob tração

Considera-se nessa seção o problema idealizado de uma placa infinita com um furo circular de raio a, submetida a tração uniforme σ_o em pontos distantes do furo. Esse problema é importante devido a diversos aspectos. Por um lado, sua solução será válida em situações mais práticas, em que a placa não é de fato infinita, mas simplesmente "grande", em relação ao diâmetro do furo, devido ao Princípio de St.-Venant. Isso torna a análise útil na estimativa de solução das tensões em furos de chapas tracionadas, em que os furos são usados para ventilação ou passagem de cabos ou outros acessórios. Em segundo lugar, a presente análise é útil como forma de exercitar e exemplificar a manipulação das equações gerais de mecânica dos sólidos, partindo de sua forma diferencial, em problemas não uniaxiais. Finalmente, a solução obtida ilustra de forma bastante concreta e evidente o conceito de **gradiente de tensões** num corpo, a concentração de tensões próximo de irregularidades geométricas e o f**ator de concentração de tensões**, K_t.

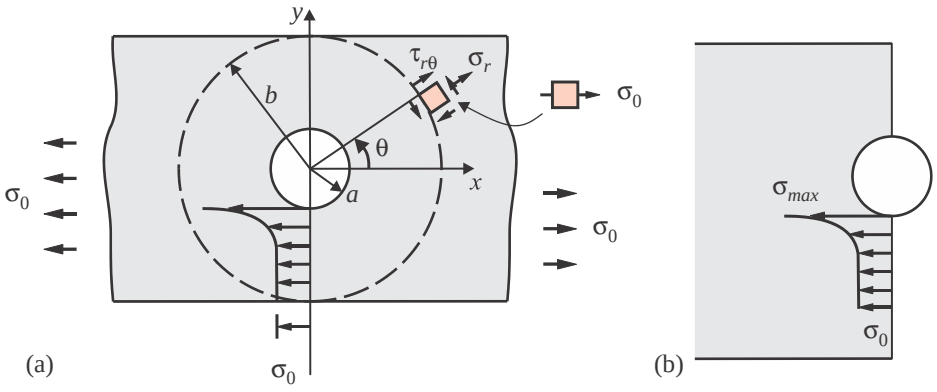


Figura 11.11: Diagrama de corpo livre de região em torno de furo em placa sob tração.

Considera-se uma placa infinita com um furo circular de raio a. Coloca-se um sistema de eixos cartesianos xyz no centro do furo. O carregamento é constituído por uma tensão $\sigma_x = \sigma_0$ uniforme em pontos infinitamente distantes do furo. Então, nessa região distante, o estado de tensões é simples e conhecido: uniaxial. A questão que se põe é: qual o estado de tensões nas imediações do furo? A priori, já se sabe que próximo do furo o estado de tensões não pode ser uniaxial. Por exemplo, no ponto $(x;y) = (a;0)$, é impossível que σ_x seja igual a σ_0 ou a qualquer valor não nulo.

O procedimento de solução consiste em, primeiramente, definir um problema auxiliar, que consiste em isolar um disco de raio externo b e raio interno a, como no tracejado da Figura 11.11. Esse raio externo b não tem seu valor explicitado, porém é requerido que seja suficientemente grande tal que **as tensões em $r = b$ não sofram nenhuma influência do furo**. Assim, em vez de uma placa infinita, tem-se um disco, em que o estado de tensões na borda externa é conhecido, i.e., $\sigma_x(r = b) = \sigma_0$. Deseja-se obter as tensões nos pontos internos ao disco.[3]

Como agora a geometria é de revolução, é mais adequado utilizar um sistema cilíndrico de coordenadas, $r\theta z$, como ilustrado na Figura 11.11. Na borda, $r = b$, o **estado de tensões plano é conhecido no sistema** xyz, dado por: $\{\sigma_x;\sigma_y;\tau_{xy}\} = \{\sigma_0;0;0\}$. Torna-se necessário fazer **transformação das componentes de tensões** para o sistema cilíndrico, i.e., $\{\sigma_x;\sigma_y;\tau_{xy}\} \longrightarrow \{\sigma_r;\sigma_\theta;\tau_{r\theta}\}$. Isso é obtido pelas equações de transformação de tensão, eqs. (5.17)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x c^2 + \sigma_y s^2 + 2\tau_{xy} sc, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x s^2 + \sigma_y c^2 - 2\tau_{xy} sc, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) sc + \tau_{xy}(c^2 - s^2), \end{aligned} \tag{11.64}$$

onde $c \equiv \cos\theta$ e $s = \text{sen}\ \theta$. Aplicando ao ponto $r = b$, ($\sigma_x = \sigma_0$ e $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$) obtém-se

[3] Essa solução é devida a Kirsch, G, 1898, conforme [9].

$$\begin{aligned}\sigma_r(b,\theta) &= \sigma_0 c^2 = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta,\\ \sigma_\theta(b,\theta) &= \sigma_0 s^2,\\ \tau_{r\theta}(b,\theta) &= -\frac{\sigma_0}{2}\text{sen } 2\theta.\end{aligned} \tag{11.65}$$

Observe que as tensões $\sigma_r(b)$ e $\tau_{r\theta}(b)$ se constituem no carregamento aplicado na borda do disco. Esse carregamento pode ser separado em duas parcelas, definindo dois problemas, cujas soluções podem ser obtidas individualmente e depois somadas. Os carregamentos de cada um dos problemas são visualizados na Figura 11.12. No primeiro problema, denominado **problema A**, atua apenas uma tensão uniforme radial de valor $\sigma_r(b) = \sigma_0/2$, e no segundo, denominado **problema B**, atuam tensões radial e tangencial variáveis com o ângulo. A soma dos dois carregamentos é igual às tensões $\sigma_r(b)$ e $\tau_{r\theta}(b)$ das eqs.(11.65) aplicadas sobre o disco do problema original. A seguir a solução de cada problema é desenvolvida.

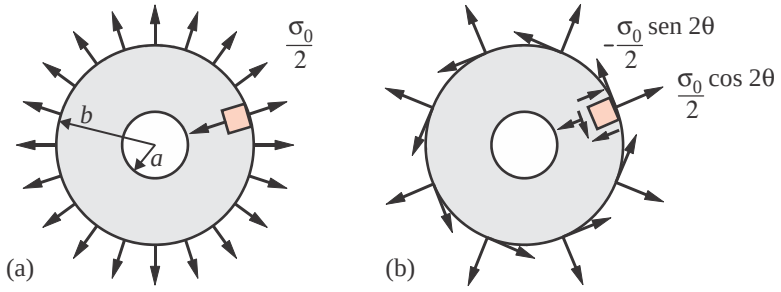


Figura 11.12: (a) Carregamento no Problema A e (b) no Problema B.

Solução do Problema A

Como visualizado na Figura 11.12, esse problema consiste num disco submetido a uma tensão uniforme radial de valor $\sigma_r(b) = \sigma_0/2$ na borda externa. Esse problema já foi tratado, e sua solução para o estado de tensões é obtida da eq.(11.31), de tubos de parede espessa sob pressão interna e externa. Nessas equações faz-se a simplificação de pressão interna nula, $P = 0$, e $P_o = -\sigma_0/2$, o que resulta:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0 b^2}{2\,(b^2-a^2)}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0 b^2}{2\,(b^2-a^2)}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \tau_{r\theta} = 0.$$

Divide-se o lado direito de cada igualdade por b^2, e aplica-se a condição de que b deve ser "muito grande", i.e., faz-se o limite para $b \to \infty$, o que resulta na **solução do problema A**:

$$\boxed{\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right), \qquad \tau_{r\theta} = 0} \tag{11.66}$$

Solução do Problema B

Esse problema consiste em um disco de raios a e b, com tensões nulas na borda interna e tensões na borda externas dadas por

$$\sigma_r(b) = \sigma_0 c^2 = \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta \qquad \text{e} \qquad \tau_{r\theta}(b) = -\frac{\sigma_0}{2}\text{sen } 2\theta. \tag{11.67}$$

A solução do problema vem da solução da **equação de compatibilidade**, eq.(11.9):

$$\bigtriangledown^2 \bigtriangledown^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi = 0. \tag{11.68}$$

Nota-se que **esse problema não é axisimétrico**, uma vez que apenas a geometria é de revolução. O carregamento varia em θ, o que significa que toda a solução também depende de θ. Isso significa que a equação de compatibilidade não sofre simplificações, e permanece como uma equação diferencial parcial em r e θ. Um dos métodos mais utilizados na obtenção de soluções analíticas para equações diferenciais parciais é o método da separação de variáveis, que está fora do escopo desse texto. Sem maiores detalhamentos, apresentamos a forma geral da solução obtida por separação de variáveis como

$$\phi(r,\theta) = f(r)\cos 2\theta \tag{11.69}$$

Uma vez que $\cos 2\theta \neq 0$, segue-se que

$$\left(\underbrace{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^4}}_{\delta_r}\right)\left(\underbrace{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^4}}_{\delta_r}\right) f(r) = 0$$

ou de forma compacta, $\delta_r\delta_r\ f = 0$,[4] onde δ_r é um operador diferencial. Essa é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem, em termos de r. Sua solução geral é:

$$\boxed{f(r) = Ar^2 + Br^4 + \tfrac{C}{r^2} + D} \tag{11.71}$$

onde A, B, C e D são constantes de integração a serem determinadas pelas condições de contorno.

Tendo determinado a solução geral da função tensão, eqs.(11.69) e (11.71), as tensões são obtidas substituindo essas expressões nas eqs. (11.8) que tornam-se

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} &&= -\left(2A+\frac{6C}{r^4}+\frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta,\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} &&= \left(2A+6Br^2+\frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta,\\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) &&= \left(2A+6Br^2-\frac{6C}{r^4}-\frac{2D}{r^2}\right)\text{sen } 2\theta.
\end{aligned} \tag{11.72}$$

As **condição de contorno** nas bordas $r = a$ e $r = b$ do disco são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r(a) = 0, && \tau_{r\theta}(a) = 0,\\
&\sigma_r(b) = \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta, && \tau_{r\theta}(b) = -\frac{\sigma_0}{2}\text{sen } 2\theta.
\end{aligned}$$

Aplicando essas condições a (11.72) obtém-se um conjunto de quatro equações algébricas para as

[4] O operador $\nabla^2\phi$ pode ter suas variáveis separadas, seguindo o procedimento:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \nabla^2(f(r)\cos 2\theta),\\
\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2(f\cos 2\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(f\cos 2\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(f\cos 2\theta)}{\partial\theta^2},\\
\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos 2\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\cos 2\theta-\frac{4}{r^2}f\cos 2\theta,\\
\nabla^2\phi &= \left(\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{4}{r^2}\right)f}_{\delta_r}\right)\cos 2\theta = \delta_r f\cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Logo, o operador $\nabla^2\phi$ fica separado num operador diferencial δ_r em termos apenas de r, aplicado à função $f(r)$, vezes $\cos 2\theta$, isto é, $\nabla^2\phi = \delta_r f\cos 2\theta$. Assim, o operador $\nabla^2\ \nabla^2\ \phi$ da equação de compatibilidade fica também com variáveis separadas:

$$\begin{aligned}
\nabla^4\phi &= \delta_r\delta_r f\ \cos 2\theta,\\
&= \delta_r\delta_r\ f = 0.
\end{aligned} \tag{11.70}$$

quatro constantes:

$$\begin{array}{lcll}
\sigma_r(a)=0 & \longrightarrow & 2A+\dfrac{6C}{a^4}+\dfrac{4D}{a^2} & =0,\\
\tau_{r\theta}(a)=0 & \longrightarrow & 2A+6Ba^2-\dfrac{6C}{a^4}-\dfrac{2D}{a^2} & =0,\\
\sigma_r(b)=\dfrac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta & \longrightarrow & 2A+\dfrac{6C}{b^2}+\dfrac{4D}{b^2} & =-\dfrac{\sigma_0}{2},\\
\tau_{r\theta}(b)=-\dfrac{\sigma_0}{2}\text{sen}2\theta & \longrightarrow & 2A+6Bb^2-\dfrac{6C}{b^4}-\dfrac{2D}{b^2} & =-\dfrac{\sigma_0}{2}.
\end{array} \tag{11.73}$$

Aplicando o limite $b\longrightarrow\infty$ e obtemos o sistema algébrico na forma

$$\begin{cases}
2A+\dfrac{6C}{a^4}+\dfrac{4D}{a^2}=0,\\
2A+6Ba^2-\dfrac{6C}{a^4}-\dfrac{2D}{a^2}=0,\\
2A=-\dfrac{\sigma_0}{2},\\
6B=0.
\end{cases}$$

A solução do sistema pode ser obtida sem dificuldades, resultando nas constantes:

$$A=-\frac{\sigma_0}{4},\qquad B=0,\qquad C=-\frac{a^4}{4}\sigma_0,\qquad D=\frac{a^2}{2}\sigma_0.$$

Substituindo essas constantes de volta nas eqs. (11.72) obtém-se o campo de tensões no **problema B**:

$$\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta,\\
\sigma_\theta&=-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta,\\
\tau_{r\theta}&=-\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\text{sen }2\theta.
\end{aligned} \tag{11.74}$$

A solução do problema original no disco da Figura 11.11, submetido às cargas normal e tangencial na borda externa, é obtida **somando as soluções dos problemas A e B**, eqs. (11.66) e (11.74), respectivamente, o que resulta na solução geral para qualquer ponto de coordenada (r,θ), com $r\geq a$:[5]

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_r(r,\theta)&=\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\\
\sigma_\theta(r,\theta)&=\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma_0}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\\
\tau_{r\theta}(r,\theta)&=\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Solução A}}\quad\underbrace{-\frac{\sigma_0}{2}\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\text{sen}2\theta}_{\text{Solução B}}
\end{aligned}} \tag{11.75}$$

As tensões ao longo de alguns segmentos são obtidas da solução geral.

- Linha $\theta=90$ (eixo $x=0$)

$$\sigma_r(r)=\frac{3\sigma_0}{2}\left[\frac{a^2}{r^2}-\frac{a^4}{r^4}\right],\qquad \sigma_\theta(r)=\frac{\sigma_0}{2}\left[2+\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right],\qquad \tau_{r\theta}(r)=0. \tag{11.76}$$

  A variação de σ_θ ao longo do eixo y em $x=0$ é mostrada na Figura 11.11. A tensão é máxima na borda interna, $r=a$, decai rapidamente até atingir seu valor assintótico σ_0 longe do furo.

[5] Essa solução é devida a Kirsch, G, 1898, conforme [9].

Inspecionando as equações (11.76), esses valores limites são facilmente determinados:

$$\begin{array}{ccccc} r & = & a & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\theta(r=a) = \boxed{\sigma_{\theta\,\max} = 3\sigma_0} \\ \sigma_r(r=a) = 0. \end{array} \right. \\ r & \longrightarrow & \infty & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\theta(r \longrightarrow \infty) = \sigma_0, \\ \sigma_r(r \longrightarrow \infty) = 0. \end{array} \right. \end{array} \tag{11.77}$$

- Linha $\theta = 0$ (eixo $y = 0$)

$$\sigma_r(r) = \frac{\sigma_0}{2}\left[2 - 5\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right], \qquad \sigma_\theta(r) = \frac{\sigma_0}{2}\left[\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right]. \tag{11.78}$$

No ponto $(r, \theta) = (a, 0)$ ocorre a tensão normal mínima, como pode ser visto inspecionando essas equações para seus valores limites:

$$\begin{array}{ccccc} r & = & a & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\theta(r=a) = \boxed{\sigma_{\theta\,\min} = -\sigma_0} \\ \sigma_r(r=a) = 0. \end{array} \right. \\ r & \longrightarrow & \infty & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\theta(r \longrightarrow \infty) = 0, \\ \sigma_r(r \longrightarrow \infty) = \sigma_0. \end{array} \right. \end{array} \tag{11.79}$$

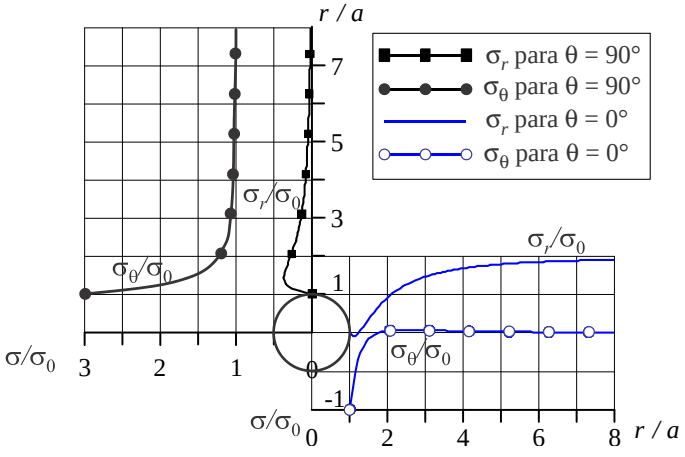


Figura 11.13: Variação das tensões normais em torno de um furo circular em placa infinita.

A Figura 11.13 mostra a variação das tensões ao longo das linhas $x = 0$ e $y = 0$, dadas nas equações (11.76) e (11.78). Analisando a curva de $\sigma_\theta(r)$ ao longo da linha $\theta = 90$, observa-se que rapidamente os valores decrescem do máximo, $3\sigma_0$, e se aproximam assintoticamente do valor nominal σ_0. Utilizando a eq. (11.76), obtém-se os seguintes valores para pontos gradualmente afastados da borda do furo:

r/a	$\sigma_\theta(r)/\sigma_0$
1	3
2	1,22
3	1,07
4	1,04

Então, a uma distância de dois diâmetros do centro do furo, a diferença entre a tensão máxima e a nominal é de apenas 4 %. Esse fenômeno é denominado **efeito de concentração de tensão**. Sua origem reside da irregularidade geométrica, que no presente caso é a presença do furo. Entretanto, o efeito ocorre em qualquer tipo de peça: barras retas de seção uniforme com qualquer tipo de entalha, chapas, etc, submetidas a qualquer tipo de carregamento: tração, flexão, torção. Com o

componente com geometria uniforme, o estado de tensões é uniforme, geralmente simples. Caso seja incorporada uma irregularidade geométrica, ou um carregamento concentrado, essa tensão é amplificada nas imediações doa irregularidade.

11.5 Fator de concentração de tensões

A Figura 11.13 mostra a variação das tensões ao longo das linhas $x = 0$ e $y = 0$, dadas nas equações (11.76) e (11.78). Do ponto de vista de um projeto visando evitar falha por início de escoamento, a análise pode ser feita apenas considerando o estado de tensões no ponto $(r, \theta) = (a, 90)$, dado por $\sigma_{\theta\,\max} = 3\sigma_0$ e $\sigma_r = 0$. Nota-se que, qualquer que seja o valor do raio do furo, a tensão naquele ponto é o triplo da tensão nominal σ_0. Esse fator, 3, entre a tensão máxima e a tensão nominal, é denominado **fator de concentração de tensões** do problema, K_t, i.e., por definição,

$$\boxed{K_t \equiv \frac{\text{Tensão máxima}}{\text{Tensão nominal}}} \tag{11.80}$$

Esse fator tem as seguintes características:

1. Depende unicamente do **tipo de geometria** do problema e do **tipo de carregamento**. Tipo de geometria significa a forma, por exemplo, uma barra de seção circular com um entalhe circular é um tipo, enquanto a mesma barra com um furo diametral é outro tipo. Tipo de carregamento significa, por exemplo, tração, flexão ou torção.

2. Não depende do **material** ou do **valor da carga**.

3. Entretanto, sua definição depende de que o problema seja linear, i.e., que os deslocamentos sejam suficientemente pequenos, e as tensões sejam elásticas.

Uma grande quantidade de problemas foi, ao longo do tempo, estudada e teve sua relação entre a tensão máxima e nominal determinada e tabelada para uso corrente no projeto de elementos de máquinas em engenharia.

No problema da placa infinita com furo, o valor de K_t é único, $K_t = 3$, independentemente de qualquer parâmetro geométrico. Essa é uma situação particular, uma vez que o tamanho da placa é sempre infinitamente maior que o raio do furo. Entretanto, se a barra tivesse uma certa largura, c, por exemplo, o valor do K_t passa a depender da relação a/c.

11.6 Torção em barras de seção não circular

No Capítulo 7 foi apresentada a teoria de torção de barras retas de seção circular. O aspecto fundamental naquele modelo é o conjunto de hipóteses em que ele se baseia, principalmente a hipótese que qualquer seção transversal permanece plana, indeformável, e apenas sofre uma rotação de corpo rígido em torno do eixo de simetria da barra. Isso permite obter a formulação extremamente simples vista naquele capítulo.

Entretanto, em barras com **qualquer outra forma de seção transversal que não a circular**, (retangular, elíptica, em L, etc.), essas hipóteses não se aplicam. A principal diferença é que uma **seção transversal sofre empenamento**, i.e., deixa de ser plana, e seus pontos sofrem deslocamentos na direção axial da barra. A Figura 11.14 ilustra curvas de nível de deslocamento axial em uma seção transversal retangular. Nesse tipo de seção, os deslocamentos axiais w são alternados em positivo no par de quadrantes 1 e 3 e negativo nos quadrantes 2 e 4. Em outros tipos de seção a distribuição de w é distinta, entretanto sempre é não nula, i.e., sempre existe um empenamento da seção, exceto na seção circular.

A solução do problema de torção em barras de seção arbitrária deve-se a Saint-Venant, 1855, e Z. Prandtl, 1903. Inicialmente define-se o sistema de eixos cartesianos com os eixos xy numa das extremidades da barra, como na Figura 11.15, e z na direção axial. A barra é considerada reta e

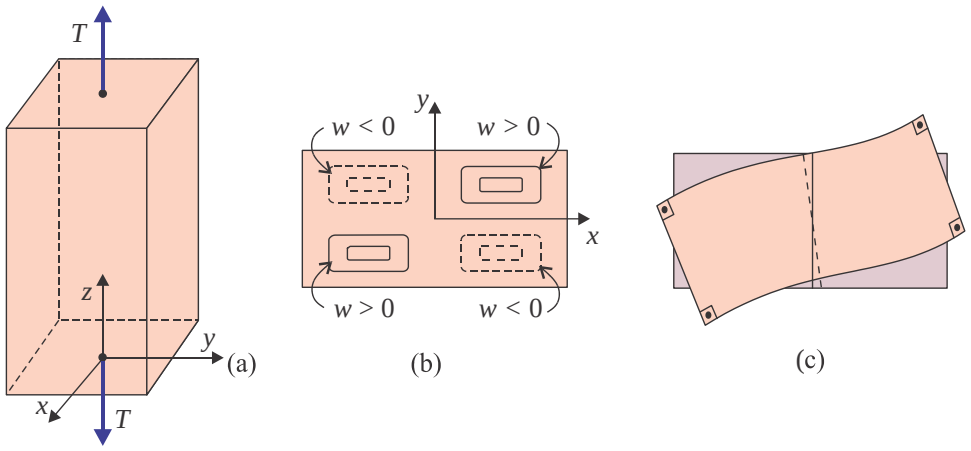


Figura 11.14: (a) Barra de seção transversal retangular sob torção; (b) seção transversal e ilustração das curvas de nível de deslocamento w na direção axial z; (c) configuração deformada da seção transversal.

com seção uniforme. As componentes de deslocamentos de um ponto arbitrário P são u, v e w. As hipóteses cinemáticas do modelo de St.-Vanant são sumarizadas por:

1. w é independente de z, i.e., $w = w(x, y)$ apenas. Isso significa considerar que os empenamentos de todas as seções são idênticos.

2. u e v são determinados apenas pela rotação da seção em torno de O. Essa rotação é de corpo rígido, exceto pelo empenamento axial.

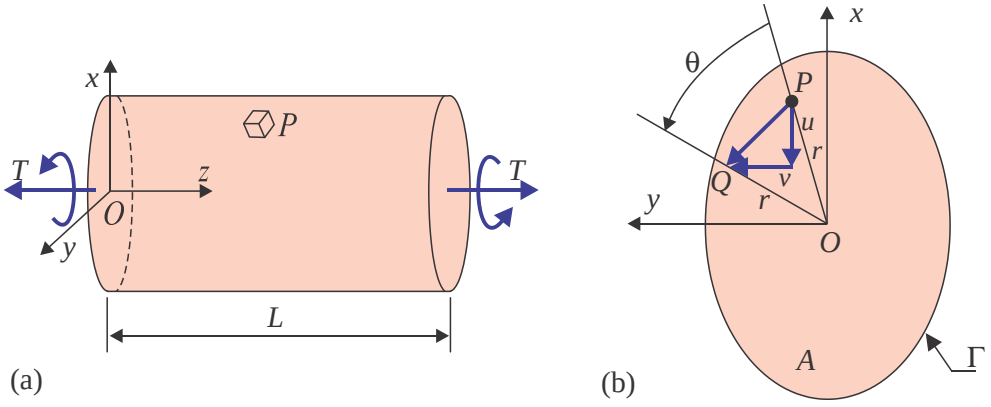


Figura 11.15: (a) Barra de seção arbitrária, eixos; (b) seção transversal com u e v de um ponto arbitrário P e rotação θ da seção em torno de O.

Consideremos que o ponto O de origem dos eixos se localize no centro de torção da seção. Tomemos um segmento de material OP como na Figura 11.15b. A rotação da seção faz com que P desloque-se para a posição Q, porém mantendo a mesma distância r de O. O deslocamento PQ é circunferencial, definido pelo **ângulo θ de rotação da seção, por unidade de comprimento**. Então, os campos de deslocamentos u, v e w tomam a seguinte forma simplificada

$$u = u(y, z) = -\theta zy, \qquad v = v(x, z) = \theta zx, \qquad w = w(x, y) = \theta\psi(x, y). \tag{11.81}$$

Nota-se que a componente w é separada em termos da **função de empenamento** $\psi(x, y)$. Então, o campo cinemático é inteiramente determinado por apenas uma função incógnita, $\psi(x, y)$ e um escalar θ. Resta aplicar esse campo nas equações gerais: equilíbrio, relações deformação-deslocamento e

relações constitutivas, eqs.(11.1)-(11.3). Substituindo (11.81), as relações deformação-deslocamentos (11.2) simplificam-se para

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right), \end{aligned} \tag{11.82}$$

e a lei de Hooke 3D em (11.3) gera

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} &= G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \end{aligned} \tag{11.83}$$

Note-se que não há tensões normais na barra, em qualquer das direção xyz. Cada ponto sofre apenas cisalhamento puro τ_{xz} e τ_{yz}, ambos dependentes de θ e ψ, como na Figura 11.16a. Substituindo as tensões (11.83) nas equações locais de equilíbrio, (11.1), sem forças de corpo, nota-se que as duas primeiras equações são identicamente satisfeitas, e $(11.1)_3$ fica

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \qquad \forall (x, y) \in \Omega} \tag{11.84}$$

Aqui utiliza-se uma conceituação matemática, em que se considera a seção transversal da barra como constituída por um conjunto de pontos no seu **contorno**, denominado Γ, e pontos internos ao contorno, denominados pontos do **domínio** das funções, representado aqui por Ω. Então, a equação (11.84) é a condição de equilíbrio de qualquer ponto no domínio, i.e., pontos internos ao contorno, mas não pode se aplicar a pontos localizados no contorno. Torna-se necessário identificar outra expressão para a condição de equilíbrio em pontos sobre o contorno.

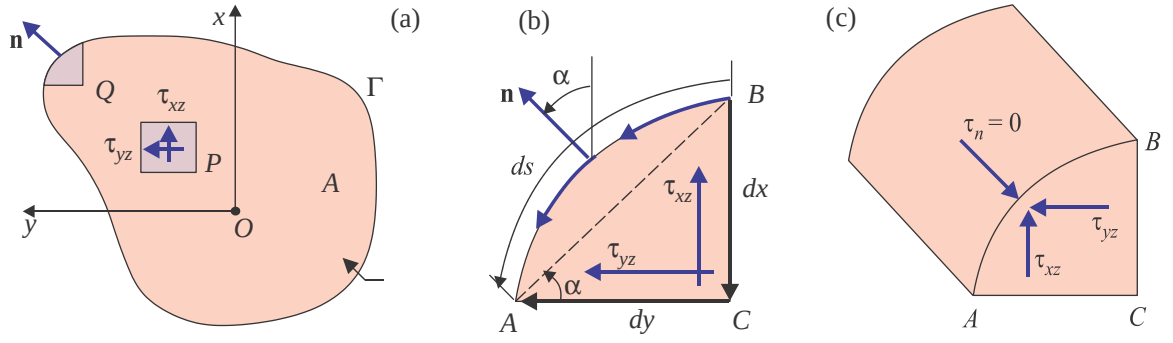


Figura 11.16: (a) Tensões num ponto P interno à seção e num ponto Q sobre seu contorno Γ. (b) elemento diferencial em Q sobre o contorno. (c) vista em perspectiva do elemento diferencial de contorno.

Para um ponto situado no **contorno lateral** Γ da barra, tomemos um ponto Q no contorno e isolemos um elemento diferencial como aquele nas Figuras 11.16b e (c). As componentes τ_{xz} e τ_{yz} atuantes na seção devem ter uma resultante τ_n que satisfaz à **condição de contorno lateral**. Essa condição é que $\tau_n = 0$, uma vez que a superfície lateral da barra é considerado livre de cargas. O arco AB tem comprimento ds e o vetor normal à superfície é $\mathbf{n}$ sendo positivo quando apontando para fora do corpo. $\mathbf{n}$ tem inclinação α em relação ao eixo x. Como ds é infinitesimal, o arco pode ser aproximado pela reta AB. O vetor $\mathbf{n}$ tem componentes

$$n_x = \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad n_y = \text{sen}\alpha. \tag{11.85}$$

O mesmo ângulo α define a relação entre τ_n e τ_{xz} e τ_{yz}, como visto na Figura 11.16c e detalhado na Figura 11.17. Então, o equilíbrio de forças na direção axial de um elemento diferencial de comprimento dz localizado no contorno Γ da seção transversal é

$$\sum F_z \rightarrow \quad \tau_n\,(A_{ABDF}) = \tau_{xz}\,(A_{ACDE}) + \tau_{yz}\,(A_{BCEF}) \tag{11.86}$$

A área A_{ABDF} é a área diferencial inclinada, indicada na Figura 11.17 pelos $ABDF$. As áreas A_{BCEF} e A_{ACDE} são as áreas do contorno do elemento volumétrico nos planos xz e yz, respectivamente, e são iguais às projeções da área inclinada A_{ABDF} nesses dois planos, i.e., $A_{BCEF} = A_{ABDF}\text{sen}\alpha$ e $A_{BCEF} = A_{ABDF}\cos\alpha$. Então o equilíbrio fica

$$\tau_n\,(A_{ABDF}) = \tau_{xz}\,(A_{ABDF}\cos\alpha) + \tau_{yz}\,(A_{ABDF}\text{sen}\alpha)\,.$$

Mas de (11.85), $\cos\alpha$ e $\text{sen}\alpha$ são as componentes do vetor normal $\mathbf{n}$, tal que se obtém

$$\boxed{\tau_n = \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y} \tag{11.87}$$

Essa é a relação de transformação de componentes de tensão quando as tensões normais são todas nulas.

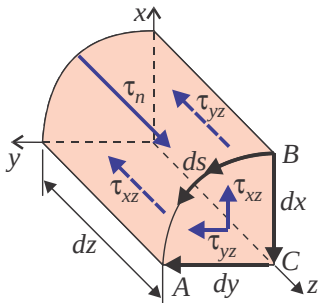


Figura 11.17: Vista em perspectiva do elemento diferencial de contorno e as tensões cisalhantes atuantes.

Como a superfície lateral é livre de carga, $\tau_n = 0$, a condição de equilíbrio no contorno fica

$$\boxed{\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0, \qquad \forall (x,y) \in \Gamma} \tag{11.88}$$

Existe uma relação entre n_x e n_y com os elementos diferenciais dx e dy que é bastante útil em algumas manipulações feitas a seguir. Consideremos um vetor unitário $\mathbf{t}$ na direção tangencial ao contorno. Nas Figuras 11.16c e 11.17, a direção tangencial corresponde ao vetor $\vec{BA}$, que é dado em componentes cartesianas por $\mathbf{t} = t_x\mathbf{i} + t_y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, sendo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ os vetores unitários da base cartesiana. Geometricamente, das duas figuras, se tem

$$t_x = -\,dx/ds \quad \text{e} \quad t_y = dy/ds. \tag{11.89}$$

Como esse vetor é unitário e normal a $\mathbf{n}$ e a $\mathbf{k}$, existem duas relações que o conjunto de vetores devem satisfazer:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{t} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{n}\times\mathbf{t} = \mathbf{k}. \tag{11.90}$$

Essas equações podem ser colocadas em termos de componentes: $n_x t_x + n_y t_y = 0$ e $n_x t_y + n_y t_x = 1$. Esse é um sistema de duas equações que pode ser usado para obter as componentes de $\mathbf{n}$ em termos de $\mathbf{t}$. Juntando o resultado com as equações anteriores se obtém as relações

$$\boxed{n_x = t_y = dy/ds = \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad n_y = -t_x = dx/ds = \text{sen}\alpha} \tag{11.91}$$

Voltando às tensões cisalhantes, substituindo as tensões de (11.83) na equação de equilíbrio de contorno (11.88) e usando (11.91), obtemos a **condição de equilíbrio no contorno lateral** em termos da função empenamento:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \forall (x,y) \in \Gamma. \tag{11.92}$$

Lembramos que a condição de equilíbrio de um ponto no domínio da barra é (11.84).

A solução do problema de torção consiste em obter a função empenamento $\psi(x,y)$ que satisfaz (11.84) e (11.92). Entretanto, o processo de solução geralmente é mais simples se for usada uma variante dessa **formulação, devida a Prandtl**, que consiste no seguinte. Em vista das hipóteses de St.-Venant, as três equações diferenciais de equilíbrio (11.1) se tornam

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{11.93}$$

As duas primeiras são automaticamente satisfeitas porque (11.83) independe de z. Para a terceira equação de equilíbrio acima, se considera uma representação de ambas as incógnitas, τ_{xz} e τ_{yz}, em termos de uma única **função potencial**, $\phi = \phi(x,y)$, conhecida como uma **função tensão**. A função ϕ é definida de tal forma que

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}} \tag{11.94}$$

Nota-se algo surpreendente: **qualquer que seja a expressão da função ϕ, as tensões** obtidas por (11.94) **satisfazem o equilíbrio (11.93)$_3$**. O desafio restante consiste apenas em identificar a particular função ϕ que satisfaz as condições de contorno. Na sequência, eliminamos as tensões em (11.83) usando (11.94):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) \qquad \text{e} \qquad -\frac{\partial\phi}{\partial x} = G\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right). \tag{11.95}$$

A função empenamento ψ pode ser eliminada diferenciando (11.95)$_1$ em y e (11.95)$_2$ em x, e subtraindo uma da outra, obtendo

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \qquad \forall (x,y) \in \Omega} \tag{11.96}$$

Usando (11.94), (11.86) e (11.89), a **condição de contorno** (11.88) pode também ser representada em termos de ϕ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\phi}{\partial x}n_y &= 0, \\ \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}}_{d\phi/ds} &= 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\phi}{ds} = 0, \qquad \forall (x,y) \in \Gamma} \end{aligned} \tag{11.97}$$

A última operação pode ser entendida considerando $\phi = \phi(x,y)$, porém com as coordenadas x e y definidas em termos de um único parâmetro s, medido ao longo do contorno Γ. Então, se tem funções $x = x(s)$ e $y = y(s)$, de forma que ϕ é uma função composta em termos de s, i.e., $\phi = \phi(x(s), y(s))$, o que significa que, de fato, $\phi = \phi(s)$. Assim, $d\phi/ds$ se torna uma derivada em cadeia de ϕ como em (11.97)$_2$.

A eq.(11.96) do equilíbrio no domínio pode ser colocada em termos de tensões, substituindo as derivadas de (11.94) ($\partial^2\phi/\partial x^2 = -\partial\tau_{xz}/\partial x$ e $\partial^2\phi/\partial y^2 = \partial\tau_{yz}/\partial x$), o que resulta

$$\boxed{-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -2G\theta, \quad \forall (x,y) \in \Omega} \tag{11.98}$$

Note-se que, embora τ_{xz} e τ_{yz} variem ponto a ponto da seção transversal, a soma das derivadas acima é uma constante em toda a seção.

A solução do problema de torção é a função tensão ϕ que satisfaz (11.96) e (11.97). Observando a condição de contorno (11.97), nota-se que, uma vez que $d\phi ds = 0$ no contorno, então ϕ deve ser constante ao longo do contorno, i.e.,

$$\phi = C = const., \qquad \forall (x,y) \in \Gamma \tag{11.99}$$

Se a seção não contiver furos, i.e., se ela for definida por uma única curva, a constante C pode ser arbitrada para qualquer valor, como por exemplo $C = 0$ no contorno.

As últimas partes do contorno do corpo a serem consideradas são as **extremidades da barra**. Uma vez que a solução obtida pressupõe que o empenamento independe de z, então não se pode vincular as seções completas das extremidades. Pode-se apenas aplicar tensões nelas, distribuídas da mesma forma que as tensões nas seções internas. As tensões nas extremidades devem ter resultante de momento na direção z, i.e., M_z, igual ao torque T que se deseja aplicar.

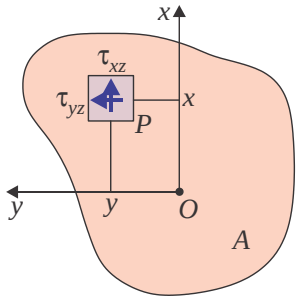


Figura 11.18: Seção transversal no extremo da barra e tensões atuantes.

Consideremos um ponto na extremidade da barra, como na Figura 11.18. O elemento diferencial de momento torçor em torno do eixo z é $dM_z = (\tau_{yz} dA)x - (\tau_{xz} dA)y$. Integrando sobre toda a área A da extremidade, se tem

$$\boxed{T = \int_A dM_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y)\, dA} \tag{11.100}$$

Substituindo (11.94) em (11.100),

$$T = -\int_y \left(\int_x \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx \right) dy - \int_x \left(\int_y \frac{\partial \phi}{\partial y} y dy \right) dx. \tag{11.101}$$

Integrando por partes cada termo se tem

$$T = -\int_y \left(\phi x|_\Gamma - \int_x \phi dx \right) dy - \int_x \left(\phi y|_\Gamma - \int_y \phi dy \right) dx, \tag{11.102}$$

A notação $\phi x|_\Gamma$ representa a diferença de valores de ϕx em pontos extremos do contorno Γ. O detalhamento depende da forma geométrica da seção. Entretanto, como se deve ter $\phi = 0$ em todo o contorno, segue-se que $\phi x|_\Gamma = \phi y|_\Gamma = 0$, e se tem a relação entre o torque aplicado T e ϕ:

$$\boxed{T = -2 \int_A \phi dA} \tag{11.103}$$

Deve-se observar que o torque deve ser aplicado nas extremidades através de uma força distribuída tangente à superfície da extremidade, se distribuindo exatamente como as tensões da solução. Entretanto, do ponto de vista prático, essa restrição não é forte, devido ao Princípio de St.-Venant, em que os efeitos provocados por uma forma arbitrária de aplicação de T se restringe a uma pequena extensão da barra próxima de suas extremidades. Tipicamente, a perturbação no campo de tensões estende-se até uma distância menor que aproximadamente d ou $2d$, onde d é uma dimensão representativa da largura da seção transversal. No resto da barra, na região distante das extremidades, as tensões e deslocamentos tendem a se comportarem de forma bastante similares aos resultados da formulação mostrada, independentemente da forma de aplicação das forças nas extremidades.

O **processo de solução** normalmente começa pela definição do ângulo de torção θ, e em seguida passa à resolução do problema diferencial (11.96)-(11.97) para a determinação da função tensão ϕ. Em seguida as tensões são obtidas de (11.94), os deslocamentos coplanares u e v de (11.81) e o torque aplicado de (11.103). A determinação da função empenamento ψ exige a solução de outro problema diferencial, e não é tão simples de ser obtida.
Observação:

Comparando as eqs.(11.101)-(11.103), observamos que o torque na seção é constituído por duas partes iguais, uma devido a τ_{xz} e outra devido a τ_{yz}. (11.104)

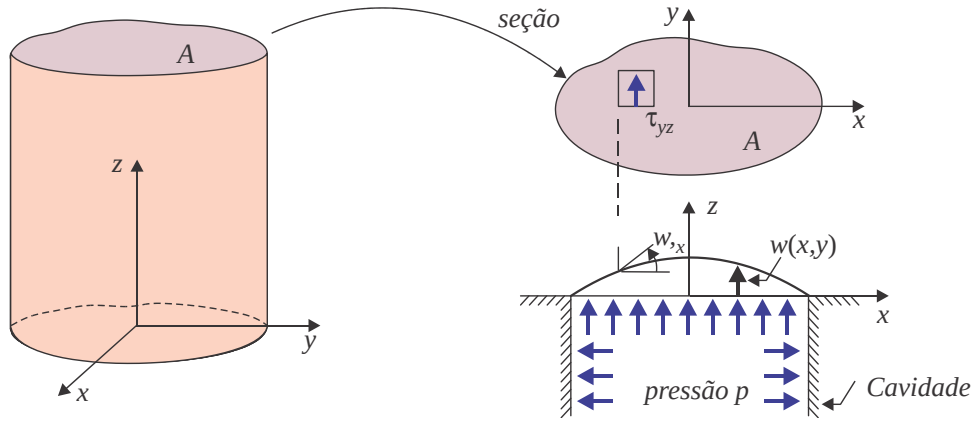


Figura 11.19: Seção transversal de uma barra e cavidade com membrana pressurizada.

11.6.1 Analogia da membrana

Prandtl observou que as equações diferenciais do problema de torção, (11.96) e (11.97), são as mesmas que definem o problema de deflexão transversal de uma membrana pressurizada. O problema é definido da seguinte forma. Considere uma cavidade com borda plana, de área A, com o contorno Γ de mesmo formato e dimensões que a seção transversal da barra reta sob torção (ver Figura 11.19). Sobre essa cavidade, monta-se uma película bastante fina e aplica-se uma pressão interna p. Se a deflexão transversal $w = w(x, y)$ da membrana for suficientemente pequena, prova-se que ela pode ser determinada pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{p}{\sigma}, \qquad \forall (x,y) \in A, \\ w(x,y) &= C = const., \qquad \forall (x,y) \in \Gamma. \end{aligned} \tag{11.105}$$

onde σ é a tensão coplanar na membrana, considerada uniforme. Comparando essas equações com as de torção, eqs.(11.96) e (11.97), é possível fazer as seguintes analogias entre os dois problemas físicos:

	Torção	eq.	Membrana	eq.
a.	ϕ	(11.96)	w	(11.105)
b.	$2G\theta$	(11.96)	p/σ	(11.105)
c.	$\tau_{xz} = \partial\phi/\partial y$	(11.94)	$\partial w/\partial y$	
d.	$\tau_{yz} = -\partial\phi/\partial x$	(11.94)	$\partial w/\partial x$	
e.	$T = -2\int_A \phi dA$	(11.103)	$V = \int_A w dA$	

(11.106)

V é o volume definido pelo deslocamento da membrana inflada. Da tabela, se pode sumarizar a analogia da membrana por:

1. A tensão cisalhante em qualquer ponto da barra numa certa direção é proporcional à inclinação da membrana numa direção perpendicular. Por exemplo, $\partial w/\partial y \rightarrow \tau_{xz}$. Isso também se aplica à qualquer direção inclinada $\mathbf{n}$, onde a tensão seja τ_n, bastando tomar a derivada de w na direção perpendicular a $\mathbf{n}$. Isso é visualizado na Figura 11.20, junto a curvas de nível de w na membrana.

2. O dobro do volume descrito pela membrana é proporcional ao torque aplicado na seção da barra.

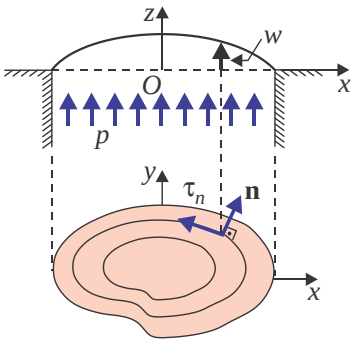


Figura 11.20: Seção transversal de uma barra e cavidade com membrana pressurizada. Tensão cisalhante perpendicular à direção $\mathbf{n}$ de uma curva de nível.

A analogia é útil de duas formas: (1) como base para experimentação, e (2) principalmente com auxílio mental na visualização das tensões e torque em uma barra. A membrana da Figura 11.19 é adequada a barras de seção maciça, em que o contorno é descrito por uma única curva fechada. Nesse caso, a membrana se apoia apenas sobre a borda, de forma que se pode fazer o coeficiente $C = 0$ em $(11.105)_2$ no contorno. Caso a seção possua furos, a membrana análoga é como na Figura 11.21. Trata-se de dois contornos, Γ_1 a curva do contorno externo e Γ_2 a curva interna. Essa seção é correspondente à membrana apoiada na borda Γ_1 com $w = 0$. Na borda interna deve-se impor $w = const = w_2$. Isso pode ser pensado como uma placa sem peso apoiada no topo da membrana, de forma a garantir a uniformidade de w em Γ_2.

11.6.2 Barra de seção aberta delgada

Esse é um problema clássico, cuja solução aproximada pode ser obtida com o auxílio da analogia da membrana. Consideremos a barra de seção retangular delgada como na Figura 11.22, com $h << b$. A analogia de membrana permite visualizar a forma da membrana como nos cortes (c) e (d) da figura. Espera-se que a inclinação maior seja $\partial w/\partial x$, cujo máximo ocorre no meio das bordas longas da seção, os pontos P e Q na figura (b). Então, pela analogia, as tensões máximas na seção serão as componentes τ_{yz} nos pontos P e Q da seção, e nula ao longo da linha de simetria sobre o eixo

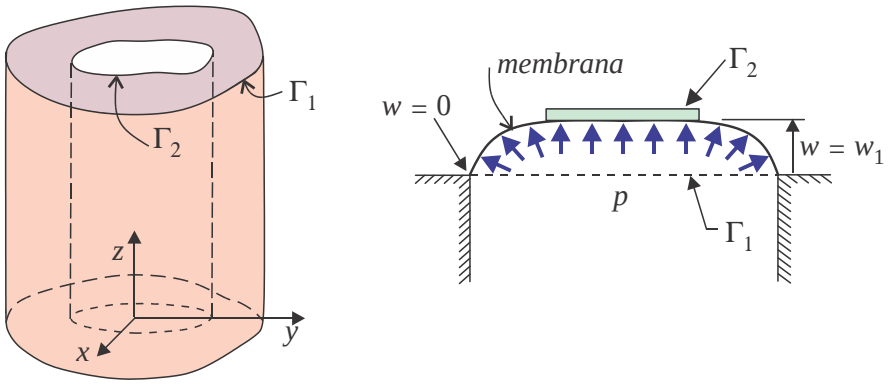


Figura 11.21: (a) Barra com furo na seção transversal; (b) cavidade com membrana pressurizada e placa que representa a geometria do furo da barra.

y. Devido ao maior comprimento b em y, espera-se que as inclinações $\partial w/\partial y$ da membrana sejam pequenas em todos os locais, da mesma forma que τ_{xz}. Usa-se então a hipótese que $\partial w/\partial y \approx 0$, o que implica considerar $w = w(x)$ apenas, i.e., a membrana assume aproximadamente a forma de um cilindro de seção uniforme ao longo de toda a largura b.

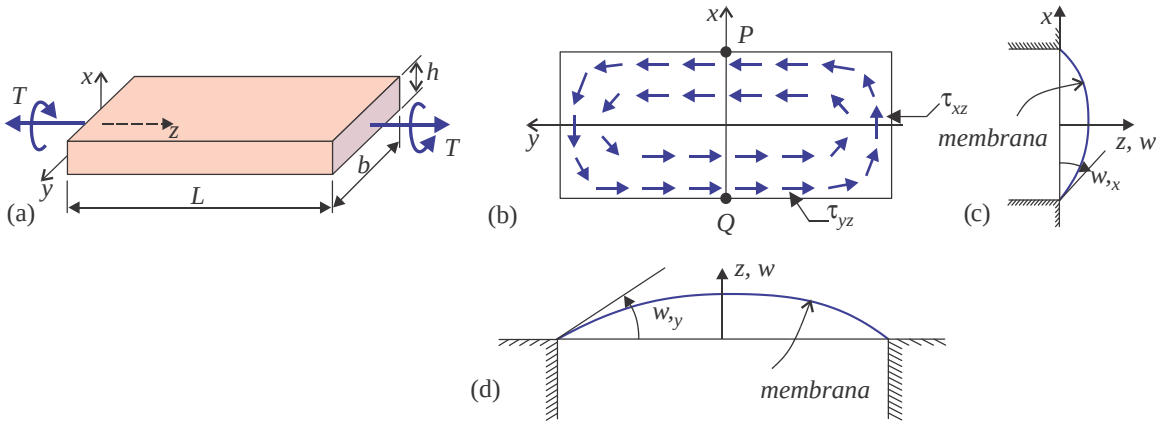


Figura 11.22: (a) Barra de seção retangular delgada, (b) tensões na seção; (c) e (d) vistas laterais da cavidade e da membrana inflada correspondente.

Uma solução aproximada para as tensões consiste em considerar que a forma da membrana varia em x numa forma parabólica, o que significa que $\partial w/\partial x$, e por analogia, τ_{yz}, variam de forma linear em x:

$$\tau_{yz}(x) = \frac{\tau_{yz\,\max}}{h/2}x, \quad \forall (x,y) \in A, \tag{11.107}$$

como pode ser vista na Figura 11.23. $\tau_{yz\,\max}$ é o valor máximo de τ_{yz}, que ocorre nas bordas $\pm h$. A parcela T_y do torque T devida a τ_{yz} é a resultante do momento devido a τ_{yz} na seção:

$$T_y = 2b\int_{x=0}^{h/2} \tau_{yz} x \; dx. \tag{11.108}$$

Usando (11.107), e integrando, se obtém $T_y = \tau_{yz\,\max} bh^2 6$. Da observação em (11.104), sabe-se que **essa é apenas metade do torque na seção**, sendo que a outra metade é devida a τ_{xz}. Apesar de pequenas essas tensões τ_{xz}, elas atuam sobre braços de alavanca muito maiores que os de τ_{yz}, de forma a gerarem o mesmo torque. Então, o torque total aplicado na seção é $T = 2T_y$, i.e.,

$$\boxed{T = \frac{\tau_{yz\,\max} b h^2}{3} \quad \rightarrow \quad \tau_{yz\,\max} = \frac{3T}{bh^2}} \tag{11.109}$$

Então, dado o valor do torque que se deseja aplicar, se tem uma estimativa da tensão máxima na barra, que ocorre no meio do lado mais longo da seção.

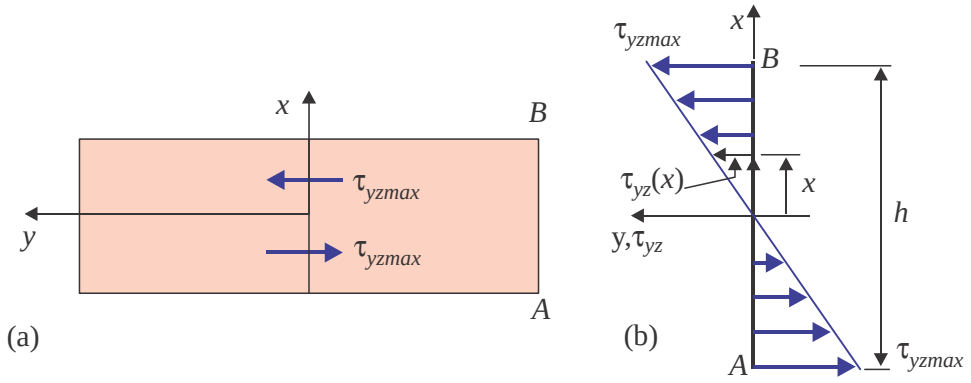


Figura 11.23: (a) tensões $\tau_{yz\,\max}$ na seção retangular delgada. (b)Variação linearizada de τ_{yz} ao longo de x.

O ângulo de torção θ pode ser relacionado a τ_{yz} através de (11.98), fazendo $\tau_{xz} \approx 0$ e tomando τ_{yz} de (11.107):

$$-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -2G\theta,$$

$$\boxed{-\frac{\tau_{yz\,\max}}{h/2} = -2G\theta}. \quad \text{De (11.109)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{3T}{bh^3G} \quad \text{ou} \quad T = \frac{\theta b h^3 G}{3}} \tag{11.110}$$

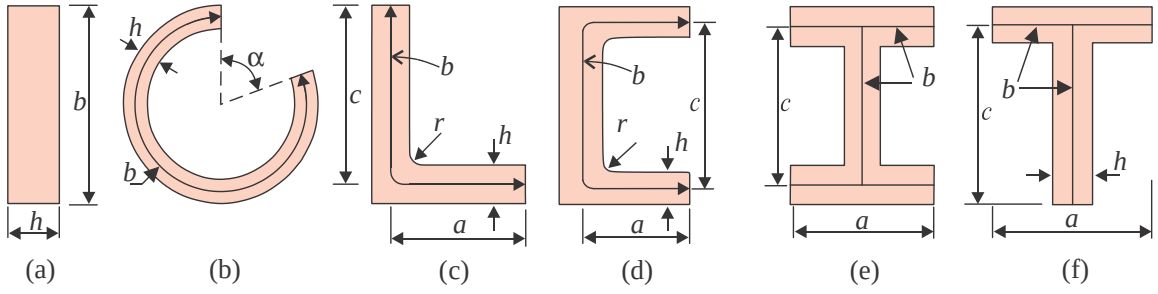


Figura 11.24: Alguns perfis abertos de parede delgada. Em todos os casos, $\tau_{\max} = 3T/bh^2$ e $\theta = 3T/bh^3G$. b é o comprimento do perímetro médio do perfil.

Torção em outros perfis delgados

A analogia de membrana pode fornecer subsídios para estimar as tensões nominais máximas e a rigidez de barras de seções abertas delgadas, como os exemplos da Figura 11.24. Nesses casos, se a seção for uniforme, $\tau_{\max}$ e θ são obtidos com as mesmas expressões (11.109) e (11.110) do caso de seção reta (Figura 11.24a), apenas tomando b como o comprimento da curva média da seção, indicada nas figuras. Entretanto, **a tensão é concentrada** nos raios de concordância internos nos casos (c) e (d). Assim, a formulação provê, nesses casos, apenas os **valores nominais de tensão**.

Observação: para um dado valor de ângulo de torção θ, as eqs. (11.110) e (11.109) permitem

estimar valores aproximativos do torque necessário e da tensão máxima desenvolvida. Na próxima seção se apresentará a solução completa do problema, em série infinita, adequada a barras de seção não necessariamente delgadas. Quando se compara a solução aproximativa com a exata se observa que a **solução aproximada superestima a tensão máxima** (portanto é conservativa), e superestima o torque, o que significa que **superestima a rigidez da barra** (logo é não conservativa em dimensionamento por rigidez). Isso pode ser visto com valores numéricos nos Exercícios 23 e 24.

Exemplo 11.3 - Rigidez torcional de tubo e perfil aberto

Compare a rigidez torcional entre duas seções circulares de parede delgada, uma delas um tubo de seção circular e outra uma barra com o perfil aberto do tipo mostrado na Figura 11.24b, com ângulo $\alpha = 0$. Ambas as barras possuem os mesmos diâmetros interno d e externo D, de espessura h, com comprimento L, como na Figura 11.25. Utilize 20 mm, $D = 25$ mm.

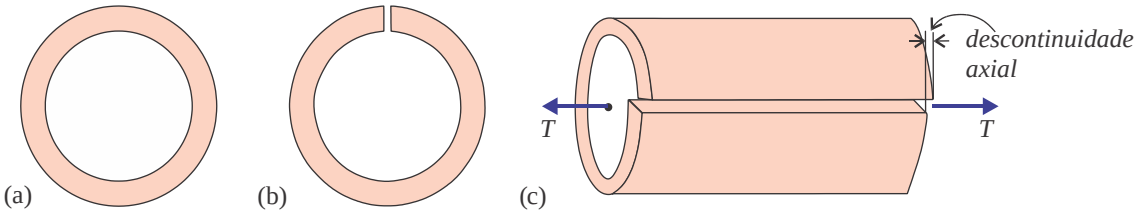


Figura 11.25: Em (a) e (b) seções fechada e aberta. (c) ilustração da configuração deformada do tubo aberto com a descontinuidade de deslocamentos na borda.

Solução:

Para a seção tubular podemos usar a formulação do Capítulo 7, em que o ângulo de torção por unidade de comprimento de barra é dado por $\theta_t = T/GJ$, onde o momento polar de inércia foi obtido em (7.27) como $J = 2\pi r^3 h$, sendo r o raio médio da seção, $r = (D + d)/2$. Para a seção aberta, o ângulo de torção por unidade de comprimento é $\theta_a = 3T/bh^3G$, onde b é o comprimento do perímetro médio, i.e., $b = 2\pi r$. Então, para o **tubo**, a rigidez torcional é

$$K_t = \frac{T}{\theta_t} = GJ = 2\pi r^3 hG, \tag{11.111}$$

e para o **perfil aberto**,

$$K_a = \frac{T}{\theta_a} = \frac{2\pi r h^3 G}{3} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{K_t}{K_a} = \frac{3r^2}{h^2}} \tag{11.112}$$

Para as dimensões dadas, $r = (D + d)/2 = 22,5$ mm e $h = (D - d)/2 = 2,5$ mm. Então, a relação entre as rigidezes é $K_t/K_a = 3(22,5/2,5)^2 = 243$, i.e., **com a mesma quantidade de material, o tubo fechado apresenta 243 vezes mais rigidez que o perfil aberto**.

Note que isso é regra geral: perfis abertos de quaisquer formatos apresentam rigidez torcional muito menor que do tubo equivalente de mesmo perímetro médio.	(11.113)

A relação entre rigidezes, no caso circular, é proporcional a $(r/h)^2$, o que significa que quanto mais fina for a parede, menos eficiente é o perfil aberto. Uma explicação qualitativa para o fenômeno é visualizada na configuração deformada da Figura 11.25c: no perfil aberto, uma face pode deslizar em relação à outra, o que não é possível no tubo fechado.

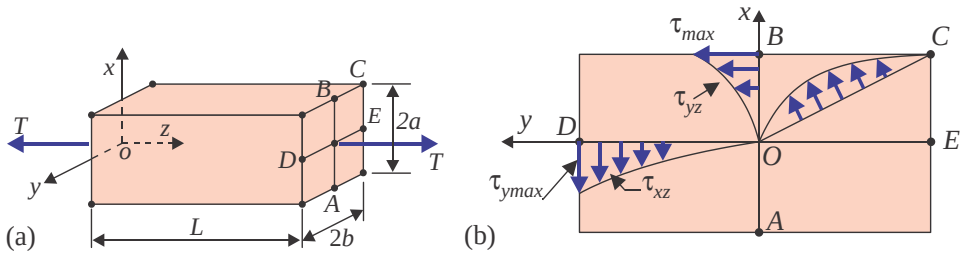


Figura 11.26: (a) Barra de seção retangular e (b) ilustração da variação das tensões ao longo de algumas linhas (OB, OC e OD) na seção.

11.6.3 Barra de seção retangular

Consideremos o problema de torção de uma barra reta de seção retangular uniforme, de seção $2a \times 2b$, como na Figura 11.26. A solução é obtida pela determinação da função tensão ϕ que satisfaz o problema diferencial (11.96)-(11.97). O **método de separação de variáveis** é um método clássico de teoria de equações diferenciais parciais, cujo detalhamento está além do escopo desse livro. Tomamos apenas os resultados obtidos na literatura [9], que é na forma de uma série infinita:

$$\phi(x,y) = \frac{32G\theta a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)}\right] \cos\frac{n\pi x}{2a}. \tag{11.114}$$

Com isso, as tensões podem ser facilmente obtidas por diferenciação, conforme (11.94):

$$\boxed{\tau_{yz}(x,y) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)}\right] \text{sen}\frac{n\pi x}{2a}} \tag{11.115}$$

e similarmente para τ_{xz}. Se $b > a$, a componente máxima de tensão cisalhante na seção é o máximo de $\tau_{yz}(x,y)$, que ocorre nos pontos $(x,y) = (\pm a; 0)$, indicados por A e B na Figura 11.26:

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh(n\pi b/2a)}\right] \quad \text{se } b > a. \tag{11.116}$$

O primeiro termo no colchete é $\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}(1/n^2)$, que é provado em cursos de cálculo, ser igual a $\pi^2/8$. Então, (11.116) fica

$$\boxed{\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cosh(n\pi b/2a)} \quad \text{se } b > a} \tag{11.117}$$

A Figura 11.26b ilustra a variação das tensões ao longo de certas linhas da seção, para o caso $b > a$. Assim, nos pontos A e B, a tensão é máxima de toda a seção, igual ao máximo de τ_{yz} obtido por (11.117). Se a seção fosse $b < a$, o máximo seria dado de forma análoga, sendo igual ao máximo de τ_{xz}, ocorrendo nos pontos D e E. A variação de τ_{yz} ao longo de OA é antissimétrica da curva ao longo de OB. A forma da variação de τ_{xz} ao longo de OC e OD são similares à de τ_{yz}, porém o máximo de τ_{xz} é menor que o máximo de τ_{yz} se $b > a$. Na origem O e nos quatro cantos, as tensões são nulas. Isso poderia ter sido previsto usando a analogia da membrana e interpretando a forma da membrana correspondente à seção retangular.

O **torque** pode ser obtido levando ϕ de (11.114) para (11.103):

$$T = -2 \int_{y=-b}^{b} \int_{x=-a}^{a} \phi dx dy. \tag{11.118}$$

Após a integração e simplificação, se obtém o torque em termos do ângulo de torção:

$$T = \frac{G\theta(2a)^3(2b)}{3}\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\left(\frac{a}{b}\right)\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi b}{2a}\right] \tag{11.119}$$

Essa expressão também pode ser facilmente usada para obter θ em termos de um torque T conhecido.

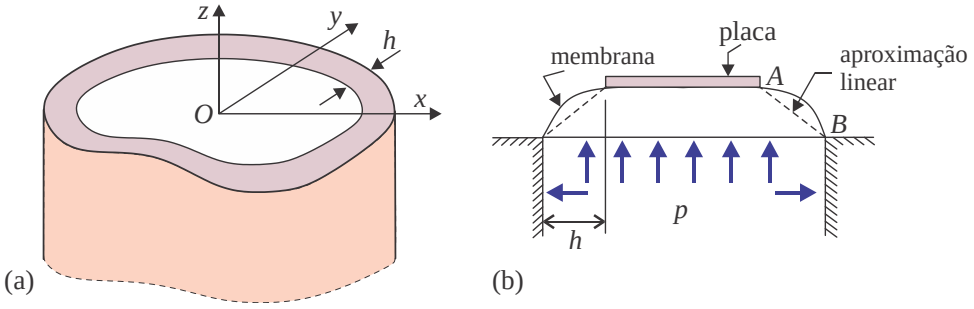


Figura 11.27: (a) Seção tubular de parede delgada fechada arbitrária com furo e (b) analogia da membrana com aproximação linear desta.

11.6.4 Tubos de parede delgada

Consideramos seções com um único furo, como na Figura 11.27a. A analogia de membrana permite visualizar que as tensões na seção transversal do tubo sejam proporcionais à inclinação da membrana no aparato mostrado na figura (b), em que a membrana se apoia sobre a borda externa B, e uma placa em peso, com a forma do furo, é apoiada sobre a membrana, de forma a manter contato em toda a borda da placa.

Caso a parede seja fina, é possível usar a hipótese que a membrana entre A e B seja bem aproximada por uma reta. Isso significa considerar que a tensão τ, que atua na direção tangente à linha média da parede, seja uniforme ao longo da espessura.

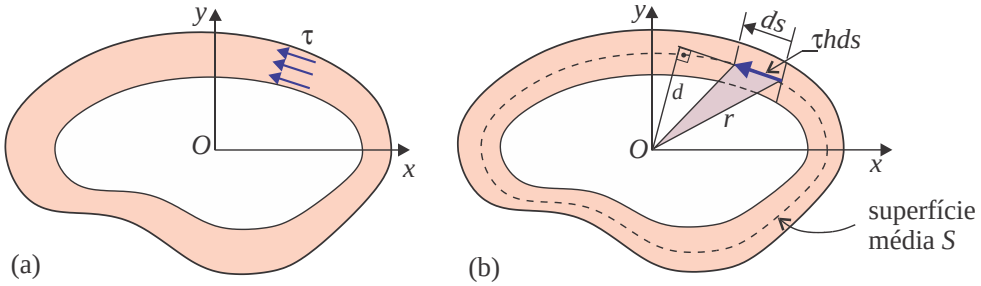


Figura 11.28: (a) Tensões τ tangentes à parede da seção tubular de parede delgada arbitrária e (b) perímetro médio S e braço de alavanca d para o momento devido a τ.

Consideramos o caso em que a espessura da seção seja uniforme. Podemos identificar uma força diferencial $\tau h ds$ atuando ao longo de uma região diferencial de área hds. Essa força exerce um momento $dM_x = (\tau h ds)d$, como na Figura 11.28b, onde d é o braço de alavanca perpendicular à força até o ponto O. O momento resultante em toda a seção deve ser igual ao torque aplicado:

$$T = \tau h \oint_S d\, ds. \tag{11.120}$$

O símbolo $\oint_S$ indica que a integral de d deve ser feita para s que percorra todo o perímetro médio S da seção indicado na figura. Nota-se que dds é o dobro da área do triângulo hachurado na Figura 11.28b. Então, de fato, a integral em (11.120) é simplesmente igual a $2\bar{A}$, tal que

$$\boxed{T = 2\tau h\bar{A} \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{T}{2h\bar{A}}} \tag{11.121}$$

A área $\bar{A}$ não é a área A da seção transversal da barra, mas é a área cheia, interna ao perímetro médio S. Nota-se que, conhecido o torque, se tem uma estimativa simples para a tensão na parede. Claramente, essa expressão não inclui efeitos de **concentração de tensões** em cantos internos que possam existir na seção.

Ângulo de Torção

O ângulo de torção será deduzido usando o conceito de energia de deformação, a ser detalhado apenas no Capítulo 14. Utiliza-se a primeira lei da termodinâmica, que no presente caso se simplifica em um balanço entre o trabalho W aplicado na barra pelo torque T e a variação da energia de deformação elástica U, dados por

$$W = U \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2}\int_A \tau\gamma \; dA. \tag{11.122}$$

γ é a deformação cisalhante, que pode ser relacionada à tensão pela lei de Hooke: $\gamma = \tau/G$. Trazendo a tensão τ de (11.121) se obtém

$$\frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2G}\int_A \tau^2 dA = \frac{\tau^2 A}{2G} = \frac{T^2 A}{8G\bar{A}^2h^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\theta = \frac{TA}{4G\bar{A}^2h^2}} \tag{11.123}$$

A área A da seção transversal pode ser representada para o tubo de parede fina, por $A = Sh$, onde S é o comprimento do perímetro médio da parede. Então,

$$\boxed{\theta = \frac{TS}{4G\bar{A}^2h}} \tag{11.124}$$

As equações (11.121) e (11.124) permitem a determinação da tensão e de θ para um dado torque T. Essas equações **podem ser aplicadas a todas as geometrias de tubo retos de paredes fechadas delgadas de espessura uniforme, com um único furo**, como os casos da Figura 11.29. A rigidez torcional de um tubo é obtida de (11.124):

$$\boxed{K_t = \frac{T}{\theta} = \frac{4G\bar{A}^2h}{S}} \tag{11.125}$$

Nota-se que a rigidez é proporcional ao quadrado da área interna a S, não à área da própria seção de material, como no caso do perfil aberto, eq.(11.110), em que a rigidez é $K_a = T/\theta = bh^3G/3 = Ah^2G/3$, onde $A = bh$ é a área de material na seção.

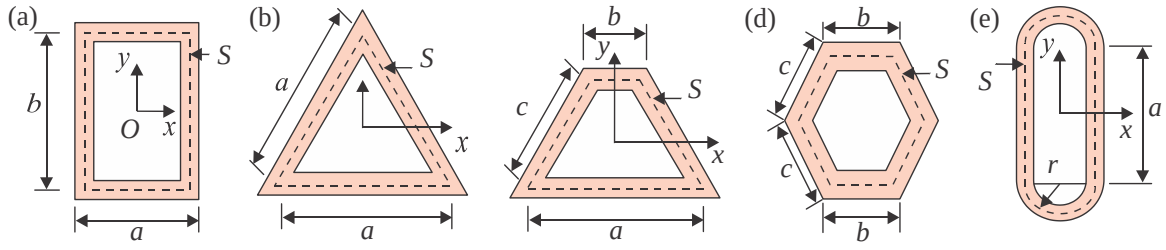


Figura 11.29: Algumas seções tubulares fechadas de parede delgada em que se pode usar as equações (11.121) e (11.124).

Exemplo 11.4 - Rigidez torcional de tubo de seção retangular

Considere uma barra com a seção tubular retangular como na Figura 11.29a, com lados $a = 20$ mm, $b = 30$ mm e espessura $h = 2$ mm, submetida a um torque $T = 200$ Nm. Determine a tensão cisalhante nominal e o ângulo de torção. Use $G = 80$ GPa. Ignore a concentração de tensões nos cantos internos da seção. Qual o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra, se o comprimento do tubo for $L = 1$ m?

Solução:

A tensão cisalhante é estimada de (11.121), com área interna dada por $\bar{A} = ab = 600$ mm^2. Então, $\tau = T/2h\bar{A} = 200.000(2{\times}600{\times}2) = 83,3$ MPa. O ângulo de torção por unidade de comprimento é obtido de (11.124), com o perímetro $S = 2(a+b) = 100$ mm. Então, $\theta = TS/4G\bar{A}^2h = 8,68 \cdot 10^{-5}$ rad/mm. Para o tubo de $L = 1$ m, a rotação relativa entre as extremidades é $\Delta\varphi = \theta L = 8,68 \cdot 10^{-2}$ rad/mm = 4,97°.

11.7 Vigas curvas

Existem diversos tipos de componentes mecânicos que podem ser classificados como vigas curvas. São elementos delgados que suportam carga desenvolvendo esforços de momento fletor, de maneira análoga às vigas retas. O exemplo mais típico é o do gancho de elevação de carga, como mostrado na Figura 11.30. Essa classe de vigas se caracterizam por possuirem pequenos valores de raio de curvatura, quando comparado à altura da seção, i.e., altos valores h/R. Nessas situações, a distribuição de tensões normais na seção transversal é bastante diferente daquela das vigas retas.

A teoria detalhada nessa seção é restrita à seguinte situação:

- a barra curva é toda contida num único plano (xy), de forma a suprimir efeitos de torção;
- a seção transversal da barra pode variar suavemente, mas todas as seções deve ser simétrica em relação ao plano xy;
- o esforço de momento fletor deve ser perpendicular ao plano xy que contém a viga;
- a formulação é válida apenas na faixa elástico-linear do material;
- o material é isotrópico, tal que o módulo de elasticidade é o mesmo em tração e compressão.

Os aspectos principais da teoria são ilustrados na Figura 11.31, que mostra um segmento do arco. Se consideramos um plano normal à seção ab, podemos rotacionar a viga inteira de forma a

Figura 11.30: Detalhe de um gancho de elevação de cargas em guindaste, com polias e cabos de aço.

tornar essa seção coincidente com os eixos yz. Consideramos uma extensão de arco de comprimento diferencial, definido pelo ângulo $d\phi$ em torno de z. Essa região do arco é caracterizada pelos seguintes raios de curvatura:

$$\begin{array}{ll} r_i \text{ e } r_e & = \text{raios de curvatura das superfícies interna e externa do arco;} \\ r_c & = \text{raio de curvatura do centróide da seção naquela região;} \end{array} \tag{11.126}$$

Os raios de curvatura são medidos a partir do centro de curvatura O, e são perpendiculares ao arco. Note que a viga curva como um todo não precisa ser ter raio de curvatura único em toda a sua extensão, o que a limitaria a um arco de circulo. Cada ponto de sua extensão pode possuir um centro de curvatura próprio no plano, e um valor distinto de raio de curvatura. Entretanto, para a presente análise, é suficiente considerar uma região arbitrária, de extensão diferencial, como aquela hachurada na Figura 11.31a, em que os raios de curvatura são designados como em (11.126).

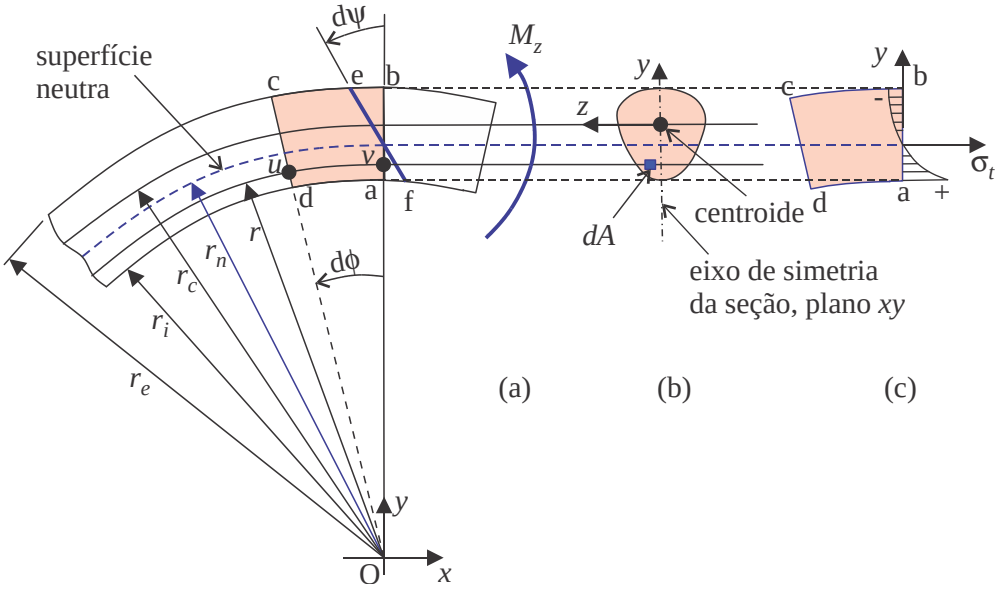


Figura 11.31: Elementos do modelo de vigas curvas sob flexão pura plana.

A teoria é baseada na mesma hipótese fundamental cinemática usada no caso de vigas retas: que as seções transversais, como ab, se mantém planas após a aplicação do momento fletor M_z, apenas sofrendo rotação $d\psi$ para ef, como indicado na Figura 11.31a. Então o elemento $abcd$ se deforma para $fecd$. Nesse ponto é que os resultados das teorias para vigas retas e curvas se diferenciam.

Embora o deslocamento tangencial varie de forma linear, a deformação tangencial não, e como consequência, a tensão normal também não varia linearmente, mas na forma esboçada na Figura 11.31c. O motivo pode ser entendido observando que os comprimentos dos arcos interno e externo, ac e bc, são distintos, o que não ocorria na viga reta. Uma outra consequência é que **a linha neutra não mais passa pelo centróide** da seção, mas numa posição dada pelo raio de curvatura r_n, ainda a ser determinado. De fato, a formula\cão vai mostrar que

> **a linha neutra sempre se localiza para "dentro do arco", i.e., do lado da linha centroidal mais próximo do centro de curvatura.**

Consideremos o comportamento de uma fibra arbitrária uv, situada a uma posição definida pelo raio de curvatura r.

$$\begin{aligned} &\text{- Seu comprimento inicial é} && r d\phi, \\ &\text{- seu elongamento na direção tangencial é} && (r_n - r) d\psi. \\ &\text{- Logo, a deformação desse segmento é} && \varepsilon = \frac{(r_n - r)}{r}\frac{d\psi}{d\phi}. \end{aligned} \tag{11.127}$$

Quanto às **tensões normais** na direção tangencial, trata-se aproximadamente de um estado uniaxial de tensões, dado pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{(r_n - r)}{r}\frac{d\psi}{d\phi}. \tag{11.128}$$

A posição da **linha neutra**, r_n, pode ser obtida como aquela que faz com que o equilíbrio de forças tangenciais na seção normal ab seja satisfeita:

$$\sum F_t = 0 \quad \rightarrow \quad \int_A \sigma dA = 0 \quad \rightarrow \quad E\frac{d\psi}{d\phi}\int_A \frac{(r_n - r)}{r} dA = 0. \tag{11.129}$$

Porém r_n também não varia ao longo da área A da seção. Então essa expressão pode ser desmembrada na forma, se obtém a **posição da linha neutra**:

$$E\frac{d\psi}{d\phi}\left[r_n \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA\right] = 0 \quad \rightarrow \tag{11.130}$$

$$\boxed{r_n = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{r_n = \frac{A}{S} \quad \text{onde} \quad S = \int_A \frac{dA}{r}} \tag{11.131}$$

Conhecida a forma e dimensões da seção transversal, essa expressão permite a determinação da posição da linha neutra. Como será visto nos exemplos, essa **posição da linha neutra não coincide com o eixo centroidal**.

A etapa seguinte consiste em buscar uma relação entre a **tensão normal** σ e o esforço de momento fletor M_z na seção. Essa relação é tal que a distribuição de tensões em (11.128) resulte no esforço de momento M_z. Isso é representado pela condição:

$$M_z = \int_A (r_n - r)\underbrace{\sigma dA}_{df}. \tag{11.132}$$

onde agora a posição r_n da linha neutra é considerada conhecida. Observando a Figura 11.31b, σ atua num elemento de área dA e produz um elemento diferencial de força tangencial df. Essa força aplica um momento em relação à linha neutra, com o braço de alavanca $(r_n - r)$. Substituindo σ de (11.128), tem-se

$$M_z = \frac{d\psi}{Ed\phi}\int_A \frac{(r_n - r)^2}{r} dA. \tag{11.133}$$

Entretanto, reorganizando (11.128) se tem que o termo à esquerda da integral pode ser posto como

$$\boxed{\frac{d\psi}{Ed\phi} = \frac{\sigma r}{(r_n - r)}} \tag{11.134}$$

Então (11.133) fica

$$M_z = \frac{\sigma r}{(r_n - r)} \int_A \frac{(r_n - r)^2}{r} dA. \tag{11.135}$$

Expandindo os termos se obtém

$$M_z = \frac{\sigma r}{(r_n - r)} \left[r_n \underbrace{\left(r_n \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \right)}_{0} - r_n \underbrace{\int_A dA}_{A} + \underbrace{\int_A r dA}_{r_c A} \right] \tag{11.136}$$

O primeiro termo entre parênteses é nulo uma vez que a linha neutra é tal que r_n satisfaz a nulidade do colchete em (11.131). A última integral é exatamente aquela que identifica a **posição do centróide**:

$$\boxed{r_c = \frac{1}{A} \int_A r dA} \tag{11.137}$$

Então, (11.136) fica na forma

$$M_z = \sigma r A \frac{(r_c - r_n)}{(r_n - r)}. \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\sigma = \frac{M_z (r_n - r)}{r A (r_c - r_n)} = \frac{M_z (r_n/r - 1)}{A (r_c - r_n)}, \qquad \forall r_i \le r \le r_e} \tag{11.138}$$

Essa é a relação final que produz a tensão normal em uma fibra arbitrária como uv na Figura 11.31a, de raio de curvatura r. Nota-se que essa expressão não é linear em r, mas apresenta uma variação hiperbólica como esboçado na Figura 11.31c, através do termo r_n/r. Isso é diferente da variação linear da fórmula de flexão, $\sigma = M_z y / I_z$ da viga reta. A formulação é tal que sempre o denominador é positivo: $r_c - r_n > 0$. Então, se $M_z > 0$ e a fibra uv se encontra abaixo da linha neutra, $r_n - r < 0$, a tensão é trativa. De qualquer forma, as máximas tensões em módulo sempre ocorrem na borda interna do arco de viga, quando $r = r_i$.

Linha neutra para alguns tipos de seção transversal

Podemos usar (11.131) para determinar a posição da linha neutra r_n a partir do centro de curvatura, para diversas geometrias típicas de seção transversal.

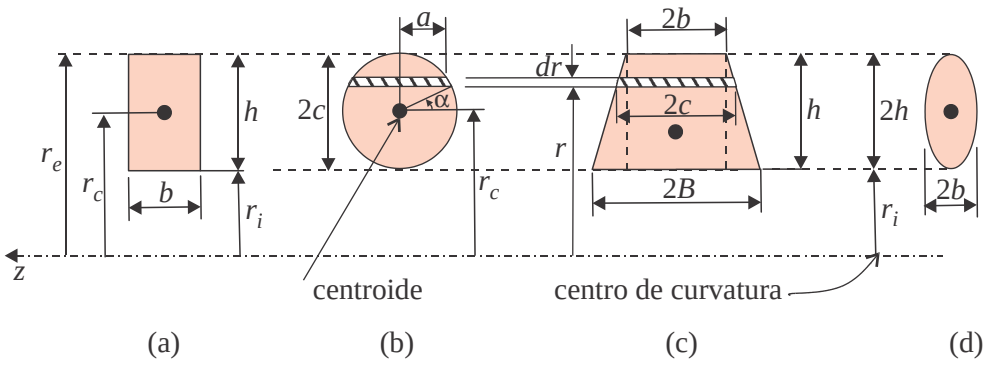


Figura 11.32: Parâmetros geometricos para diversos tipos de seção transversal.

Para **seção retangular** como na Figura 11.32a. Podemos determinar uma expressão geral para

a posição r_n de uma seção retangular de dimensões $b \times h$, em termos dos raios interno e externo r_i e r_e. Integramos a eq. (11.131) tomando o elemento diferencial de área como $dA = bdr$. Também, a área da seção é $A = bh$. Assim,

$$r_n = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}. \qquad S = \int_A \frac{dA}{r} = b\int_{r=r_i}^{r_e} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{S = b\ln(r_e/r_i) \qquad \text{e} \qquad r_n = \frac{h}{\ln(r_e/r_i)}} \tag{11.139}$$

Seção circular maciça

Consideramos o raio de curvatura da superfície neutra $r_n = A/S$, onde $S = \int_A dA/r$. Escolhemos dA como a área hachurada na Figura 11.32c, $dA = 2adr$. Do triângulo retângulo mostrado, temos $a = c\cos\alpha$. Também, $r = r_c + c\,\text{sen}\alpha$, de onde se tem $dr = c\cos\alpha$. Então,

$$\begin{aligned} S &= \int_A \frac{dA}{r} = \int_r \frac{2a}{r} dr \qquad (11.140)\\ &= 2c^2 \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\alpha}{r_c + c\,\text{sen}\alpha} d\alpha = 2\pi r_c - 4\sqrt{r_c^2 - c^2}\left[\arctan\left(-\sqrt{\frac{r_i}{r_e}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{r_e}{r_i}}\right)\right]. \end{aligned}$$

O termo em colchetes é na forma $\arctan(-1/k) - \arctan(1/k)$. Como $\arctan(-1/k) = -\arctan(1/k)$, e $\arctan(k) + \arctan(1/k) = \pi/2$, o colchete se simplifica para $-\pi/2$, e se tem

$$\boxed{S = 2\pi\left(r_c - \sqrt{r_c^2 - c^2}\right)} \tag{11.141}$$

$$r_n = \frac{A}{S} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{r_n = \frac{r_c + \sqrt{r_c^2 - c^2}}{2}} \tag{11.142}$$

Para a **seção trapezoidal** como na Figura 11.32c, tomamos o elemento diferencial de área $dA = 2cdr$ (a área hachurada na figura), e definimos uma coordenada $y = r - r_i$. Por semelhança de triângulos, para o triângulo tracejado na figura, obtemos

$$\frac{c-b}{h-y} = \frac{B-b}{h} \qquad \rightarrow \qquad c = b + \frac{(B-b)(h-y)}{h}. \tag{11.143}$$

O raio de curvatura da linha neutra é dado por $r_n = A/S$, onde

$$S = \int_A \frac{dA}{r} = \int_{r=r_i}^{r_e} \frac{2cdr}{r}. \text{ Integrando,}$$

$$\boxed{S = 2\left[\frac{1}{h}(Br_e - br_i)\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) + b - B\right]} \tag{11.144}$$

A área e a posição do centroide são:

$$A = (b+B)h \qquad \text{e} \qquad r_c A/2 = (bh)(r_i + h/2) + [(B-b)h/2]\,(r_i + h/3). \tag{11.145}$$

A seção trapezoidal é mais eficiente que a retangular, desde que $B > b$, i.e., o lado maior da seção seja posicionado do lado interno do arco como na Figura 11.32c. Isso porque é nessa região em que ocorrem as maiores tensões na função hiperbólica. Com o aumento de material na borda interna, o centróide se aproxima mais dessa borda, e também a linha neutra.

Para **seção triangular**, se pode usar a mesma expressão da seção trapezoidal, apenas fazendo $b = 0$ ou $B = 0$, conforme a posição do triângulo em relação ao centro de curvatura. Tomando (11.144),

se tem uma expressão para cada caso:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{caso } b=0 & S=2B\left[-1+\dfrac{r_e}{h}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)\right]\\ \text{caso } B=0 & S=2b\left[1-\dfrac{r_i}{h}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)\right]\end{array}} \tag{11.146}$$

Note-se que as expressões dependem apenas o tamanho da base e da altura da seção, não da forma do triângulo: ele não precisa ser isóceles, mas pode ser escaleno.

Para **seção elíptica** como na Figura 11.32d, dados o raio centroidal r_c e os raios b e h da elípse, o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A, o fator S são dados por

$$\boxed{A=\pi bh,\qquad S=\frac{2\pi b}{h}\left(r_c-\sqrt{r_c^2-h^2}\right),\qquad r_n=A/S} \tag{11.147}$$

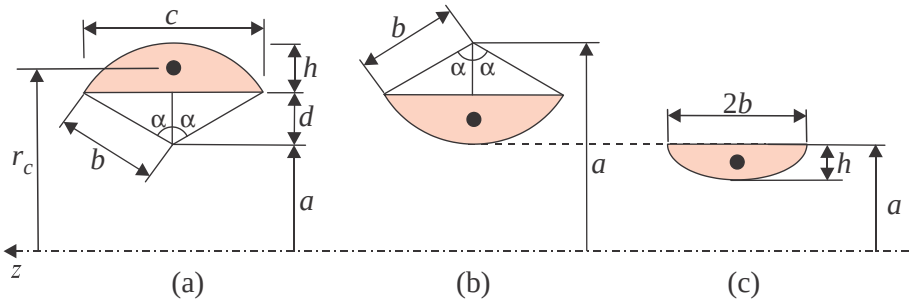


Figura 11.33: (a) e (b) Seções de setor de arco de circunferência, (c) semi elípse.

Consideramos a seção em forma de **setor de arco de circunferência**, como na Figura 11.33a, definida em termos do raio b e do ângulo α. Os raios de curvaturas da linha centroidal r_c, da linha neutra r_n , a área A, o fator S são dados por:

$$\begin{aligned} A &= b^2\alpha-\frac{b^2}{2}\text{sen}2\alpha,\qquad r_c=a+\frac{4b\text{sen}^3\alpha}{3\,(2\alpha-\text{sen}2\alpha)}.\\ \text{Caso } a &> b\text{:}\quad S=2a\alpha-2b\text{sen}\alpha-\sqrt{a^2-b^2}\left[\pi-2\text{arcsen}\left(\frac{b+a\cos\alpha}{a+b\cos\alpha}\right)\right],\\ \text{Caso } a &< b\text{:}\quad S=2a\alpha-2b\text{sen}\alpha+2\sqrt{b^2-a^2}\ln\left[\frac{b+a\cos\alpha+\sqrt{b^2-a^2}\text{sen}\alpha}{a+b\cos\alpha}\right]. \end{aligned} \tag{11.148}$$

Para seção em forma de **setor de arco de circunferência**, como na Figura 11.33b, o raio da linha centroidal r_c, o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A, o fator S são dados por:

$$\begin{aligned} A &= b^2\alpha-\frac{b^2}{2}\text{sen}2\alpha,\qquad r_c=a-\frac{4b\text{sen}^3\alpha}{3\,(2\alpha-\text{sen}2\alpha)}.\\ S &= 2a\alpha+2b\text{sen}\alpha-\sqrt{a^2-b^2}\left[\pi+2\text{arcsen}\left(\frac{b-a\cos\alpha}{a-b\cos\alpha}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11.149}$$

Frequentemente, a definição do setor de circunferência é feita em termos da largura c da corda e da altura do arco h, como indicado na Figura 11.33a. Uma dedução rápida mostra a relação entre esses parâmetros e aqueles usados nas equações de S acima, α e o raio b. Essas relações são:

$$\boxed{d=\frac{1}{8h}\left(c^2-4h^2\right),\qquad b=d+h\qquad\text{e}\qquad\cos\alpha=\frac{d}{b}} \tag{11.150}$$

Para seção em forma de **setor de semi elípse**, como na Figura 11.33c, o raio da linha centroidal r_c, o raio r_n de curvatura da linha neutra, a área A, o fator S são dados por:

$$\boxed{A = \frac{\pi bh}{2}, \quad r_c = a - \frac{4h}{3\pi} \qquad S = 2b + \frac{\pi b}{h}\left(a - \sqrt{a^2 - h^2}\right) - \frac{2b}{h}\sqrt{a^2 - h^2}\,\text{arcsen}\left(\frac{h}{a}\right)} \tag{11.151}$$

Exemplo 11.5 - Vigas curvas espessas e delgadas

Calcule as tensões em duas vigas curvas, com raios de curvatura centroidais (a) $r_c = 100$ mm e (b) $r_c = 300$ mm. A seção transversal é retangular, com dimensões $b \times h = 40 \times 60$ mm^2. O esforço de momento fletor na seção é $M_z = 1$ kNm. Compare as tensões máximas com aquelas obtidas pela teoria de vigas retas. A Figura 11.34 mostra uma visualização em escala das duas vigas curvas. Pode-se notar que no caso (a) a relação $h/r_c = 60/100 = 0,6$ e no caso (b) é $h/r_c = 60/300 = 0,2$.

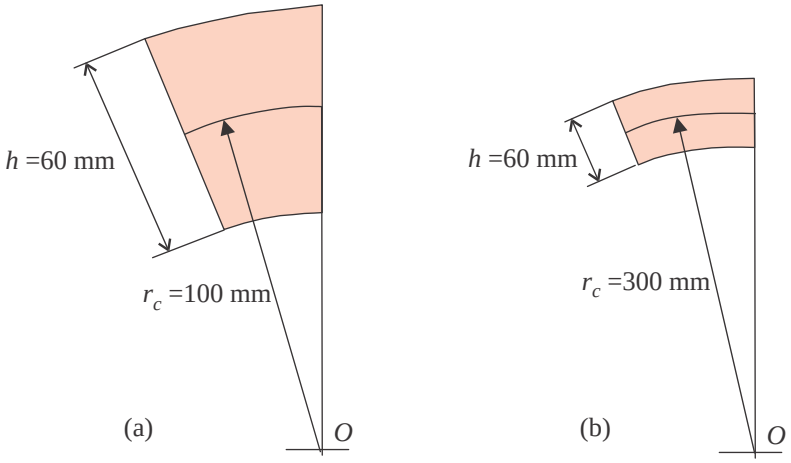


Figura 11.34: Visualização das duas vigas curvas do Exemplo 5. Cada viga está em escala, mas as escalas são distintas entre as duas vigas.

Solução:
Viga reta. Nesse caso se usa a fórmula de flexão, com momento de inercia $I_z = bh^3/12 = 40 \times 60^3/12 = 72 \cdot 10^4$ mm^4:

$$\sigma_l = \frac{M_z(h/2)}{I_z} = \frac{10^6 \times (60/2)}{72 \cdot 10^4} = 41,667 \text{ MPa}. \tag{11.152}$$

(a) Viga curva de $r_c = 100$ mm. Como a seção retangular tem dois planos de simetria, o centroide se encontra no centro da seção, e os raios interno e externo são $r_i = r_n - h/2 = 70$ mm e $r_e = r_n + h/2 = 130$ mm.

Podemos determinar uma expressão para a posição r_n de uma seção retangular, em termos dos raios interno e externo r_i e r_e. A solução é obtida usando (11.139) para obter o centroide, e (11.138) para obter a tensão máxima, que ocorre em $r = r_i$:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{h}{\ln(r_e/r_i)} = \frac{60}{\ln(130/70)} = 96,9 \text{ mm}, \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_z(r_n - r)}{rA\,(r_c - r_n)} = \frac{10^6 \times (96,9 - 70)}{70 \times 240 \times (100 - 96,9)} = 41,7 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{11.153}$$

onde $A = bh = 40 \times 60 = 240$ mm^2.

(b) Viga curva de $r_c = 300$ mm. Os raios interno e externo são $r_i = r_n - h/2 = 270$ mm e $r_e = r_n + h/2 = 330$ mm. A solução é obtida da mesma forma do caso (a) em $r = r_i$:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{h}{\ln(r_e/r_i)} = \frac{60}{\ln(330/270)} = 299 \text{ mm}, \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_z(r_n - r)}{rA\,(r_c - r_n)} = \frac{10^6 \times (299 - 270)}{270 \times A\,(300 - 299)} = 44,663 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{11.154}$$

Podemos comparar as tensões obtidas pela formulação de vigas curvas, $\sigma_{\max}$, com as de vigas retas, σ_l, analisando a relação entre h/r_c e $\sigma_{\max}/\sigma$: (unidades em mm e MPa)

h	r_c	r_n	$\sigma_{\max}$	σ_l	h/r_c	$\sigma_{\max}/\sigma$
60	100	96,9	52,11	41,667	0,6	1,250
60	300	299	44,663	41,667	0,2	1,071

(11.155)

Essa tabela resume diversas tendências do comportamento das vigas curvas em relação às retas. Em geral, conforme a viga curva aumenta seu raio de curvatura, i.e., tende a ficar mais reta, todos os resultados tendem rapidamente àqueles de vigas retas. A distância entre a linha neutra e a linha centroidal vai se reduzindo, como pode ser visto comparando r_n e r_c. Essas relações também podem ser visualizadas nos gráficos da Figura 11.35 da variação da tensão normal ao longo da seção, para as vigas curvas dos casos (a) e (b), de raios de linha centroidais $r_c = 100$ mm e 300 mm. Nesses gráficos nota-se claramente que para a viga de raio maior, a distribuição se aproxima muito da solução linear, e os valores máximos e a posição da linha neutra quase se coincidem. Já na viga de raio menor, a solução se afasta mais da solução de viga reta, e se nota a distância entre a linha neutra e o centro da seção.

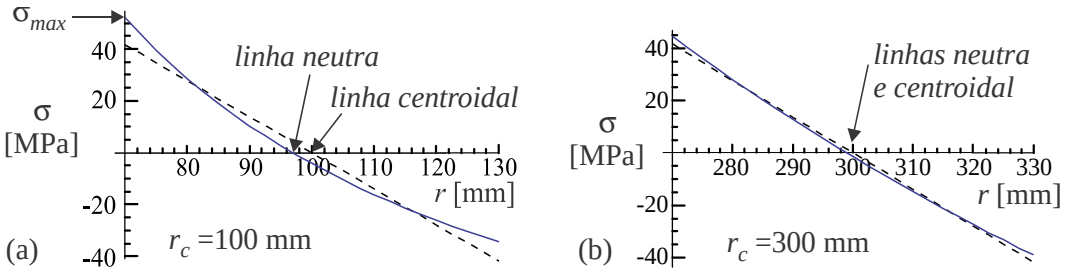


Figura 11.35: Gráficos de tensão normal versus r, para as vigas curvas dos casos (a) e (b), de raios de linha centroidais $r_c = 100$ mm e 300 mm.

A distribuição da tensão máxima tende rapidamente ao valor obtido na viga reta, como visto na relação $\sigma_{\max}/\sigma_l$. Essa tendência pode ser colocada mais claramente através de um gráfico $h/r_c \times \sigma_{\max}/\sigma$ obtido para toda uma faixa de alturas h, tomando um r_c fixo, como no gráfico da Figura 11.36, para a faixa h/r_c entre 0,0133 e 0,667. Para um dado raio fixo, por exemplo $r_c = 75$ mm, essa faixa corresponde a alturas de seção h entre 1 mm e 50 mm. O valor $\sigma_{\max}/\sigma$ indica o erro incorrido em usar a formulação de viga reta em uma viga curva. Do gráfico nota-se que esse erro não depende estritamente de h ou do raio r_c, mas apenas da relação entre eles, h/r_c. Então h/r_c indica se a viga é delgada ou espessa. Se ela for delgada, por exemplo com $h/r_c \lesssim 0,2$, o erro na tensão máxima pela fórmula de viga reta fica abaixo de 7 %, o que é bem tolerado em cálculos de engenharia rotineira. Por outro lado, se a viga é espessa, com $h/r_c \simeq 0,5$, o erro na tensão passa a ser em torno de 20 %.

Seções compostas

Quando se observa a eq. (11.131) para a determinação do raio de curvatura r_n da linha neutra, nota-se que ela pode ser facilmente adaptada para o cálculo de seções compostas, i.e., seções em

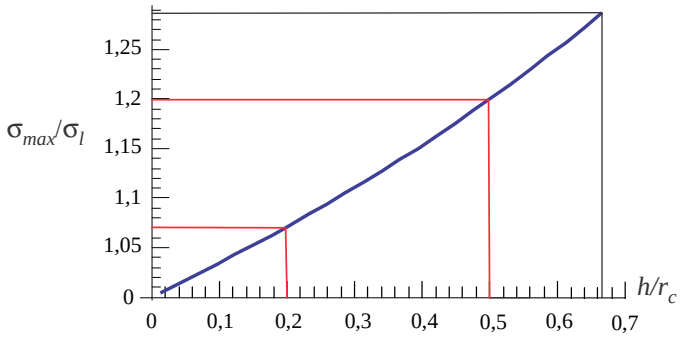


Figura 11.36: Gráfico $h/r_c \times \sigma_{\max}/\sigma$.

que a geometria pode ser decomposta em um número de partes simples (setores de circunferência, triângulos, retângulos,...), como por exemplo a seção trapezoidal da Figura 11.32c, que pode ser decomposta em dois triângulos e um retângulo central. Para isso, lembremos que r_n é dado por $r_n = A/S$, onde $S = \int_A (1/r)dA$. Como S é uma integral sobre a área, ela pode ser facilmente desmembrada em uma soma de integrais de cada uma das áreas:

$$S = \int_A \frac{1}{r} dA = \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} \frac{1}{r} dA \qquad \rightarrow \qquad \boxed{S = \sum_{j=1}^{n} S_j} \tag{11.156}$$

Exemplo 11.6 - Tensões em gancho, seção composta

A Figura 11.37a mostra um modelo de um gancho de elevação de carga típico, como o da foto na Figura 11.30. A seção transversal crítica é AB, e pode ser bem aproximada por uma área composta por um setor de circunferência A_1, um trapezio A_2 e uma semi-elípse A_3, como na Figura 11.37b.

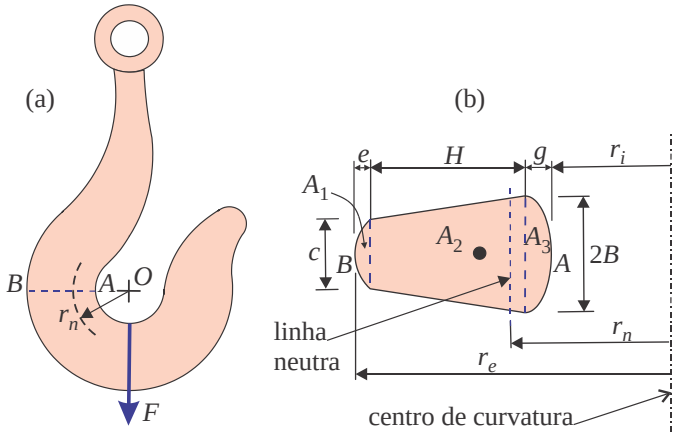


Figura 11.37: Parâmetros geométricos de um gancho.

O material é aço ductil com tensão de escoamento $\sigma_E = 350$ MPa. Determine a máxima carga $F_{\max}$ que pode ser aplicada para satisfazer um coeficiente de segurança $n = 1,7$ quanto ao início do escoamento. Considere nos cálculos apenas a região do gancho distante do olhal superior.

Use os valores: $c = 30$ mm, $2B = 90$ mm, $e = 6$ mm, $H = 90$ mm, $g = 20$ mm, $r_i = 65$ mm.

Solução:

A tensão máxima é obtida de (11.138). Então é necessário calcular r_n, r_c, A e o momento M_z na seção AB. Divide-se a seção em um setor de circunferência A_1, um trapezio A_2 e uma semi-elípse

A_3, como na Figura 11.37b. Para obter r_c usaremos a forma (11.156), calculando os termos de S_j em cada uma das áreas.

Área A_1 - setor de circunferência

Usamos as fórmulas de (11.148) do caso (a), supondo que $a > b$. Adaptamos a nomenclatura dos dados para aquela equação: $h_1 = e = 6$ mm, $c_1 = c = 30$ mm. Os parâmetros de raio b e ângulo α do setor são dados em (11.150):

$$d_1 = \frac{1}{8h_1}\left(c_1^2 - 4h_1^2\right) = 15,75 \text{ mm}, \quad b_1 = d_1 + h_1 = 21,75 \text{ mm}, \quad \cos\alpha = \frac{d_1}{b_1}$$

tal que $\alpha = 0,761$ rad. Então os parâmetros do setor são $a_1 = r_i + g + H - d_1 = 159,25$ mm e

$$A_1 = b_1^2\alpha - \frac{b_1^2}{2}\text{sen}2\alpha = 123,76 \text{ mm}^2, \quad r_{c1} = a_1 + \frac{4b_1\text{sen}^3\alpha}{3\left(2\alpha - \text{sen}2\alpha\right)} = 177,43 \text{ mm},$$

$$S_1 = 2a_1\alpha - 2b_1\text{sen}\alpha - \sqrt{a_1^2 - b_1^2}\left[\pi - 2\text{arcsen}\left(\frac{b_1 + a_1\cos\alpha}{a_1 + b_1\cos\alpha}\right)\right] = 0,69755 \text{ mm}. \tag{11.157}$$

> **Observação**: o número de dígitos significativos no cálculo de S deve ser maior que aquele desejado para a tensão. Isso se torna mais importante em vigas com r_c/h grandes. (11.158)

Área A_2 - trapezio

Usamos as fórmulas de (11.144) e (11.145). Adaptamos a nomenclatura dos dados para aquelas equações: $2b_2 = c = 30$ mm, $2B_2 = 2B = 90$ mm, $h_2 = H = 90$ mm. Os parâmetros da área são: raios interno e externo $r_{i2} = r_i + g = 85$ mm, $r_{e2} = r_i + g = 175$ mm, e

$$S_2 = 2\left[\frac{1}{h_2}\left(B_2r_{e2} - b_2r_{i2}\right)\ln\left(\frac{r_{e2}}{r_{i2}}\right) + b_2 - B_2\right] = 45,9131 \text{ mm}. \tag{11.159}$$

A área e a posição do centroide são:

$$\begin{aligned} A_2 &= (b_2 + B_2)h_2 = 5.400 \text{ mm}^2, \\ r_{c2} &= \frac{2}{A_2}\left\{(b_2h_2)\left(r_{i2} + \frac{h_2}{2}\right) + \left[(B_2 - b_2)\frac{h_2}{2}\right]\left(r_{i2} + \frac{h_2}{3}\right)\right\} = 122,5 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{11.160}$$

Área A_3 - semi-elípse

Usamos as fórmulas de (11.151). Adaptamos a nomenclatura dos dados para aquela equação: $b_3 = B = 45$ mm, $h_3 = g = 20$ mm. Os parâmetros da área são $a_3 = r_i + g = 85$ mm,

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\pi b_3h_3}{2} = 1.413,7 \text{ mm}^2, \quad r_{c3} = a_3 - \frac{4h_3}{3\pi} = 76,51 \text{ mm}, \\ S_3 &= 2b_3 + \frac{\pi b}{h}\left(a_3 - \sqrt{a_3^2 - h_3^2}\right) - \frac{2b_3}{h_3}\sqrt{a_3^2 - h_3^2}\text{arcsen}\left(\frac{h_3}{a_3}\right) = 18,5677 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{11.161}$$

Área completa da seção AB

O raio externo da seção é dado por $r_e = r_i + g + H + e = 181$ mm. Os parâmetros da seção são obtidos por (11.156) e (11.131):

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 = 65,1783 \text{ mm}, \\ A &= A_1 + A_2 + A_3 = 6.937,47 \text{ mm}^2, \\ r_n &= \frac{S}{A} = 106,438 \text{ mm}, \\ r_c &= \frac{1}{A}\left[A_1 r_{c1} + A_2 r_{c2} + A_3 r_{c3}\right] = 114,108 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{11.162}$$

Consideramos um cálculo preliminar com uma força aplicada no gancho igual a $F = 10$ kN. O esforço de momento fletor na seção AB é $M_z = Fr_c = 1,141 \cdot 10^6$ Nmm, e o esforço normal é $N = F = 10$ kN. As tensões mínima e máxima na seção AB ocorrem nos pontos B e A respectivamente e são dadas por (11.138) com $r = r_e$ e $r = r_i$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \frac{N}{A} + \frac{M_z(r_n - r_e)}{r_e A\,(r_c - r_n)} = -7,39 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M_z(r_n - r_i)}{r_i A\,(r_c - r_n)} = 15,11 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{11.163}$$

A tensão admissível é $\sigma_{adm} = \sigma_E/n = 205,9$ MPa. Como o problema é elástico linear, a força máxima admissível no gancho é dada por

$$F_{\max} = \frac{\sigma_{adm} F}{\sigma_{\max}} = 136.231 \text{ N}. \tag{11.164}$$

11.8 Exercícios

11.1 Mostre que as expressões da Lei de Hooke para EPD, (11.7), podem ser obtidas das equações de EPT, (11.6), aplicando as substituições (11.11).

11.2 Particularize as equações (11.31) para as tensões num cilindro apenas sob pressão externa P_o. Determine a localização e a expressão da máxima tensão cisalhante na parede.

11.3 Na identificação das tensões principais no tubo sob pressão interna, eq.(11.41), foi considerado que σ_z é tal que $\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta$. Prove as duas desigualdades.

11.4 Para um cilindro pressurizado de raio interno a, mostre que a tensão tangencial máxima é sempre maior que P, não importando o quão grande seja o raio externo b.

11.5 No problema de um furo circular numa placa infinita tracionada, Figura 11.11, explique porque a tensão radial no ponto $(x, y) = (a; 0)$, i.e., na borda do furo, deve ser nula.

11.6 Mostre que a forma aninhada no último termo de (11.14) para o operador diferencial $\bigtriangledown^2$ é igual à forma aberta.

Tubos elásticos de parede espessa

11.7 Dimensione uma tubulação de alta pressão, sob pressão interna $P = 2.000$ atm (200 MPa), raio interno $a = 150$ mm, $\sigma_E = 1.580$ MPa, $n = 3$.

11.8 Determine a variação do raio externo no tubo do Exercício 7, para $E = 200$ GPa e $v = 0,25$.

11.9 Repita o Exercício 8 para pressão $P = 100$ MPa.

11.10 Dimensione a máxima pressão interna admissível num tubo de raio interno $a = 150$ mm, raio externo $b = 220$ mm, com $\sigma_E = 400$ MPa e coeficiente de segurança $n = 1,6$ quanto ao início de escoamento.

11.11 Determine o raio externo b necessário para um tubo de aço carbono com 0,6 % de carbono, com $\sigma_E = 400$ MPa, raio interno $a = 150$ mm, coeficiente de segurança $n = 1,5$, sob pressão interna $P = 70$ MPa. Determine também sua espessura e

raio médio. Utilize o critério de Tresca. Resolva usando os modelos de tubo de parede espessa e o de parede delgada. Qual das duas soluções é adequada?

11.12 Repita o Exercício 11 para pressão $P = 100$ MPa.

11.13 Um tubo de aço tem raio interno $a = 150$ mm e externo $b = 220$ mm e $E = 200$ GPa e $v = 0,25$. Como forma de medir indiretamente a pressão interna aplicada, um extensômetro de resistência foi colado na superfície externa do tubo, em orientação circunferencial e, após a pressurização interna, foi medida uma deformação de 0,02 %. Determine a pressão aplicada.

11.14 Para a pressão aplicada no Exercício 13, determine as três tensões principais máximas, considerando o tubo fechado com calotas nas extremidades.

11.15 Um tubo de aço tem raio interno desconhecido e raio externo $b = 220$ mm. Ele é pressurizado com $P = 24,56$ MPa. Como forma de obter indiretamente o raio interno, um extensômetro de resistência foi colado na superfície externa do tubo, em orientação circunferencial e, após a pressurização interna, foi medida uma deformação de 0,02 %. Determine o raio interno. $E = 200$ GPa e $v = 0,25$.

Tubos elasto-plásticos de parede espessa

11.16 Um cilindro de parede espessa tem raios interno $a = 150$ mm e externo $a = 250$ mm. Determine a pressão de plastificação total da parede, usando a hipótese de material elasto-plástico ideal com $\sigma_E = 400$ MPa.

11.17 No Exemplo 16, determine as tensões nas superfícies interna e externa da parede na plastificação total.

11.18 Um cilindro de parede espessa tem raio interno $a = 150$ mm. Determine o raio externo necessário para que a pressão de plastificação total da parede seja $P_P = 153,2$ MPa, usando a hipótese de material elasto-plástico ideal com $\sigma_E = 400$ MPa.

11.19 Um cilindro fechado tem raios interno e externo de valores $a = 150$ mm e $b = 200$ mm, respectivamente. O material tem tensão de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa. Determine a pressão de início de escoamento na parede do cilindro e a pressão de plastificação total;

11.20 Para o cilindro do Exercício 19, determine a pressão que plastifica as seguintes profundidades em relação à espessura: $0,25h$, $0,5h$ e $0,75h$.

Torção em seção retangular maciça

11.21 Uma barra de seção retangular delgada tem dimensões $b \times h \times L = 30 \times 5 \times 400$ mm^3, e suporta um torque $T = 10$ kNmm. Determine a tensão cisalhante máxima e o ângulo de torção, usando a solução aproximada de barras delgadas de seção retangular. Determine a variação do ângulo de torção entre as duas extremidades da barra. $G = 80$ GPa.

11.22 Uma barra de seção retangular maciça tem dimensões $b \times h \times L = 30 \times 5 \times 400$ mm^3, e foi medido um ângulo de torção $\theta = 10^{-4}$ rad/mm devido a um momento torçor. Determine a tensão cisalhante máxima e o torque aplicado usando a solução em séries da teoria completa de seções retangulares. Teste usando 1, 2 e 3 termos nas séries.

11.23 Resolva o Exercício 22 para $b \times h \times L = 30 \times 15 \times 400$ mm^3.

11.24 Resolva o Exercício 22 com os dados $b \times h \times L = 30 \times 15 \times 400$ mm^3, usando a teoria aproximada de barras delgadas de seção retangular. Compare com a solução do Exercício 22.

Torção em perfis abertos delgados

11.25 Uma barra tem a seção transversal delgada em forma C como na Figura 11.24b, com ângulo interno $\alpha = 45°$, raio médio $R = 20$ mm e espessura $h = 3$ mm. Para um torque aplicado $T = 10$ kNmm, determine a tensão cisalhante máxima e o ângulo de torção,

usando a solução aproximada de barras delgadas de seção retangular. Determine a variação do ângulo de torção entre as duas extremidades da barra. $G = 80$ GPa se o comprimento da barra é $L = 400$ mm.

11.26 Resolva o Exercício 25 para a seção delgada em L mostrada na Figura 11.24c, com as abas $a = 10$ mm, $c = 21,42$ mm e espessura $h = 3$ mm.

11.27 Resolva o Exercício 25 para a seção delgada em C mostrada na Figura 11.24d, com as abas $a = 5$ mm, $c = 21,42$ mm e espessura $h = 3$ mm.

11.28 Resolva o Exercício 25 para a seção delgada em I mostrada na Figura 11.24e, com as abas $a = 5$ mm, $c = 21,42$ mm e espessura $h = 3$ mm. Qual a rigidez torcional da barra?

11.29 Resolva o Exercício 25 para a seção delgada em T mostrada na Figura 11.24e, com as abas $a = 10$ mm, $c = 21,42$ mm e espessura $h = 3$ mm. Qual a rigidez torcional da barra?

Torção em tubos de parede delgadas

11.30 Considere uma barra com a seção tubular retangular como na Figura 11.29a, com as dimensões médias da seção $a = 5,237$ mm, $b = 10,47$ mm e espessura $h = 3$ mm, submetida a um torque $T = 10$ kNmm. Determine a tensão cisalhante nominal máxima e o ângulo de torção. Use $G = 80$ GPa. Ignore a concentração de tensões nos cantos internos da seção. Qual o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra, se o comprimento do tubo for $L = 400$ mm.? Qual a rigidez torcional da barra? Como se compara a tensão e a rigidez em relação a uma barra de seção aberta delgada de mesma área?

11.31 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular triangular como na Figura 11.29b, com lados $a = 10,47$ mm e espessura $h = 3$ mm. Como se compara a tensão e a rigidez em relação ao tubo delgado retangular de mesma área do Exercício 30?

11.32 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular trapezoidal como na Figura 11.29c, com lados $a = c = 8,977$ mm, $b = a/2$ e espessura $h = 3$ mm. Como se compara a tensão e a rigidez em relação ao tubo delgado retangular de mesma área do Exercício 30?

11.33 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular hexagonal como na Figura 11.29d, com lados $b = c = 10,47$ mm e espessura $h = 1,5$ mm.

11.34 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular como na Figura 11.29e, com $a = 15,35$ mm, $R = 5,116$ mm e espessura $h = 1,5$ mm.

11.35 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular quadrada como na Figura 11.29a, com $a = b = 15,71$ mm e espessura $h = 1,5$ mm. Como se compara a tensão e a rigidez em relação ao tubo delgado retangular de mesma área do Exercício 30?

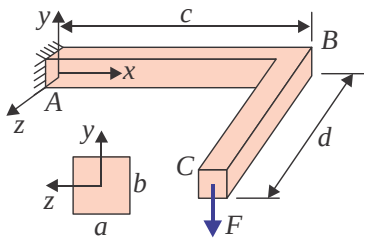
11.36 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular circular de raio médio $a = 10$ mm e espessura $h = 1,5$ mm.

11.37 Resolva o Exercício 30 para uma barra com a seção tubular circular de raio médio $a = 10$ mm e espessura $h = 1,5$ mm, porém usando a teoria de torção de barras de seção circular do Capítulo 7. Calcule a tensão máxima e a tensão na superfície média.

Carregamento combinado: flexão + torção

11.38 Considere o suporte em forma de L mostrada na figura, engastado na seção A e suportando uma força F na direção y. (a) Determine o ângulo de torção no trecho AB. (b) Estime o estado de tensões na seção A, na coordenada $(y, z) = (b/2, 0)$. A seção é retangular maciça de lados $a = b = 15$ mm, os comprimentos são $c = 100$ mm, $d = 80$ mm e $F = 1$ kN. O material é aço,

com $G = 80$ GPa.



11.39 Para os dados do Exercício 38, determine a tensão cisalhante máxima pelo critério de Tresca e o coeficiente de segurança. $\sigma_E = 350$ MPa.

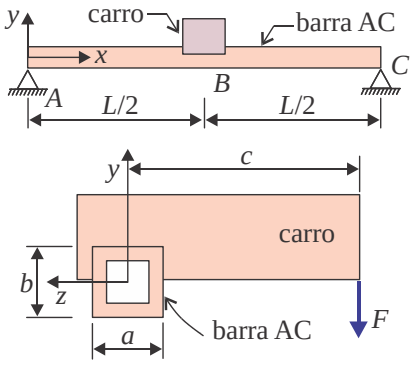
11.40 Para os dados dos Exercícios 38 e 39, determine a máxima força admissível para um coeficiente de segurança $n = 2, 3$.

11.41 Resolva o Exercício 38 para uma seção transversal tubular como na Figura 11.29a com dimensões médias da seção $a = b = 15$ mm e espessura $h = 2$ mm. Qual o ângulo de torção da seção B?

11.42 Para os dados do Exercício 41, determine a tensão cisalhante máxima pelo critério de Tresca e o coeficiente de segurança. $\sigma_E = 350$ MPa.

11.43 Para os dados dos Exercícios 41 e 42, determine a máxima força admissível para um coeficiente de segurança $n = 2, 3$.

11.44 Uma barra reta de seção retangular tubular é usada como uma guia sobre a qual um carro de um mecanismo pode se mover. A guia pode ser considerada biapoiada nas extremidades quanto a flexão, porém as extremidades impedem rotações torcionais. A guia tem seção transversal com lados com dimensões médias da parede iguais a $a = b = 10$ mm, espessura $h = 2$ mm e comprimento $L = 300$ mm. Uma força transversal $F = 200$ N é aplicada sobre o carro, na direção y, com uma excentricidade $c = 50$ mm a partir do centro da seção da guia. Para o carro na posição centrada sobre a guia, determine (a) o ângulo de torção da seção B. (b) Estime o estado de tensões na seção B, na coordenada $(y, z) = (b/2, 0)$. Note que do ponto de vista torcional, a guia é hiperestática, mas as reações torcionais nesse problema são idênticas nos dois apoios A e C. O material é alumínio, com $G = 28$ GPa.

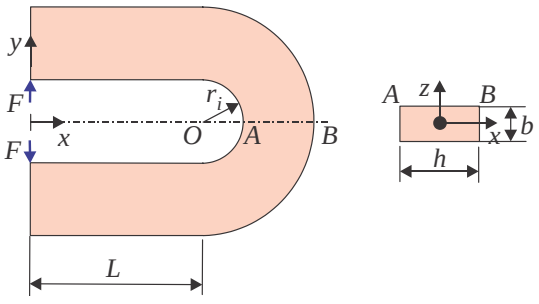


11.45 Para os dados do Exercício 44, determine a tensão cisalhante máxima pelo critério de Tresca e o coeficiente de segurança. $\sigma_E = 350$ MPa.

11.46 Para os dados dos Exercícios 44 e 42, determine a máxima força admissível para um coeficiente de segurança $n = 2, 3$.

Vigas curvas

11.47 Considere o componente mostrado na figura, de uma barra em U, de seção transversal uniforme retangular. Um par de forças F é aplicado nas extremidades. Determine a tensão mínima e a máxima na seção AB. Use os valores $F = 10$ kN, $r_c = 100$ mm, seção transversal com dimensões $b \times h = 40 \times 60$ mm^2, $L = 100$ mm, $r_i = 50$ mm. Dicas: Use o método das seções com um corte AB e obtenha o esforço normal e o de momento fletor na seção AB. Obtenha as tensões sobrepondo os efeitos de flexão e de esforço normal.



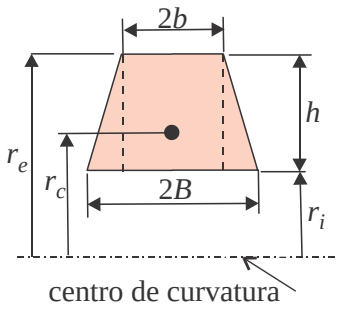
11.48 Refaça o Exercício 47 para transversal retangular com $b \times h = 30 \times 70$ mm^2.

11.49 Refaça o Exercício 47 para transversal trapezoidal com dimensões $2b = 30$ mm, $2B = 50$ mm, $h = 60$ mm em relação aos parâmetros mostrados na Figura 11.32c. O

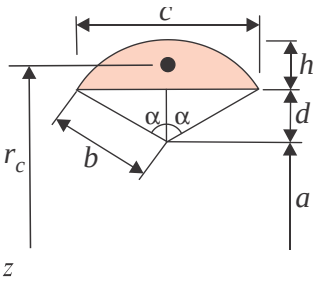
lado com comprimento B é aquele no ponto A da peça indicada na figura.

11.50 Refaça o Exercício 47 para transversal trapezoidal com dimensões $2b = 30$ mm, $2B = 55$ mm, $h = 55$ mm em relação aos parâmetros mostrados na Figura 11.32c. O lado com comprimento B é aquele no ponto A da peça indicada na figura.

11.51 Obtenha a expressão para o fator S da seção trapezoidal, usando o conceito de seção composta, decompondo a seção em um retângulo e dois triângulos, usando a eq.(11.156). Compare o resultado com a eq.(11.144).



11.52 Deduza as equações geométricas de setor de circunferência (11.150), entre b, α e c, h.



11.53 Considere o Exercício 47, em que a seção transversal seja **circular** com a mesma área e raio de curvatura mínimo r_i que a seção retangular usada ali. Se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

11.54 Considere o Exercício 48, em que a seção transversal seja **circular** com a mesma área e raio de curvatura mínimo r_i que a seção retangular usada ali. Se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

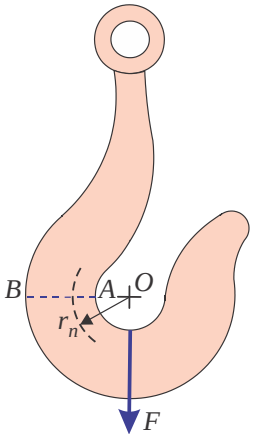
11.55 No Exercício 47, se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

11.56 No Exercício 48, se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

11.57 No Exercício 49, se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

11.58 No Exercício 50, se o material tiver tensão de início de escoamento $\sigma_E = 400$ MPa, qual a força admissível para um coeficiente de segurança quanto ao início do escoamento $n = 1,7$?

11.59 Refaça o Exemplo 11.6 do gancho, para uma **seção retangular** de mesma área e mesmos raios de curvatura interno e externo r_i e r_e.



11.60 Refaça o Exemplo 11.6 do gancho, para uma **seção circular** de mesma área e mesmo raio de curvatura interno r_i.

11.61 Refaça o Exemplo 11.6 do gancho, para uma **seção trapezoidal** com as dimensões da área 2 usada no Exemplo 6, situada na mesma posição em relação ao centro de curvatura O do Exemplo.

Capítulo 12

Deflexão de vigas

Por: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng.
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.

No Capítulo 8 mostramos como tratar um problema de flexão de viga sob o ponto de vista de tensões, isto é, foi visto como determinar o campo de tensões e usar seus valores para realizar o dimensionamento da seção, ou determinar o grau de segurança quanto ao limite de escoamento em materiais metálicos dúcteis.[1] O presente capítulo trata da determinação do campo de deslocamentos transversais em vigas sob flexão.

- Note que, numa classe importante de **estruturas mecânicas**, como o caso dos eixos rotativos em redutores de engrenagens, mecanismos, manipuladores robóticos, máquinas ferramentas, os valores de deslocamentos e ângulos de rotação máximos são de fato os fatores importantes no projeto, em lugar das tensões.

- **Estruturas de construção civil**, como prédios altos, pontes e viadutos são bastante susceptíveis às forças de vento e, em algumas regiões do mundo, às forças sísmicas. Mesmo considerando apenas o caso estático em prédios altos, caso não haja os devidos cuidados, as oscilações no topo podem ser tão amplas que serão intoleráveis à presença humana. De fato, este efeito pode causar uma sensação similar ao "enjoo" em navios em alto mar.

A Figura 12.1 mostra a foto de um eixo de redutor de velocidade, mostrando um rolamento montado na extremidade direita, e diversas engrenagens helicoidais. No detalhe aparecem também um rolamento radial de esferas e uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. Cada engrenagem se acopla a uma outra, que é montada num eixo distinto, formando um conjunto, que é uma caixa de redução de velocidade.

A Figura 12.2 mostra um eixo escalonado típico em redutores de velocidade (não correspondente aos eixos da Figura 12.1, mas apenas ilustrativo). Em cada escalonamento, um elemento é montado, quer seja uma polia, uma engrenagem ou um rolamento.

Um esboco simplificado dessa situação é visto na Figura 12.3, com um par de eixos que suportam um par de engrenagens. A interação entre as engrenagens resulta em forças aplicadas na superfície de contato entre os dentes das duas engrenagens. Essas forças se transmitem a ambos eixos, como as forças F_r e F_t, nas direções transversal e tangencial ao eixo. Engrenagens helicoidais como aquela ilustrada também desenvolvem forças axiais F_a. Essas três forças exercem **flexão, tração** e **torção no eixo** e geram campos de **deformação**, tensão e **deslocamentos**. A força tangencial F_t é aquela responsável por aplicar o torque concentrado m_x^t no eixo, e pelos esforços de momento fletor M_y^t . A força axial F_a gera um momento fletor m_z^t concentrado no eixo.

Por um lado, os mancais em geral, tanto de rolamento quanto hidrostáticos, não admitem ângulos de desalinhamento muito grandes, (com exceção dos rolamentos autocompensadores). De fato, os

[1] Autor: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis, SC. (48) 3721-9899, Lauro@grante.ufsc.br.

Figura 12.1: Foto de detalhe de redutor de velocidade, mostrando dois eixos com engrenagens helicoidais acopladas, e rolamento na extremidade direita de um dos eixo.

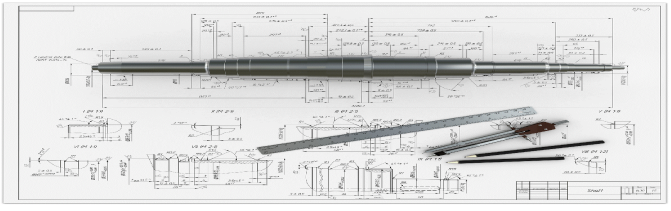


Figura 12.2: Foto de um eixo escalonado típico em redutores de velocidade.

valores máximos admissíveis $\theta_{\max}$ para rolamentos radiais comuns de esferas são da ordem de 2,5° a 3,5° (0,0436 rad a 0,0611 rad).

De forma geral, num mecanismo qualquer em funcionamento correto, o movimento previsto entre as partes exige tolerâncias de fabricação e montagem bastante apertados. Consequentemente, quando em presença das forças de operação, os deslocamentos sofridos devem ser também suficientemente pequenos.

Isso indica a importância da determinação do campo do deslocamento numa estrutura. De fato, em diversas classes de problemas o cálculo dos deslocamentos são fundamentais no processo de projeto, dentre os quais listamos os seguintes:

- **Estruturas de construção civil**. São cruciais, por exemplo, em torres e pontes de vãos longos, devido ao surgimento de oscilações provocadas pelo vento ou pelas cargas úteis móveis.

- **Máquinas ferramentas**. Nessas máquinas, que realizam operações usuais de fabricação por remoção de material, como torneamento, fresamento e outros, o aspecto fundamental é sua rigidez, i.e., o quão pequenos são os deslocamentos e deformações desenvolvidos em suas partes pela ação das forças de corte. Deformações excessivas implicam baixa qualidade de superfície usinada e alto desgaste da ferramenta de corte. Nesse tipo de estrutura, o nível de tensões é tão baixo que não necessita, em geral, sequer ser calculado. As dimensões são determinadas de forma a garantir alta rigidez. Isso é o que explica a forma tão comum dessas máquinas,

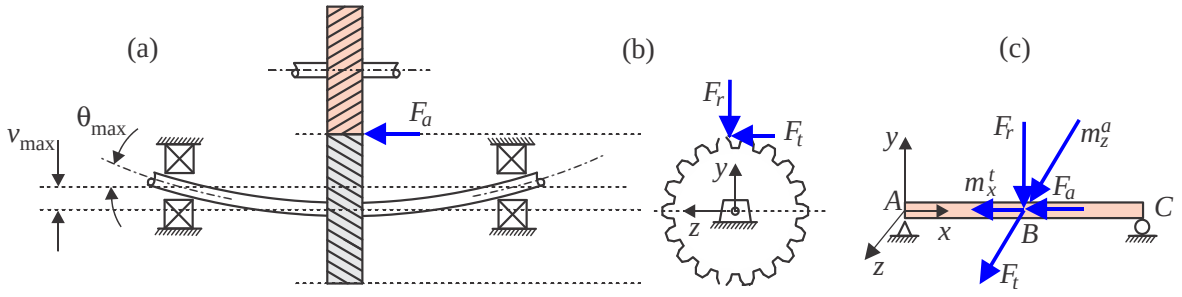


Figura 12.3: Visualização (escala ampliada) de deslocamento e rotação máxima num eixo sob flexão. (a) Ilustração de eixo com dois mancais e uma engrenagem de dentes helicoidais acoplada a outra engrenagem; (b) forças radial e tangencial na engrenagem B; (c) forças e momentos aplicados no eixo AC na seção B.

com seu aspecto massivo e volumoso.

- **Problemas dinâmicos**. Tanto em sistemas mecânicos quanto estruturas civis, os fenômenos dinâmicos em geral, e particularmente as vibrações, se caracterizam por movimentos oscilantes de amplitude e frequência constante ou variável. É visível que a grandeza fundamental envolvida é o deslocamento, que é dependente da inércia e da rigidez do sistema. O campo de tensões nesse caso pode não ser diretamente importante.

- **Problemas hiperestáticos**. O leitor pode lembrar que, trabalhando apenas com forças, no Capítulo 8, tínhamos sido capazes de lidar apenas com vigas isostáticas. Ocorre que problemas reais de engenharia raramente são isostáticos. Como será visto no presente capítulo, um dos benefícios de se poder determinar os deslocamentos em vigas (e qualquer outra estrutura) é o de permitir resolver problemas hiperestáticos. Assim, existem situações em temos pouco interesse em obter os deslocamentos, e o único interesse consiste em determinar as reações ou as tensões. Caso esse problema seja hiperestático, somos obrigados a determinar também as deflexões, ou usar algum método baseado nelas, de forma a chegar ao que nos interessa.

- Problemas de **estabilidade estrutural**. A instabilidade é um fenômeno diretamente ligado ao campo cinemático, que faz com que um componente ou estrutura subitamente mude sua configuração original para uma outra de forma de geometria bastante distinta, que se caracteriza por ter capacidade de suportar carga muito inferior àquela que a estrutura original. Então, geralmente o desencadeamento de um processo de instabilidade caracteriza a falha do componente. Esse tipo de falha ocorre principalmente em estruturas com partes delgados, como colunas em prédios e pontes, barras em mecanismos e placas e cascas, desde que esses componentes possuam regiões com **altos valores de uma ou duas tensões principais compressivas** no plano delgado. Alguns detalhes de cálculo de cargas limites de **flambagem** (instabilidade em barras retas) são mostrados no Capítulo 13.

A teoria aqui apresentada é a denominada **teoria de vigas longas**, ou **teoria de Euler-Bernoulli**, i.e., a mesma usada no Capítulo 8. Isto significa que consideramos apenas a parcela de deslocamento associada ao momento fletor, ignorando-se a parcela proveniente do esforço cortante na seção. Simultaneamente, como em todo o texto até aqui, estamos restritos a **problemas lineares**, i.e., a relação tensão-deformação é linear e os deslocamentos, deformações e rotações são suficientemente pequenos. Em particular, via de regra, **a deflexão máxima na viga deve ser menor que cerca de cinco por cento do comprimento do vão, e também deve ser inferior à espessura da viga** para que os resultados da teoria tenham erros toleráveis. Em resumo, as restrições da teoria são:

Material elástico linear:	$\sigma_{EQ} \leq \sigma_E$,
Deformações pequenas:	$\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z \lesssim 0,02$,
	$\gamma_{xy},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{yz} \lesssim 0,087$ rad $(5°)$,
Deslocamento máximo:	$v_{\max} \lesssim L/20$ e $v_{\max} \lesssim H/2$,
Rotação máxima:	$\theta_{\max} \lesssim 5°$.

(12.1)

Isso significa que, após a realização dos cálculos de qualquer problema que use essa teoria, os valores obtidos devem ser comparados aos limites acima para serem validados. Se violarem algum dos critérios, os resultados devem ser usados com cautela. Ainda podem ser úteis, porém deve-se ter claro que incorrem em erros superiores àqueles obtidos por resultados que satisfazem esses limites.

12.1 Equação diferencial de linha elástica

Considere uma viga genérica como aquela ilustrada na Figura 12.4a, submetida a um carregamento arbitrário. Esse carregamento, junto à disposição e tipos dos apoios, resultam numa distribuição de esforços de momento fletor, que pode ser representado por uma função $M_z = M_z(x)$. Note que apenas no caso isostático essa função pode ser determinada *a priori*, mas sabe-se que ela existe em qualquer caso.

Observação: A presente dedução visa identificar a equação diferencial que rege a configuração deformada da viga. Então, buscamos o que ocorre numa vizinhança de comprimento diferencial em torno de uma coordenada arbitrária x ao longo da linha neutra. A equação diferencial que obteremos será válida em qualquer ponto x da viga, independentemente dos tipos de apoios que a viga em sua configuração geral apresente. Dessa forma, os apoios mostrados na Figura 12.4a são apenas ilustrativos, e não representam qualquer restrição sobre a formulação mostrada. As informações sobre os tipos de apoio são incorporados como condições de contorno numa etapa secundária do processo de solução, para caracterizar e distinguir cada problema.

Na Figura 12.4d temos um segmento da viga em sua condição indeformada, com comprimento Δx, definido por dois planos cujos segmentos normais ao eixo x são $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$. Esses segmentos são tomados perpendiculares à superfície de referência. Essa superfície, por sua vez, deve estar posicionada sobre os eixos centroidais principais $x - z$.

Por causa da ação do momento fletor, o segmento sofre deformação de flexão. Conforme as hipóteses da **teoria de Euler-Bernoulli**, os segmentos normais $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$ na configuração indeformada, na Figura 12.4d, se deslocam para as posições $\overline{ag}$ e $\overline{bh}$, (Figura 12.4c) mantendo-se retos, inextensíveis e, além disso, mantendo-se perpendiculares à superfície de referência flexionada.

O segmento $\overline{CD}$ sobre a superfície neutra não sofre extensão, apenas flexão, transformando-se num arco de comprimento Δs, i.e., $\Delta s \simeq \Delta x$. Localmente, a curva deformada $\overline{cd}$ pode ser aproximada por um segmento de círculo de raio ρ, o chamado **raio de curvatura**. Esse segmento descreve um ângulo $\Delta\theta$, como ilustrado na Figura 12.4c. Assim, o arco Δs na linha neutra é dado por

$$\Delta s = \rho \Delta\theta. \tag{12.2}$$

Por outro lado, consideremos um segmento genérico $\overline{EF}$, localizado a uma cota $-y$ da superfície de referência. Esse segmento se extensiona para um comprimento $\overline{ef}$. A variação de comprimento na cota $-y$ é Δu, dado por $\Delta u = \overline{ef} - \overline{EF}$, i.e., Δu é a variação de deslocamento axial, tal que $\Delta u = u_{_F} - u_{_E}$. De trigonometria temos que

$$\Delta u = -y\Delta\theta.$$

Note que esse segmento $\overline{EF}$ sofre um único tipo de deformação, que é ε_x. As demais componentes, ε_y, ε_z, γ_{xy}, etc, são nulas. Da definição de deformação,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = -y \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = -y\frac{d\theta}{dx}. \tag{12.3}$$

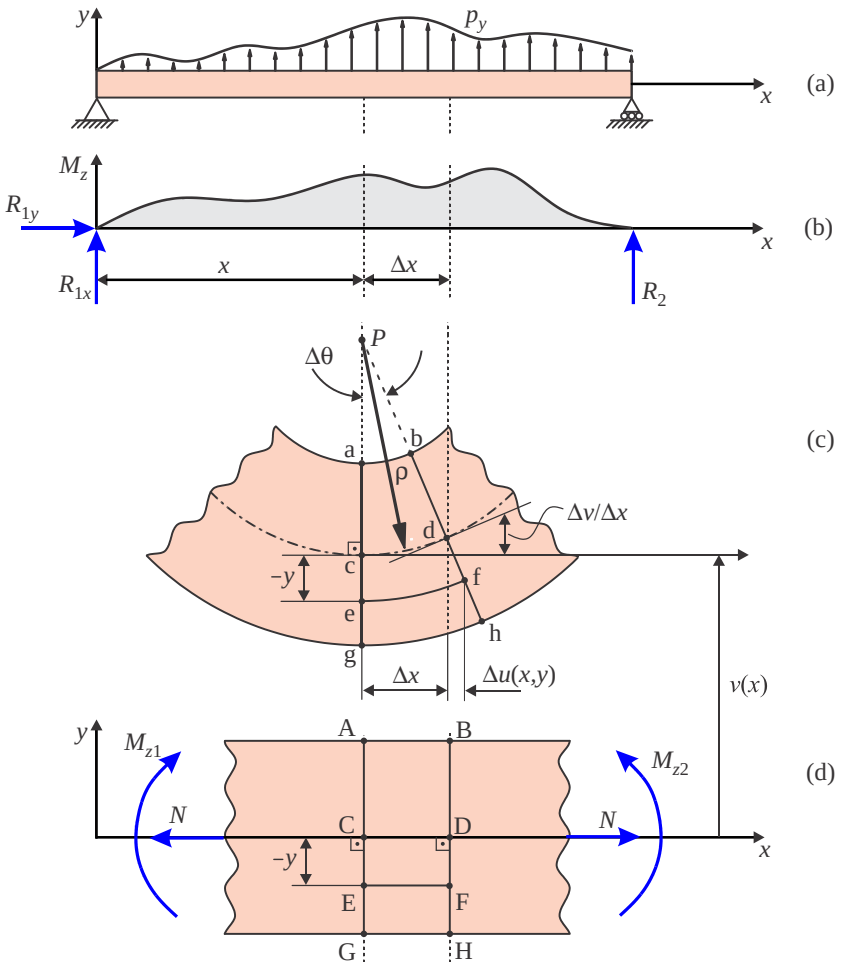


Figura 12.4: Elementos da teoria de flexão de vigas longas. Segmentos Δx de viga indeformada e deformada.

Vale a pena interpretar fisicamente o significado de $d\theta/dx$. Pela definição de derivada e usando (12.2),

$$\frac{d\theta}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\theta}{\rho \Delta\theta} = \frac{1}{\rho}. \tag{12.4}$$

Porém, da teoria de geometria diferencial, sabe-se que $1/\rho$ é a chamada **curvatura** κ de uma curva no plano, i.e.,

$$\kappa \equiv \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}. \tag{12.5}$$

Então a deformação em (12.3) fica

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}, \quad \text{i.e.,} \quad \varepsilon_x = -\kappa\, y. \tag{12.6}$$

Note que até o momento usamos apenas cinemática e trigonometria. Nada foi usado de **forças, carregamento, tensões ou propriedades do material.** Essas grandezas são consideradas através de

$$\begin{aligned} &\text{Lei de Hooke} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \\ &\text{Fórmula de flexão} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Substituindo uma expressão na outra temos

$$\varepsilon_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{EI_z}y, \tag{12.8}$$

e igualando a (12.6), temos expressões para a curvatura e para a deformação:

$$\varepsilon_x = -\kappa y = -\frac{M_z y}{EI_z} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\kappa = \frac{M_z}{EI_z} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_x = -\kappa y}. \tag{12.9}$$

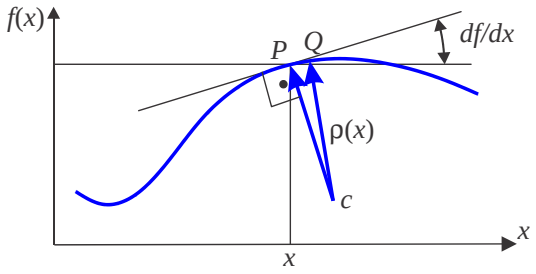


Figura 12.5: Curva plana arbitrária C e raio de curvatura num ponto x.

Em paralelo, consideremos uma curva plana arbitrária, dada por uma função diferenciável $f(x)$ como na Figura 12.5. Num ponto qualquer da curva, definido por x, podem-se definir dois segmentos perpendiculares à curva, uma passando pelo ponto P e outro por Q definido a uma distância infinitesimal de P. Essas retas se interceptarão num ponto c, exceto no caso em que a curva seja, de fato, uma reta. A distância $\rho = \overline{cP}$ é o **raio de curvatura da curva no ponto** P. Da teoria de geometria diferencial, sabe-se que a **curvatura** é dada por

$$\boxed{\kappa = \frac{f''}{[1+(f')^2]^{3/2}}} \tag{12.10}$$

onde $f'' = d^2f/dx^2$ e $f' = df/dx$. Quando buscamos adaptar essa fórmula ao problema de flexão, em que a curva é a linha neutra deformada pela flexão, devemos lembrar que temos as limitações impostas pela teoria de que os deslocamentos e rotações devem ser pequenos. **Rotação significa o ângulo de rotação sofrido pela tangente à linha elástica**, i.e., $\Delta v/\Delta x$ na Figura 12.4d. Designaremos esse ângulo por θ, i.e.,

$$\theta = \frac{dv}{dx}. \tag{12.11}$$

Observe o que ocorre no ponto de uma curva onde θ seja pequeno, por exemplo $\theta = 0,0532$ rad (o que corresponde aproximadamente a $\theta = 3°$). Nesse caso, $\theta^2 = 0,00274$, e o denominador em (12.10) fica $(1+\theta^2)^{3/2} = 1,00412$, i.e., bastante próximo de 1. De fato, quanto menor a rotação melhor o denominador se aproximará da unidade. Assim, para a teoria de viga sendo desenvolvida, a curvatura em (12.9) pode ser tomada, **aproximadamente**, como

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{12.12}$$

Levando essa equação a (12.9) temos a deformação e a tensão relacionadas ao deslocamento transversal, dados por

$$\varepsilon_x = -y\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{e} \qquad \sigma_x = -Ey\frac{d^2v}{dx^2} \tag{12.13}$$

Eliminando σ_x com o uso de $(12.7)_2$ temos uma relação entre o esforço de momento na seção e

deslocamento:

$$\boxed{EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_z} \tag{12.14}$$

Essa é a chamada **equação diferencial da linha elástica**. Note que tanto o momento quanto I_z podem ser dependentes de x.

Em seguida, tomemos as **equações diferenciais de equilíbrio** da viga em termos dos esforços e carga distribuída:

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y \qquad \text{e} \qquad \frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \tag{12.15}$$

onde V_y e p_y são o esforço cisalhante e a carga distribuída aplicada (o sentido positivo de p_y é na direção $+y$). Se diferenciamos (12.14) uma vez e substituirmos em $(12.15)_1$, e em seguida diferenciemos de novo e substituímos em $(12.15)_2$, temos as seguintes relações entre os esforços e o carregamento distribuído na seção com o deslocamento:

$$\begin{aligned} -V_y(x) &= \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \frac{d(EI)}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + EI\frac{d^3v}{dx^3}, \\ p_y(x) &= -\frac{dV_y}{dx} = \frac{d^2(EI)}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{d(EI)}{dx}\frac{d^3v}{dx^3} + EI\frac{d^4v}{dx^4}. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Para o **caso de seção uniforme** ($I = cte$), as expressões (12.14) e (12.16) simplificam-se por

$$\boxed{EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z, \qquad EI\frac{d^3v}{dx^3} = -V_y, \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = p_y} \tag{12.17}$$

12.1.1 Dedução curta da equação diferencial da curva elástica

Na seção anterior apresentamos a dedução completa da equação diferencial da curva elástica da viga, eq.(12.14), através do uso dos conceitos de curvatura e de raio de curvatura. De fato, é possível chegar ao mesmo resultado apenas usando as **hipóteses de vigas delgadas** (também chamadas vigas longas), e as equações cinemáticas de mecânica dos sólidos. Consideremos a Figura 12.4. Devido às hipóteses, o segmento $\overline{bh}$ é reto e perpendicular à superfície neutra deformada $\overline{nn}$. Então $u(x, y) = \theta(x)y$, onde $\theta(x)$ é a rotação sofrida pela seção. Como a seção permanece perpendicular à superfície de referência, $\theta(x) = -dv/dx$. Então,

$$u(x, y) = -y\frac{dv}{dx}. \tag{12.18}$$

Pela hipótese de que o coeficiente de Poisson é nulo (ver página 279), tem-se que $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto, o que implica $w = 0$. A inextensibilidade da normal implica $v = v(x)$, i.e., v não depende de y e z. A hipótese de que as seções permanecem planas implica que $u = u(x, y)$, como em (4.43), independente de z.

Assim, podem-se tomar as **relações deformação-deslocamento lineares**, eq.(4.12), na página 97, e realizar as simplificações para a teoria de vigas de Euler-Bernoulli:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} &&\rightarrow && \boxed{\varepsilon_x = -y\frac{d^2v}{dx^2}} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} &&\rightarrow && \varepsilon_y = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} &&\rightarrow && \varepsilon_z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \gamma_{xy} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \gamma_{xz} = 0, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \gamma_{yz} = 0.
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Em seguida consideramos a lei de Hooke 3D, vista na eq.(4.63), página 120. Como apenas $\varepsilon_x \neq 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\
\sigma_x &= E\varepsilon_x \qquad \text{e} \qquad \sigma_x = -Ey\frac{d^2v}{dx^2},
\end{aligned} \tag{12.20}$$

i.e., as hipóteses levam a um **estado uniaxial de tensão na flexão de vigas**. Igualando essa equação à **fórmula de flexão** $\sigma_x = -M_z y / I_z$, e levando o resultado às equações diferenciais de equilíbrio de esforços, eqs.(12.15), obtém-se as mesmas equações de equilíbrio em termos do deslocamento v, eqs.(12.17), que tinham sido obtidas na seção anterior.

12.2 Integração de curva elástica e condições de contorno

Observando as equações diferenciais (12.17) notamos que, devido às hipóteses de Euler-Bernoulli de vigas longas, todo o problema é definido por apenas uma única função, a função de deslocamento transversal v. Duas formas gerais existem para a determinação de v: uma através do uso de $(12.17)_1$ e outra por $(12.17)_3$, se isso se dá conforme o tipo de problema em vista, como descrito a seguir.

1. **Problema Isostático**. Caso o problema seja isostático, através de equilíbrio de forças externas se pode determinar as reações nos apoios e em seguida determinar o diagrama de esforços de momento fletor, i.e., a função $M_z(x)$. Com essa função, $(12.17)_1$ pode ser integrada duas vezes, tal que para o caso $I_z = const.$,

$$EI_z v(x) = \iint M_z(x)dx + C_1 x + C_2. \tag{12.21}$$

   As constantes de integração C_1 e C_2 devem ser determinadas de forma a atender às condições de contorno do problema, conforme será exemplificado na próxima seção.

2. **Problema Hiperestático.** Num problema desse tipo obviamente as reações não podem ser obtidas pelas equações globais de equilíbrio. Nesse caso a única opção é usar a eq. $(12.17)_3$, uma vez que a equação da carga distribuída $p_y(x)$ é sempre conhecida. Assim, a integração dessa equação resulta em

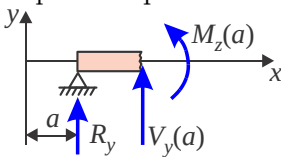
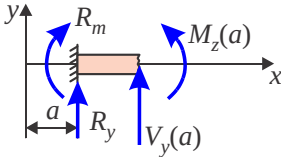
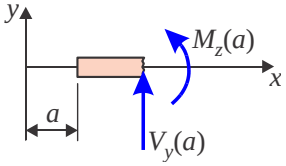
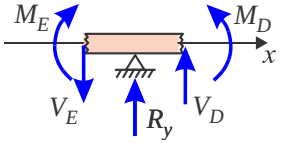
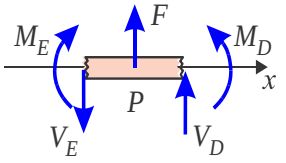
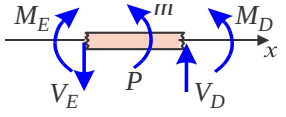
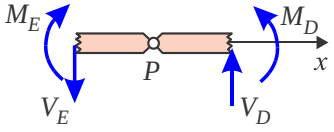
$$EIv = -\iint\iint p_y \; dx + \frac{D_1 x^3}{6} + \frac{D_2 x^2}{2} + D_3 x + D_4. \tag{12.22}$$

   Obviamente essa fórmula pode ser usada também em problemas isostáticos, desde que se pague o preço da determinação de quatro constantes em lugar de apenas duas.

Em qualquer caso, a determinação das constantes é feita de conforme as condições de contorno do problema. A Tabela 12.1 ilustra alguns casos de contorno usuais, que são aplicados nos exemplos seguintes e nos exercícios.

A quantidade e tipos de condições de contorno num problema diferencial são determinadas pelas características da equação diferencial. Por exemplo, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem requer apenas uma condição de contorno, enquanto uma equação de segunda ordem, como a de viga, eq. $(12.17)_1$, requer duas condições de contorno, e a de quarta ordem, $(12.17)_3$, requer quatro condições. Isso gera algumas regras gerais para problemas de mecânica dos sólidos em geral, as quais resumiremos abaixo para o caso de problemas de vigas.

Tabela 12.1: Tipos de condição de contorno e de compatibilidade. Os índices "E"e "D"referem-se às seções diretamente a esquerda e a direita da seção x=a.

	Valores prescritos	Incógnitas
(a) Apoio simples numa extremidade 	$v(a) = 0$ $M_z(a) = 0$	$V_y(a) = -R_y$ $\theta(a) = ?$
(b) Engaste 	$v(a) = 0$ $\theta(a) = 0$	$V_y(a) = -R_y$ $M_z(a) = R_m$
(c) Extremidade livre 	$M_z(a) = 0$ $V_y(a) = 0$	$\theta(a) = ?$ $v(a) = ?$
(d) Apoio intermediário 	$v_E = v_D = 0$ $\theta_E = \theta_D$ $M_E = M_D$	$V_E = V_D + R_y$
(e) Força concentrada 	$v_E = v_D$ $\theta_E = \theta_D$	$V_E = V_D + F$ $M_E = M_D$
(f) Momento concentrado 	$v_E = v_D$ $\theta_E = \theta_D$	$V_E = V_D$ $M_E = M_D + m$
(g) Rótula interna 	$v_E = v_D$ $M_E = M_D = 0$	$V_E = V_D$

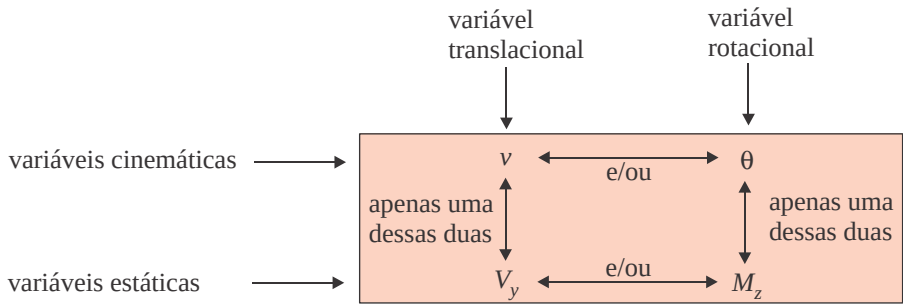


Figura 12.6: Identificação das variáveis cinemáticas e estáticas para condições de contorno em vigas.

Como regra, um problema de mecânica dos sólidos não pode ser resolvido se houver algum ponto do contorno do corpo em que não se conheça nenhuma informação a priori.

As variáveis que se pode e/ou se deve conhecer num ponto do contorno são diagramadas na Figura 12.6. Existem dois grupos de variáveis, as cinemáticas (v e θ) e as estáticas (V_y e M_z). Essas variáveis são conjugados termodinâmicos uma das outras, i.e., v é conjugado de V_y e θ de M_z. Outra forma de organizar as variáveis é em comportamento translacional (v e V_y) e rotacional (θ e M_z).

As características da equação diferencial da curva elástica é que numa dada seção se pode impor os valores de apenas uma das duas variáveis conjugadas, i.e., só podemos impor v ou V_y, mas não ambos numa seção. Da mesma forma, só se pode impor θ ou M_z.

Quanto às variáveis translacionais, é possível impor apenas uma ou ambas numa seção. Por exemplo, se pode impor v e θ, ou V_y e M_z.

Uma equação diferencial, por natureza, pressupões que a função envolvida seja derivável, o que significa que a função deve ser, a princípio, contínua, com derivadas contínuas em todos os pontos do intervalo de validade da equação diferencial. No caso das equações diferenciais de viga, $EId^2v/dx^2 = M_z$ ou $EId^4v/dx^4 = p_y$, não podem ser aplicadas em seções em que alguma das grandezas envolvidas (p_y, M_z, V_y, E ou I) seja descontínua. Isso significa que, em qualquer seção que um dos esforços, carregamento, propriedade de material ou seção transversal sofra uma mudança brusca, o equilíbrio não pode ser descrito pelas equações diferenciais. Essas seções são denominadas **seções com descontinuidades**. Uma das causas mais comuns de descontinuidades ocorre pela presença de **forças concentradas**, tanto conhecidas quanto devidas a **reações nos apoios**. Cada apoio implica numa reação concentrada, o que implica em descontinuidade em uma ou mais funções do problema.

A forma de resolver um problema que contém descontinuidades consiste em **aplicar a equação diferencial apenas em trechos** da viga em que todos os campos sejam contínuos. Então se tem um problema diferencial distinto para cada trecho da viga, com suas próprias constantes de integração, o que significa que cada trecho exige o conhecimento de condições em suas extremidades. Essas condições, via de regra, não são conhecidas, pois dependem a solução nos intervalos vizinhos.

Consideremos o caso simples em que um **apoio ocorre numa extremidade da viga, como no caso (a) da Tabela 12.1**. Nesse caso, é possível identificar as condições de contorno para uma seção infinitesimalmente próxima ao apoio. Note que nada se pode afirmar sobre a própria seção do apoio, que é um ponto de singularidade devido ao carregamento concentrado, a reação. A figura apresenta o método das seções, através de um corte na seção infinitesimalmente a direita do apoio, onde os esforços são M_z e V_y, e os possíveis deslocamentos são v e θ. Pelas características físicas do tipo de apoio, sabe-se que $v = 0$, o que significa que não se pode impor V_y, mesmo que este fosse de alguma forma conhecido a priori. Também o tipo de apoio indica que, fisicamente, $M_z = 0$, pois é uma rótula, o que significa que seu conjugado termodinâmico, θ, é parte das incógnitas do problema não pode ser imposto como condição de contorno junto a $M_z = 0$.

O trecho da viga que contém o apoio simples do caso (a) numa extremidade, comentado acima, termina numa seção que possui alguma descontinuidade, que pode ser uma força concentrada, uma

mudança brusca de seção transversal ou de valor de carga distribuída, ou um apoio.

Consideremos um outro caso, em que uma **força concentrada** é aplicada numa seção interna da viga, como no **caso (e)** da Tabela 12.1. Nesses tipos de apoio, não se conhece valores de deslocamento nas seções à esquerda ou à direita da força. Entretanto, sabe-se que os deslocamentos devem ser idênticos em ambos os lados. Não se conhece o valor, porém se pode incorporar uma igualdade ao problema, i.e., $v_E = v_D$. O mesmo se aplica à rotação das seções a esquerda e direita da força, que são incógnitas, porém devem ser idênticas, $\theta_E = \theta_D$. Uma vez que se tem relações para ambas as variáveis cinemáticas, não se pode pretender conhecer nenhuma das variáveis estáticas, mas apenas relações entre seus valores a esquerda e direita. Essas relações podem ser obtidas pelo método das seções, representando o equilíbrio na região isolada em torno da força, como na figura da Tabela 12.1e. Com isso se obtém as relações $V_E = V_D + F$ e $M_E = M_D$. Isso reflete o fato que, na ausência de momento concentrado numa seção, os esforços de momento são contínuos, e a presença de F gera uma descontinuidade no cortante no mesmo valor.

Alguns comentários sobre o caso "g" da Tabela 12.1, de uma **rótula interna à viga**. Os deslocamentos são idênticos a esquerda e direita da rótula, $v_E = v_D$. Fisicamente, a rótula não pode transmitir momentos, de forma que $M_E = 0$ e $M_D = 0$. Note que precisamos impor valores de cada lado da rótula. Uma vez que não conhecemos os valores de deslocamento, apenas a relação entre eles, $v_E = v_D$, é necessário que se conheça uma relação entre as variáveis correspondentes, os cortantes. O equilíbrio no segmento mostrado na tabela mostram que $V_E = V_D$.

12.2.1 Exemplo 12.1 – Viga biapoiada sob carga distribuída

Determinar a equação da curva elástica de viga biapoiada sob carga distribuída mostrada na Figura 12.7, e obter o deslocamento máximo. A carga q por unidade de comprimento é uniforme.

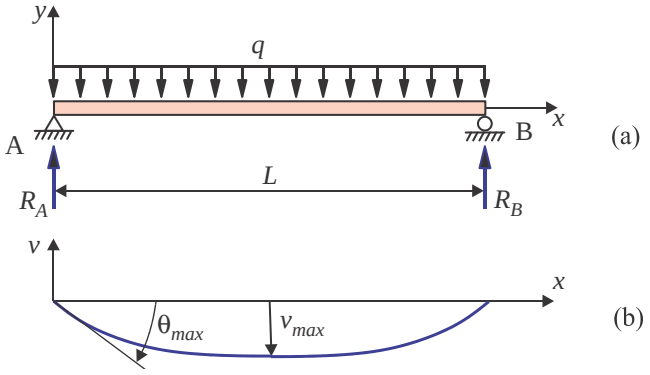


Figura 12.7: (a) Viga biapoiada do Exemplo 12.1; (b) curva elástica.

Solução:

Claramente este é um problema bastante conhecido, porém seguiremos os passos necessários para a solução de um problema arbitrário.

Etapa 1 - Deve-se identificar as **reações** não nulas, que no caso são indicadas na figura como R_A e R_B. Em seguida deve-se contar o número de reações, duas no caso, e comparar com o número de equações de equilíbrio não triviais, no caso também duas. Então, esse problema é classificado como **isostático**. Podemos assim utilizar a equação $(12.17)_1$ para determinar a curva elástica. Isso significa que devemos previamente determinar as reações e em seguida a equação dos **esforços**, que no presente caso é

$$M_z(x) = \frac{qx}{2}(L - x). \tag{12.23}$$

Basta então substituir em $(12.17)_1$ e integrar:

$$\begin{aligned} EI_z v'' &= M_z(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}, \\ EI_z v' &= \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1, \\ EI_z v &= \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{12.24}$$

Etapa 2 - Identificar condições de contorno adequadas. Da Tabela 12.1, item (a), temos duas condições para cada apoio, i.e.,

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad M_z(0) = 0, \qquad M_z(L) = 0. \tag{12.25}$$

São quatro condições, embora necessitemos de apenas duas, pois (12.24) possui apenas duas constantes de integração. Observamos, entretanto, que as condições de momento $M(0) = 0$ e $M_z(L) = 0$ já foram utilizadas, uma vez que a equação para o momento, (12.23), já incorpora essas condições nos extremos $x = 0$ e $x = L$. Assim temos as duas condições restantes para usar. Com isso obtemos duas equações algébricas em termos das duas incógnitas, C_1 e C_2, a partir de $(12.24)_3$

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \quad \rightarrow \quad EIv(0) = \frac{qL}{12} \times 0 - \frac{q}{24} \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 = 0, \\ v(L) &= 0 \quad \rightarrow \quad EIv(L) = \frac{qL^4}{12} - \frac{qL^4}{24} + C_1 L + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Etapa 3 - Identificar o **sistema** em forma **matricial KU = F**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{qL^4}{24} \end{Bmatrix}. \tag{12.26}$$

Etapa 4 - Obter a **solução do sistema**: $C_1 = -qL^3/24$ e $C_2 = 0$. Então, de (12.24),

$$EI_z\theta = \frac{q}{24}\left[6Lx^2 - 4x^3 - L^3\right] \qquad \text{e} \qquad EI_z v = \frac{q}{24}\left[2Lx^3 - x^4 - L^3 x\right], \tag{12.27}$$

onde θ é o ângulo de rotação da seção, i.e., $\theta = dv/dx$. A curva elástica é ilustrada na Figura 12.7b.
Etapa 5 - Obter os máximos. Em projeto de estruturas, frequentemente é importante conhecer a deflexão e a rotação máxima. O procedimento é o mesmo utilizado em cálculo para obter o máximo de uma função. Primeiro deve-se determinar a seção $\bar{x}$ onde o máximo (ou mínimo) ocorre. Isto é obtido tomando a primeira derivada. Assim, o máximo de v ocorre onde

$$\frac{dv}{dx}(\bar{x}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 6L\bar{x}^2 - 4\bar{x}^3 - L^3 = 0$$

Este é um polinômio cúbico e, portanto, tem três raízes. A única raiz no intervalo $x \in [0; L]$ é $\bar{x} = L/2$. Então,

$$v_{\max} = v(\bar{x}) \qquad \Rightarrow \qquad v_{\max} = \frac{-5qL^4}{384EI_z}. \tag{12.28}$$

O procedimento para determinar $\theta_{\max}$ é o mesmo. Primeiro determinar a seção onde ocorre, i.e., onde

$$\frac{d^2v}{dx^2}(\bar{\bar{x}}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 12L\bar{\bar{x}} - 12\bar{\bar{x}}^2 = 0.$$

As duas raízes são: $\bar{\bar{x}} = 0$ e $\bar{\bar{x}} = L$. Então,

$$\theta_{\max} = \theta(0) = \frac{-qL^3}{24EI_z} = -\theta(L). \tag{12.29}$$

12.2.2 Exemplo 12.2 – Uso da equação diferencial de 4ª ordem

Determinar a equação da curva elástica de viga biapoiada sob carga distribuída do Exemplo 12.2, mostrada na Figura 12.7, porém usando a equação diferencial da curva elástica de 4ª ordem, eq.(12.17)$_3$.

Solução:

A equação diferencial é $EId^4v/dx^4 = p_y$. Nota-se que com o uso dessa equação, não há necessidade da prévia determinação da equação de esforço de momento como no Exemplo 1. O único dado é a carga distribuída p_y, que na dedução é positiva para carga no sentido positivo de y. Logo, no presente caso, $p_y = -q = const.$ Podemos fazer as integrações:

$$\begin{aligned}
& EI_z\frac{d^4v_{AB}}{dx^4} = -q, \\
-V_{AB} = \quad & EI_z\frac{d^3v_{AB}}{dx^3} = -qx + C_1, \\
M_{AB} = \quad & EI_z\frac{d^2v_{AB}}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2, \\
EI\theta_{AB} = \quad & EI\frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3, \\
& EI_zv_{AB} = -\frac{qx^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4, \qquad \text{p/ } \forall x \in (0;L),
\end{aligned} \tag{12.30}$$

Nota-se que durante o processo de integração, naturalmente se obtém as expressões para θ_{AB}, M_{AB} e V_{AB}, em termos das mesmas quatro constantes de integração. As condições de contorno necessárias são aquelas mostradas na Tabela 12.1, item (a):

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad M_z(0) = 0, \qquad M_z(L) = 0. \tag{12.31}$$

Aplicando essas condições em (12.30) se obtém quatro equações algébricas:

$$\begin{aligned}
v(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad -\frac{q}{24}\times 0^4 + \frac{C_1}{b}\times 0^3 + \frac{C_2}{2}\times 0^2 + C_3\times 0 + C_4 = 0 \\
v(L) = 0 \quad &\rightarrow \quad -\frac{qL^4}{24} + \frac{C_1L^3}{6} + \frac{C_2L^2}{2} + C_3L + C_4 = 0 \\
M(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad -\frac{7}{2}\times 0^2 + C_1\times 0 + C_2 = 0 \\
M(L) = 0 \quad &\rightarrow \quad -\frac{qL^2}{2} + C_1L + C_2 = 0
\end{aligned} \tag{12.32}$$

Esse sistema pode ser organizado em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ L^3/6 & L^2/2 & L & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL^4/24 \\ 0 \\ qL^2/2 \end{Bmatrix}. \tag{12.33}$$

A solução analítica desse sistema é:

$$C_2 = C_4 = 0, \qquad C_1 = qL/2, \qquad C_3 = -qL^3/24. \tag{12.34}$$

Substituindo essas constantes em (12.30) obtemos

$$\begin{aligned} EI_z v_{AB} &= \frac{q}{24}\left[-x^4 + 2x^3 L - L^3 x\right], \\ M_{AB} &= -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}x \qquad \text{e} \qquad V_{AB} = qx - \frac{qL}{2}. \end{aligned} \tag{12.35}$$

Nota-se que, como esperado, as expressões dos esforços são as mesmas já obtidas pelo método das seções no Exemplo 12.1, na eq.(12.23), a curva elástica é a mesma obtida em (12.27) usando a equação diferencial de segunda ordem.

12.2.3 Exemplo 12.3 – Viga biapoiada sob carga concentrada

Determinar a equação da curva elástica da viga mostrada na Figura 12.8.

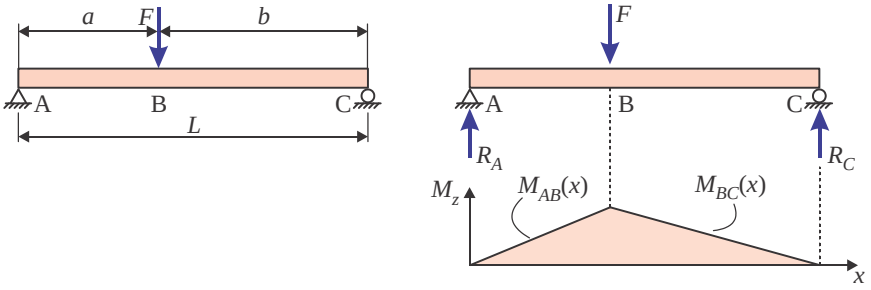


Figura 12.8: Viga do Exemplo 12.3.

Solução:

Primeiramente, identificamos as reações não nulas, R_A e R_C, e verificamos que o problema é isostático. Como segundo passo, podemos então determinar as reações nos apoios: $R_A = Fb/L$ e $R_C = Fa/L$. **Em seguida** usamos o método das seções para obter o diagrama de esforços. As expressões para os **momentos fletores** em cada trecho são:

$$\begin{aligned} \text{Trecho } AB \quad &\rightarrow \quad M_{AB}(x) = \frac{Fb}{L}x \qquad\quad \forall x \in (0; a) \\ \text{Trecho } BC \quad &\rightarrow \quad M_{BC}(x) = Fa\,(1 - x/L) \quad \forall x \in (a; L) \end{aligned} \tag{12.36}$$

A notação $\forall x \in (a; L)$ significa que a equação $M_{BC}(x)$ é válida apenas no **intervalo aberto** de x de a a L, i.e., exclui os extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = L$.

O **terceiro passo** consiste em integrar a equação diferencial de linha elástica usando (12.29). Entretanto, observe que a distribuição de momento fletor é descrita nesse problema por duas equações distintas, descritas pelos dois segmentos de reta que aparecem no diagrama da Figura 12.8. Note que a equação $EIv'' = M(x)$ é uma relação válida para cada ponto de x de forma individual, i.e., para um certo x, o valor da segunda derivada de v vezes EI é igual ao valor do momento naquela seção. Se o x for menor que a, i.e., se x estiver no intervalo AB, o valor do momento será obtido pelo esforço $M_{AB}(x)$, e se x estiver no intervalo BC, o valor do momento será dado por $M_{BC}(x)$. Isto significa que se integrarmos M_{AB} obteremos uma equação para o deslocamento que será válida apenas para x em AB, e de forma similar, integrando M_{BC} teremos uma equação diferente para v, válida apenas em BC.

Tudo isso significa que, da mesma forma que temos duas equações distintas para momentos, $M_{AB}(x)$ e $M_{BC}(x)$, **teremos também uma curva elástica descrita por duas equações**, $v_{AB}(x)$ e $v_{BC}(x)$. Em qualquer problema, tem-se uma equação diferente para cada trecho de viga.

Deve-se lembrar que um **trecho** é delimitado por duas seções, em que cada uma possui:

- uma mudança de seção transversal,
- uma carga concentrada, ou
- um apoio, ou
- um início, final, ou variação brusca de carga distribuída. (12.37)

Voltando ao exemplo, temos para seções no **trecho** AB:

$$\begin{aligned} EIv''_{AB} &= M_{AB}(x) = \frac{Fb}{L}x, \\ EIv'_{AB} &= \frac{Fb}{2L}x^2 + C_1, \\ EIv_{AB} &= \frac{Fb}{6L}x^3 + C_1x + C_2. \end{aligned} \tag{12.38}$$

E para o **trecho** BC,

$$\begin{aligned} EIv''_{BC} &= M_{BC}(x) = Fa - \frac{Fa}{L}x, \\ EIv'_{BC} &= Fax - \frac{Fax^2}{2L} + D_1, \\ EIv_{BC} &= \frac{Fax^2}{2} - \frac{Fax^3}{6L} + D_1x + D_2. \end{aligned} \tag{12.39}$$

O **quarto passo** consiste em identificar as quatro condições de contorno e compatibilidade necessárias para determinar as quatro constantes C_1, C_2, D_1 e D_2. Com o auxílio da Tabela 12.1, do item (a), temos as condições para os apoios A e C, e do item (e) temos duas condições de compatibilidade para o ponto B, i.e.,

$$\begin{aligned} &v_{AB}(x=0) = 0 \\ &v_{BC}(x=L) = 0 \end{aligned} \Big\} \quad \text{condições de contorno,}$$
$$\begin{aligned} &v_{AB}(a) = v_{BC}(a) \\ &\theta_{AB}(a) = \theta_{BC}(a) \end{aligned} \Big\} \quad \text{condições de compatibilidade.} \tag{12.40}$$

Não usamos as condições de contorno de momento e cortante, uma vez que essas condições já foram incorporadas às equações de esforços obtidas previamente pelo método das seções em (12.36).

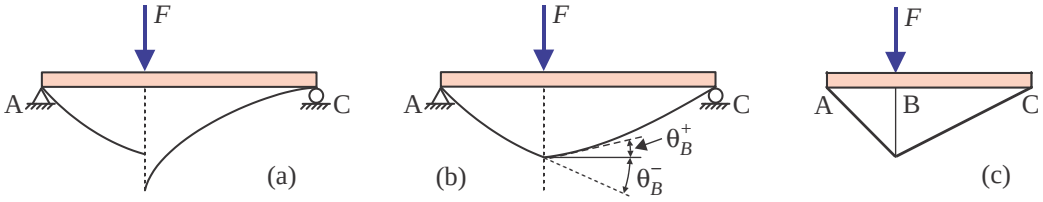


Figura 12.9: Ilustração de descontinuidade de deslocamento em (a) e de rotação em (b) e (c).

Note que as condições de compatibilidade são necessárias para, de certa forma, "informar" ao sistema que as duas equações $v_{AB}(x)$ e $v_{BC}(x)$ não são desvinculadas. A condição $v_{AB}(a) = v_{BC}(a)$ busca evitar uma situação como a da Figura 12.9a onde a viga, na seção $x = a$, apresenta descontinuidade de deslocamento. Na Figura (b), é ilustrada uma descontinuidade de rotação θ na seção infinitesimalmente a esquerda de B, θ_B^-, e à direita de B, θ_B^+. Essa descontinuidade significa $\theta_B^- \neq \theta_B^+$, tal que a tangente da esquerda é diferente daquela a direita. Uma descontinuidade desse tipo permitia, por exemplo, o surgimento do "bico" visto nas figuras (b) e (c). Essas descontinuidades, obviamente, não são fisicamente realistas, mesmo sob uma carga concentrada.

O **quinto passo** consiste em aplicar as condições de contorno e compatibilidade (12.40) para determinar as constantes de integração do problema. Assim, obtemos quatro equações algébricas

aplicando (12.40) a (12.38) e (12.39):

$$\begin{aligned}
v_{AB}(x=0)=0 \quad &\rightarrow \quad C_2=0\\
v_{BC}(x=L)=0 \quad &\rightarrow \quad \frac{FaL^2}{2}-\frac{FaL^3}{6L}+D_1L+D_2=0\\
v_{AB}(a)=v_{BC}(a) \quad &\rightarrow \quad \frac{Fba^3}{6L}+C_1a+C_2=\frac{Fa}{2}\left(a^2-\frac{a^3}{3L}\right)+D_1a+D_2\\
\theta_{AB}(a)=\theta_{BC}(a) \quad &\rightarrow \quad \frac{Fba^2}{2L}+C_1=Fa^2-\frac{Fa^3}{2L}+D_1.
\end{aligned} \tag{12.41}$$

Esse é um conjunto de quatro equações algébricas, com quatro incógnitas, C_1, C_2, D_1 e D_2, que pode ser resolvido pelo processo de substituição sucessiva de uma equação na outra com eliminação de incógnitas. Entretanto, observe que este não é um processo muito eficiente se lembrarmos que num problema isostático geral, o número de incógnitas é duas vezes o número de vãos da viga. É comum que se tenha eixos com oito ou mais vãos, de forma que o processo de substituição se torna inviável. [2].

Uma forma automatizada de resolver o problema consiste em reescrever o sistema de equações obtido em uma forma matricial. Nota-se que cada equação em (12.41) é formada por termos completamente conhecidos, (aqueles dependentes das forças aplicadas), e termos que dependem das incógnitas. O sistema em forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & L & 1\\ a & 1 & -a & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ D_1\\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\\ FaL^2/3\\ Fa^3/3\\ Fa^2/2, \end{Bmatrix} \tag{12.42}$$

ou simplesmente $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$. A maneira de montar o sistema consiste em, inicialmente, gerar uma matriz nula, um vetor $\mathbf{U}$ com as constantes e um vetor $\mathbf{F}$ nulos. Em seguida, cada uma das equações (12.41) é transcrita integralmente na linha correspondente de $\mathbf{K}$ e $\mathbf{F}$. Por exemplo, a linha três da matriz vezes $\mathbf{U}$, menos o terceiro termo de $\mathbf{F}$, reproduzir exatamente a terceira das equações (12.41). A matriz é não singular e o sistema pode ser resolvido até mesmo em calculadoras de bolso, se valores dos parâmetros forem fornecidos. A solução analítica pode ser obtida com o auxílio de manipuladores simbólicos de equações (como o *Mathematica*). A solução é

$$\begin{aligned}
C_1&=\frac{Fb}{6L}(b^2-L^2), \qquad & D_1&=-\frac{Fa^3}{6L}-\frac{FaL}{3},\\
C_2&=0, & D_2&=\frac{Fa^3}{6}.
\end{aligned} \tag{12.43}$$

O sexto passo consiste em substituir as expressões (ou valores) das constantes nas equações de curva elástica e rotações, equações (12.38) e (12.39) para cada um dos trechos. Isso resulta em

$$\begin{aligned}
\text{Trecho AB} \qquad v_{AB}(x)&=\frac{Fb}{6EI_zL}[x^3-a(a+2b)x],\\
\theta_{AB}(x)&=\frac{Fb}{6LEI_z}[3x^3-a(a+2b)], \qquad \forall x\in(0;a).\\
\text{Trecho BC} \qquad v_{BC}(x)&=\frac{Fa}{6EI_z}\left[3x^2-\frac{x^3}{L}+a^2-\frac{(3a^2+4ab+2b^2)}{L}x\right],\\
\theta_{BC}(x)&=\frac{Fa}{6EI_z}\left[6x-\frac{3x^2}{L}-\frac{(3a^2+4ab+2b^2)}{L}\right], \qquad \forall x\in(a;L).
\end{aligned} \tag{12.44}$$

[2] Esse é um dos motivos pelos quais o método de integração tradicionalmente nunca era usado em projetos para resolver problemas reais de vigas de múltiplos vãos. Estes eram resolvidos com o uso de métodos gráficos, os quais podem agora ser abandonados em face dos procedimentos computadorizados.

12.3 Método de integração para vigas hiperestáticas

Como comentado no início da seção 12.2, o método de integração é efetivo indistintamente em problemas isostáticos e hiperestáticos. Alguns detalhes específicos de sua aplicação a problemas hiperestáticos serão vistos no exemplo que segue.

12.3.1 Exemplo 12.4 – Integração em viga hiperestática

Considere a viga da Figura 12.10. Determine a curva elástica, em termos de q, L, E, I_z.
Solução:

Nota-se que existem três apoios, com reações R_A, R_B e R_C, e apenas duas equações de equilíbrio não triviais, ΣF_y e ΣM_z, o que resulta num problema hiperestático.

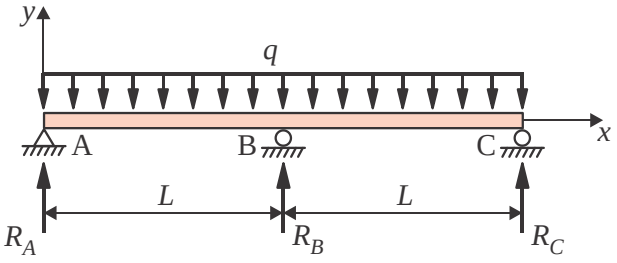


Figura 12.10: Viga do Exemplo 12.4.

Temos dois vãos, e as etapas do cálculo são as mesmas do exemplo anterior, exceto que, como não podemos obter as reações, não temos as equações de esforços de momento fletor. Então não podemos usar a equação diferencial $(12.17)_1$. Usamos então $(12.17)_3$ em cada um dos vãos: (note que $p_y(x) = -q = const.$)

Trecho AB

$$
\begin{aligned}
& EI_z \frac{d^4 v_{AB}}{dx^4} = -q, \\
-V_{AB} = \quad & EI_z \frac{d^3 v_{AB}}{dx^3} = -qx + C_1, \\
M_{AB} = \quad & EI_z \frac{d^2 v_{AB}}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2, \\
EI\theta_{AB} = \quad & EI \frac{dv_{AB}}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\
& EI_z v_{AB} = -\frac{qx^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4, \qquad \forall x \in (0; L),
\end{aligned}
\tag{12.45}
$$

Trecho BC

$$
\begin{aligned}
& EI_z \frac{d^4 v_{BC}}{dx^4} = -q \\
-V_{BC} = \quad & EI_z \frac{d^3 v_{BC}}{dx^3} = -qx + D_1 \\
M_{BC} = \quad & EI_z \frac{d^2 v_{BC}}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + D_1 x + D_2 \\
EI\theta_{BC} = \quad & EI_z \frac{dv_{BC}}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{D_1 x^2}{2} + D_2 x + D_3 \\
& EI_z v_{BC} = -\frac{qx^4}{24} + \frac{D_1 x^3}{6} + \frac{D_2 x^2}{2} + D_3 x + D_4, \qquad \forall x \in (L; 2L)
\end{aligned}
\tag{12.46}
$$

Note que, na segunda e na terceira equação de cada trecho, aplicamos também as equações de

equilíbrio (12.17) a e b para o momento e cortante.

O número de constantes é quatro vezes o número de vãos, i.e., oito constantes. A próxima etapa é a de identificar oito condições de contorno e compatibilidade. Com o auxílio da Tabela 12.1 temos as condições e respectivas equações:

$$\left\{\begin{array}{lll}
v_{AB}(0)=0 & \rightarrow & -\dfrac{q}{24}0^4+\dfrac{C_1}{6}0^3+\dfrac{C_2}{2}0^2+C_30+C_4=0,\\
v_{AB}(L)=0 & \rightarrow & -\dfrac{qL^4}{24}+\dfrac{C_1L^3}{6}+\dfrac{C_2L^2}{2}+C_3L+C_4=0,\\
v_{BC}(L)=0 & \rightarrow & -\dfrac{qL^4}{24}+\dfrac{D_1L^3}{6}+\dfrac{D_2L^2}{2}+D_3L+D_4=0,\\
v_{BC}(2L)=0 & \rightarrow & -\dfrac{16qL^4}{24}+\dfrac{8D_1L^3}{6}+\dfrac{4D_2L^2}{2}+2D_3L+D_4=0,\\
M_{AB}(0)=0 & \rightarrow & -\dfrac{q}{2}0^2+C_10+C_2=0,\\
M_{BC}(2L)=0 & \rightarrow & -\dfrac{qL^2}{2}+2D_1L+D_2=0,\\
\theta_{AB}(L)=\theta_{BC}(L) & \rightarrow & -\dfrac{qL^3}{6}+\dfrac{C_1L^2}{2}+C_2L+C_3=-\dfrac{qL^3}{6}+\dfrac{D_1L^2}{2}+D_2L+D_3,\\
M_{AB}(L)=M_{BC}(L) & \rightarrow & -\dfrac{qL^2}{2}+C_1L+C_2=-\dfrac{qL^2}{2}+D_1L+D_2.
\end{array}\right. \tag{12.47}$$

Note que as seis primeiras equações são condição de contorno nos três apoios, e as duas últimas são condição de compatibilidade em B. O leitor deve estar alerta que em B o esforço de momento não é nulo. Isso porque, contrariamente às aparências, a viga não possui uma rótula em B. Existe uma rótula sim, porém fora da viga, i.e., a viga não é separada em duas pela rótula. Esta distinção pode ser claramente vista comparando os casos (d) e (g) da Tabela 12.1. O presente exemplo corresponde ao caso (d).

O sistema (12.47) tem as equações 1 e 6 que podem ser prontamente resolvidas para $C_4=0$ e $D_2=0$. As demais seis constantes são obtidas pelo sistema matricial

$$\left[\begin{array}{cccccc}
L^3/6 & L & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & L^3/6 & L^2/2 & L & 1\\
0 & 0 & 4L^3/3 & 2L^2 & 2L & 1\\
0 & 0 & 2L & 1 & 0 & 0\\
L^2/2 & 1 & -L^2/2 & -L & -1 & 0\\
L & 0 & -L & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} C_1\\ C_3\\ D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4 \end{array}\right\}
=\frac{qL^4}{24}
\left\{\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 16\\ 12/L^2\\ 0\\ 0 \end{array}\right\}. \tag{12.48}$$

A solução é

$$\begin{array}{llll}
C_1=\dfrac{3qL}{8} & C_3=-\dfrac{qL^3}{48} & D_1=\dfrac{13qL}{8} & D_3=\dfrac{29qL^3}{48}\\
C_2=0 & C_4=0 & D_2=-\dfrac{5qL^2}{4} & D_4=-\dfrac{5qL^4}{24}.
\end{array} \tag{12.49}$$

A substituição das constantes de volta em (12.45) produz, após simplificações, a expressão da **curva elástica no trecho AB**:

$$48EI_zv_{AB}(x)=-q[x^4-3Lx^3+2L^3x], \qquad \forall x\in(0;L). \tag{12.50}$$

A Figura 12.11 mostra a curva representada por essa equação. A posição $\bar{x}$ da seção onde ocorre o **deslocamento máximo** é obtida por

$$\left.\frac{dv_{AB}}{dx}\right|_{x=\bar{x}}=0=-\frac{q}{48EI_z}[8\bar{x}^3-9L\bar{x}^2+L^3]. \tag{12.51}$$

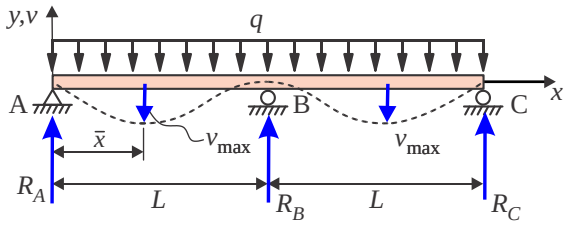


Figura 12.11: Curva elástica do Exemplo 12.4, para $b = 5$ mm, $h = 10$ mm, $E = 200$ GPa, $L = 200$ mm, $q = 10$ N/mm.

A única das três raízes úteis no intervalo $[0 - L]$ é

$$\bar{x} = \frac{L}{16}\left(1 + \sqrt{33}\right) \approx 0,4215L, \tag{12.52}$$

i.e., o máximo ocorre próximo ao centro do vão. Substituindo essa coordenada em (12.49) temos o deslocamento máximo:

$$v_{\max} = v_{AB}(x = \bar{x}) = \frac{-qL^4}{65.536EI_z}\left(39 + 55\sqrt{33}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_{\max} \approx -4,226 \cdot 10^{-3}\frac{qL^4}{EI_z}} \tag{12.53}$$

Da mesma forma, temos $\theta_{\max} = \theta_{AB}(x = 0) = -qL^3/48EI$. As equações dos esforços de **momento fletor** são obtidas substituindo as constantes de integração nas expressões $(12.45)_3$ e $(12.46)_3$:

$$M_{AB} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3qL}{8}x \qquad \text{e} \qquad M_{BC} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{13qL}{8}x - \frac{5qL^2}{4}. \tag{12.54}$$

E os **esforços cortantes** vêm de $(12.45)_2$ e $(12.46)_2$ ou simplesmente diferenciado os momentos:

$$V_{AB} = qx - \frac{3qL}{8} \qquad \text{e} \qquad V_{BC} = qx - \frac{13qL}{8}. \tag{12.55}$$

As reações são obtidas das equações dos esforços, utilizando as relações da Tabela 12.1:

$$\begin{aligned} R_A &= -V_{AB}(0) = C_1 = \frac{3qL}{8}, \\ R_B &= V_{AB}(L) - V_{BC}(L) = D_1 - C_1 = \frac{5qL}{4}, \\ R_C &= V_{BC}(2L) = 2qL - D_1 = \frac{3qL}{8}. \end{aligned} \tag{12.56}$$

12.3.2 Exemplo 12.5 – Carga concentrada em viga hiperestática

Determine a curva elástica da viga da Figura 12.12 usando o método de integração. Dados F, L, a, b, E. A **viga é escalonada**, com seção transversal uniforme em cada trecho, com momentos de inércia I_1 e I_2 respectivamente. Obter resultados numéricos com os seguintes dados: seção transversal retangular com $I_1 = I_2 = 10^3$ mm^4, $E = 200.000$ MPa, $L = 200$ mm, $a = 65$ mm, $F = 100$ N.

Solução:

Inicialmente observarmos que a viga é escalonada, situação bastante comum em eixos rotativos de máquinas. A transição entre as duas seções, em B, deve ser feita utilizando um raio de concordância de forma a passar de maneira suave entre um diâmetro e outro. Entretanto, qualquer que seja o valor do raio de concordância, é gerada na região próxima à seção de transição uma **concentração de tensões**. O estado de tensões nessa região é complexo, não uniaxial, e não é descrito pela

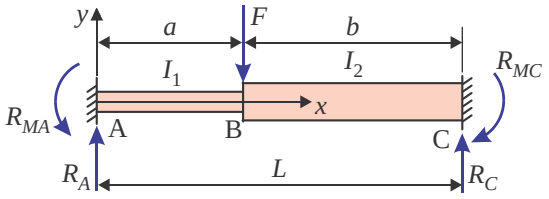


Figura 12.12: Viga bi-engastada do Exemplo 12.5.

fórmula de flexão. Normalmente a tensão máxima na região é obtida via o fator de concentração de tensões. Entretanto, em geral se considera que essa concentração de tensões tem pequena influência nos valores de deflexão transversal da viga. Assim, é usual que a curva elástica seja determinada pelas mesmas equações diferenciais usadas nesse capítulo, da forma ilustrada a seguir, ignorando a concentração de tensões.

Como o **problema é hiperestático**, com quatro reações, temos que usar a equação diferencial $EI_z v^{(4)} = p(x)$ em cada um dos dois vãos, para carga distribuída nula, $p(x) = 0$. Então,

$$
\begin{array}{lll}
& \text{Trecho } AB & \\
EI_1 v^{(4)}_{AB} & = 0, & \\
-V_{AB} & = EI_1 v^{(3)}_{AB} = C_1, & \\
M_{AB} & = EI_1 v''_{AB} = C_1 x + C_2, & \\
EI_1\theta_{AB} & = EI_1 v'_{AB} = \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3, & \\
EI_1 v_{AB} & = \dfrac{C_1 x^3}{6} + \dfrac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4, &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
& \text{Trecho } BC & \\
EI_2 v^{(4)}_{BC} & = 0, & \\
-V_{BC} & = EI_2 v^{(3)}_{BC} = D_1, & \\
M_{BC} & = EI_2 v''_{BC} = D_1 x + D_2, & \\
EI_2\theta_{BC} & = EI_2 v'_{BC} = \dfrac{D_1}{2}x^2 + D_2 x + D_3, & \\
EI_2 v_{BC} & = \dfrac{D_1 x^3}{6} + \dfrac{D_2}{2}x^2 + D_3 x + D_4. &
\end{array}
\tag{12.57}
$$

A notação $v^{(3)}_{AB}$, por exemplo, significa d^3v/dx^3. As condições de contorno e compatibilidade são:

$$
\begin{array}{lll}
v_{AB}(0) = 0 & \rightarrow & \dfrac{C_1}{6}0^3 + \dfrac{C_2}{2}0^2 + C_3 0 + C_4 = 0, \\
\theta_{AB}(0) = 0 & \rightarrow & \dfrac{C_1}{2}0^3 + C_2 0 + C_3 = 0, \\
v_{BC}(L) = 0 & \rightarrow & \dfrac{D_1 L^3}{6} + \dfrac{D_2 L^2}{2} + D_3 L + D_4 = 0, \\
\theta_{BC}(L) = 0 & \rightarrow & \dfrac{D_1 L^2}{2} + D_2 L + D_3 = 0, \\
v_{AB}(a) = v_{BC}(a) & \rightarrow & \dfrac{C_1 a^3}{6I_1} + \dfrac{C_2 a^2}{2I_1} + \dfrac{C_3 a}{I_1} + \dfrac{C_4}{I_1} = \dfrac{D_1 a^3}{6I_2} + \dfrac{D_2 a^2}{2I_2} + \dfrac{D_3 a}{I_2} + \dfrac{D_4}{I_2}, \\
\theta_{AB}(a) = \theta_{BC}(a) & \rightarrow & \dfrac{C_1 a^2}{2I_1} + \dfrac{C_2 a}{I_1} + \dfrac{C_3}{I_1} = \dfrac{D_1 a^2}{2I_2} + \dfrac{D_2 a}{I_2} + \dfrac{D_3}{I_2}, \\
M_{AB}(a) = M_{BC}(a) & \rightarrow & (C_1 a + C_2) = (D_1 a + D_2), \\
V_{AB}(a) = V_{BC}(a) - F & \rightarrow & -C_1 = -D_1 - F.
\end{array}
\tag{12.58}
$$

As quatro primeiras são condição de contorno e as demais de compatibilidade. As últimas foram obtidas com o auxílio da tabela 12.1, item (e). Considere que usamos o método das seções, efetuando dois cortes, um pouco à esquerda do ponto B, e o outro logo à direita. Montamos o diagrama de corpo livre desse segmento na Figura 12.13, onde usamos o método das seções, efetuando dois cortes, um pouco à esquerda do ponto B, e o outro logo à sua direita. Montamos o diagrama de corpo livre desse segmento, indicando a força externa, F, e os esforços nas duas seções. O equilíbrio da força e momento resulta exatamente nas duas últimas condições em (12.58).

As igualdades à direita de (12.58) permitem se se obtenha diretamente das primeiras duas constantes,

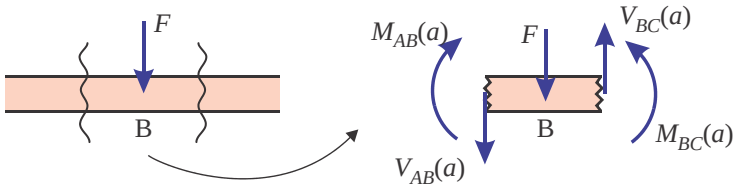


Figura 12.13: Diagrama de corpo livre em torno da força concentrada na seção B.

que são $C_3 = C_4 = 0$. As demais equações geram o sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & L & 1 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{2} & L & 1 & 0 \\ \frac{a^3}{6I_1} & \frac{a^2}{2I_1} & \frac{-a^3}{6I_2} & \frac{-a^2}{2I_2} & \frac{-a}{I_2} & \frac{-1}{I_2} \\ \frac{a^2}{2I_1} & \frac{a}{I_1} & \frac{-a^2}{2I_2} & \frac{-a}{I_2} & \frac{-1}{I_2} & 0 \\ a & 1 & -a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{Bmatrix}. \tag{12.59}$$

A solução analítica desse sistema pode ser obtida com um manipulador simbólico de equação. Ela parece bastante complicada, mas devemos lembrar que, em projeto, raramente necessitamos obter soluções em forma analítica como nessa equação. Em vez disso, tem-se valores numéricos para os parâmetros, e tem-se uma simples matriz 6×6 para resolver, o que pode ser conseguido em qualquer calculadora científica moderna. Para facilitar a apresentação nesse ponto, faremos a simplificação de que $I_1 = I_2 = I$, tal que a solução do sistema é

$$\begin{aligned} &C_3 = C_4 = 0, && C_2 = -\frac{Fab^2}{L^2}, && D_2 = \frac{Fa^2}{L^2}(2L-a), && D_4 = \frac{Fa^3}{6}, \\ &C_1 = \frac{Fb^2}{L^3}(2a+L), && D_1 = -\frac{Fa^2}{L^3}(L+2b), && D_3 = -\frac{Fa^2}{2}, \end{aligned} \tag{12.60}$$

Substituindo em (12.57) temos

$$\begin{aligned} v_{AB}(x) &= -\frac{Fb^2x^2}{6EIL^3}[3aL - x(2a+b)], \\ v_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{6EIL^3}(L-x)^2[x(2a-3L)+aL], \\ M_{AB}(x) &= \frac{Fb^2}{L^3}[Lx - a(L-2x)] && \rightarrow M_{AB}(0) = -\frac{Fab^2}{L^2}, \\ M_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{L^3}[(2a-3L)x + L(2L-a)] && \rightarrow M_{BC}(L) = -\frac{Fa^2b}{L^2} \\ V_{AB}(x) &= -\frac{Fb^2}{L^3}(3a+b) = cte, \\ V_{BC}(x) &= \frac{Fa^2}{L^3}(a+3b) = cte. \end{aligned} \tag{12.61}$$

As reações são calculadas por último, a partir dos valores dos esforços nas seções próximas aos apoios. Por exemplo, no apoio A, o equilíbrio mostra que

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 & \longrightarrow \quad R_A + V_{AB}(0) = 0, \\ \sum M_z = 0 & \longrightarrow \quad R_{MA} + M_{AB}(0) = 0. \end{cases}$$

Logo, tomando os esforços na seção A de (12.61), tem-se as reações:

$$R_A = \frac{Fb^2}{L^3}(3a+b) \qquad \text{e} \qquad R_{MA} = \frac{Fab^2}{L^2}. \tag{12.62}$$

As reações no apoio C podem ser obtidas da mesma forma, a partir do equilíbrio em torno do ponto C, utilizando os esforços obtidos em (12.61)

$$R_C = V_{BC}(x) = \frac{Fa^2}{L^3}(a+3b) \qquad \text{e} \qquad R_{MC} = -M_{BC}(L) = \frac{Fa^2b}{L^2}. \tag{12.63}$$

Alternativamente, as equações globais de equilíbrio podem ser utilizadas, juntamente com as reações já obtidas em (12.62).

Consideremos os dados numéricos: seção com $I_1 = I_2 = I = 10^3$ mm^4. $E = 200.000$ MPa, $L = 200$ mm, $a = 65$ mm, $F = 100$ N. Nesse caso teremos (em unidades coerentes),

$$\begin{array}{lll} C_1 = 75,18 & D_1 = -24,8 & D_3 = -2,1125 \cdot 10^5 \\ C_2 = -2.961,6 & D_2 = 3.538,4 & D_4 = 4,5771 \cdot 10^6. \end{array} \tag{12.64}$$

As equações (12.61) então produzem as expressões explícitas da curva elástica e dos esforços, em unidades N e mm:

$$\begin{array}{ll} v_{AB}(x) = -1.481x^2 - 12,5x^3, & v_{BC}(x) = -4,14x^3 + 1.769x^2 - 211.250x + 4,58 \cdot 10^6 \\ M_{AB}(x) = 75,2x - 2.962, & M_{BC}(x) = 24,8x - 3.538, \\ V_{AB}(x) = -75,2, & V_{BC}(x) = 24,8. \end{array} \tag{12.65}$$

Note que, normalmente, como não se resolve primeiro o problema matricial (12.59) de forma analítica, mas numérica, os resultados das constantes e as funções já são obtidos diretamente como em (12.64) e (12.65). Essas funções estão ilustradas na Figura 12.14. Dos esforços obtemos finalmente os valores das reações nos apoios, $R_A = 75,2$ N, $R_C = 24,8$ N, $R_{MA} = 2.962$ Nmm e $R_{MC} = 1.426$ Nmm.

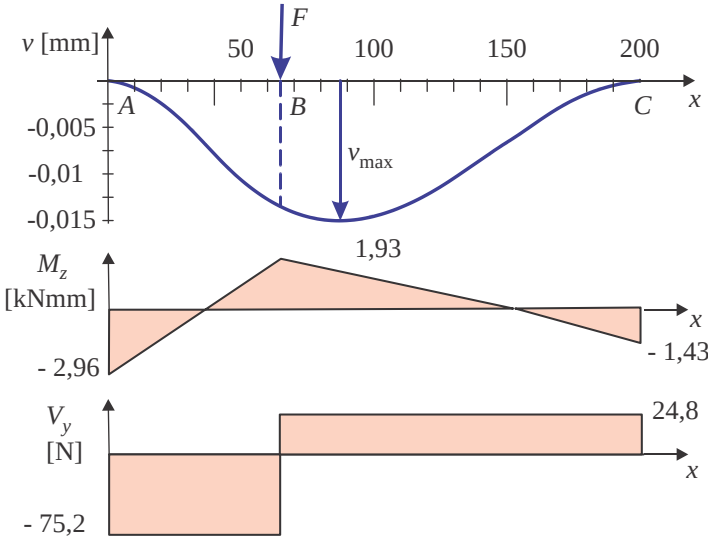


Figura 12.14: Curva elástica e esforços do Exemplo 12.5, para $a = 65$ mm, $L = 200$ mm, $E = 200$ GPa, $q = 100$ N/mm.

12.3.3 Exemplo 12.6 – Condição de simetria

Consideremos o problema visto na Figura 12.15a, de uma viga bi-engastada, de seção uniforme, com uma carga concentrada aplicada em seu centro. Nota-se que o problema possui um plano de simetria que passa pela seção B.

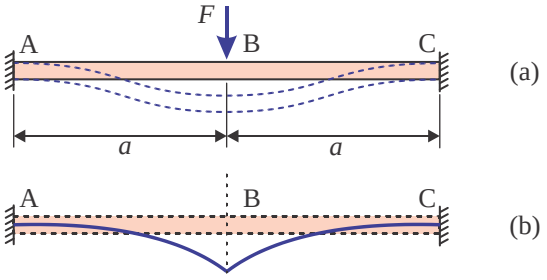


Figura 12.15: (a) Viga com plano de simetria e configuração deformada; (b) indicação de curva elástica incorreta, obtida sem a aplicação da condição de simetria.

Note que um plano de simetria significa que todos os aspectos envolvidos são simétricos:
- geometria,
- propriedades de material,
- condições de contorno,
- carregamento.

(12.66)

Quando um problema possui um plano de simetria, é possível resolve-lo utilizando um **problema auxiliar** que consiste apenas de uma metade da geometria e do carregamento, como na Figura 12.16. Entretanto, para que a solução do problema auxiliar represente exatamente a solução do problema original, é necessário que se imponham **condições de simetria** na seção cortada pelo plano de simetria, no caso a seção B.

No problema auxiliar, deve-se impor as **condições de contorno** no apoio A:

$$v(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad v\prime(0) = 0, \tag{12.67}$$

e as **condições de simetria** na seção B:

$$\frac{dv}{dx}(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad V_y(a) = V_{B^-} = -\frac{F}{2}. \tag{12.68}$$

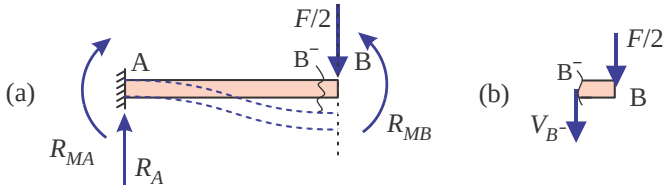


Figura 12.16: Identificação das condições de simetria.

Observe que a ausência da condição $v'(a) = 0$ geraria uma solução para o problema auxiliar como ilustrado na Figura 12.15b, que não corresponde à solução do problema original ilustrado na Figura 12.15a. A segunda condição de simetria, para o cortante, é obtida do equilíbrio de um segmento de dimensões infinitesimais à esquerda da seção B, como na Figura 12.16. A condição $V_y(a) = -F/2$ vem da equação de equilíbrio de forças na direção y.

Nota-se que, se as condições de simetria não fossem impostas, se teria o problema isostático ilustrado na Figura 12.16a, sem R_{MB}, e se poderia resolve-lo utilizando a equação diferencial da curva elástica de segunda ordem, $EId^2v/dx^2 = M_z(x)$. Entretanto, as condições de simetria correspondem à imposição de mais restrições, o que torna o **problema hiperestático**, e exige o uso da equação da curva elástica de quarta ordem $EId^4v/dx^4 = p_y(x)$. A hiperestaticidade pode ser entendida percebendo que na Figura 12.16a, as **reações nos apoios** são 3: R_A, R_{MA} e R_{MB}, e se dispões apenas de duas equações de equilíbrio não triviais. A reação de momento R_{MB} corresponde ao esforço de momento no centro da viga do problema original.

Uma vez identificado o problema auxiliar, o procedimento de solução é o mesmo dos casos anteriores, como visto a seguir. Primeiro integra-se a equação da curva elástica:

$$\begin{aligned} EI_1 v''''_{AB} &= 0, \\ -V_{AB} &= EI_1 v'''_{AB} = C_1, \\ M_{AB} &= EIv''_{AB} = C_1 x + C_2, \\ EI\theta_{AB} &= EIv'_{AB} = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3, \\ EIv_{AB} &= \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4, \end{aligned} \tag{12.69}$$

Em seguida aplicam-se as condições de contorno e de simetria:

$$\begin{aligned} v_{AB}(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad C_4 = 0, \\ \theta_{AB}(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad C_3 = 0, \\ \theta_{AB}(a) = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{C_1 a^2}{2} + C_2 a = 0, \\ V_{AB}(a) = -F/2 \quad &\rightarrow \quad -C_1 = -F/2. \end{aligned} \tag{12.70}$$

A solução das constantes de integração é:

$$C_1 = \frac{F}{2}, \quad C_2 = -\frac{Fa}{4}, \quad C_3 = C_4 = 0. \tag{12.71}$$

Com isso, a solução da curva elástica e do esforço de momento fica

$$v_{AB}(x) = \frac{F}{24EI}x^2\,(2x - 3a) \qquad \text{e} \qquad M_{AB}(x) = \frac{F}{4}\,(2x - a)\,. \tag{12.72}$$

Essa é a solução do problema auxiliar, o que significa que é a solução nas seções do trecho AB do problema original. Caso se deseje a solução no trecho BC, esta pode ser obtida simplesmente usando a condição de simetria, i.e., todos os parâmetros e funções devem ser simétricos em relação ao plano que corta a seção B. Então, basta substituir x por $2a - x$ nas equações do trecho AB para obter aquelas de BC. Por exemplo, $24EIv_{BC}(x) = 24EIv_{AB}(x)(2a - x) = F(2a - x)^2[2(2a - x) - 3a] = F(2a - x)^2(a - 2x)$.

12.4 O Método de sobreposição para flexão de vigas

Um segundo método além daquele de integração direta visto nas seções anteriores é o chamado método da sobreposição, que descreveremos aqui. Este é um método que permite a determinação da solução de problemas relativamente complexos através da solução de problemas auxiliares especialmente criados para serem isostáticos, e cujas soluções sejam mais simples de serem determinadas ou mesmo que sejam já previamente conhecidas. Este método baseia-se no chamado **Princípio de Sobreposição dos Efeitos**, descrito na Seção 4.6, página 114.

A forma geral de atuar num problema de hiperestático usando o princípio de sobreposição dos efeitos pode ser descrita por uma sequência bem definida das etapas que descreveremos a seguir. Entretanto, deve-se observar que o método pode ser igualmente aplicado a **problemas isostáticos**, uma vez que o único pré-requisito à sua aplicação é que o problema seja linear. Sua aplicação num

problema isostático pode ser vantajosa em relação a outros métodos desde que seja possível decompor o problema em um conjunto de problemas auxiliares cuja solução seja a-priori conhecida ou seja mais simples de obter que o problema original.

Etapa 1 - Considere um problema como o da Figura 12.17a. Primeiramente identificamos as reações não nulas e as equações de equilíbrio não triviais e em seguida calculamos o **grau de redundância** ou grau de hiperestaticidade H como

$$H = N_R - N_{eq}, \tag{12.73}$$

onde N_R é o número de reações não nulas e N_{eq} o número de equações de equilíbrio não triviais. No caso da figura, temos claramente $N_R = 4$ (i.e., R_A, R_B, R_C e R_0) e $N_{eq} = 2$ (i.e., ΣV_y e ΣM_z), o que resulta em $H = 2$, o que significa que existem duas reações a mais que o número de equações estáticas disponíveis para resolve-las.

Etapa 2 - Decompor o problema em $H + 1 = 3$ problemas isostáticos, como ilustrados nas Figuras 12.17b a (d). O procedimento de criação desses problemas é descrito nas próximas etapas.

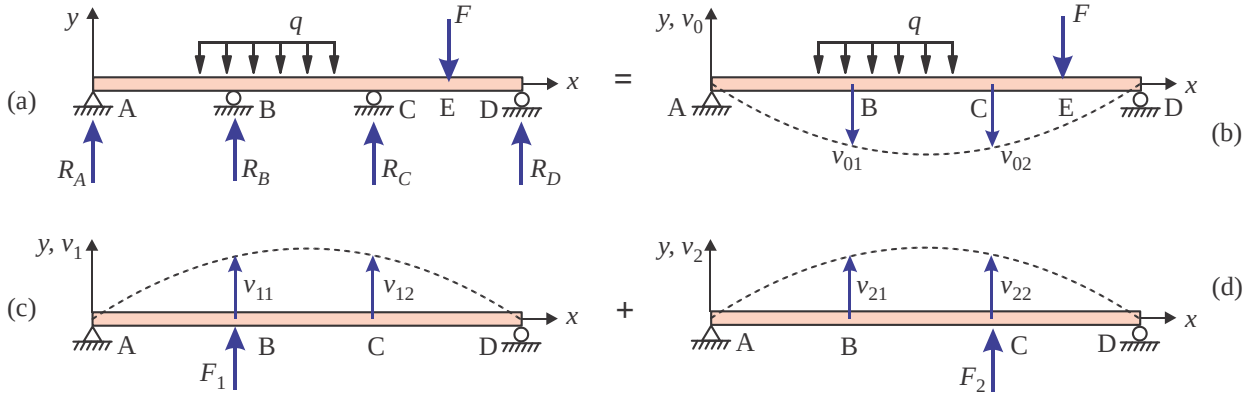


Figura 12.17: Ilustração da decomposição de um problema hiperestático (em (a)), em $H + 1 = 3$ problemas isostáticos (em (b), (c) e (d)).

Etapa 3 - Todos os problemas são construídos com **apoios idênticos**. Este novo conjunto de apoios é obtido pela remoção de $H = 2$ apoios do problema original. Claramente o conjunto de apoios resultante não é unívoco, uma vez que diferentes apoios podem ser escolhidos para serem eliminados. Note que aqui identificamos **um apoio** como **uma restrição em apenas um grau de liberdade**. Isso significa que numa seção engastada, por exemplo, teríamos dois apoios no plano, um de restrição a translação vertical e outro de restrição de rotação. No exemplo, dos quatro apoios originais devemos remover $H = 2$. Aqui escolhemos os apoios B e C, como poderíamos ter escolhido A e B, ou A e C, etc.

Etapa 4 - Deve-se em seguida definir o carregamento de cada problema. O carregamento do primeiro problema é o carregamento do problema original, como visto na 12.17b.

Etapa 5 - Os demais problemas têm uma única força cada um, aplicada na posição de cada apoio removido, e na direção da reação correspondente no problema original. Assim, se eliminarmos $H = 2$ apoios, teremos uma força incógnita F_1 aplicada ao primeiro apoio removido, B no exemplo, e F_2 no segundo apoio removido, C, como visto nas Figuras 12.17c e (d). Em geral teremos H forças. $F_1, F_2, ..., F_H$.

Etapa 6 - Tem-se então $H+1$ problemas isostáticos, porém apenas o primeiro possui carregamento com valores conhecidos. Os demais possuem cargas ainda incógnitas, $F_1, F_2, ..., F_H$. Entretanto, nesta etapa deve-se obter a curva elástica $v_0(x)$, em termos do carregamento conhecido, e as curvas elásticas, $v_1(x), \cdots, v_H(x)$, dos H problemas auxiliares, de forma literal em termos de F_1, F_2, ..., F_H.

Etapa 7 - De posse das curvas elásticas, **determinam-se expressões para o deslocamento** em cada um dos H apoios eliminados em termos de $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, ..., F_H\}$, para cada um dos problemas. Isso corresponde às expressões:

$$\begin{array}{rcll} v_{01} & = & v_{01}, & v_{11} = v_{11}(\mathbf{F}),\ \ldots\ ,\ v_{H1} = v_{H1}(\mathbf{F}), \\ v_{02} & = & v_{02}, & v_{12} = v_{12}(\mathbf{F}),\ \ldots\ ,\ v_{H2} = v_{H2}(\mathbf{F}), \\ & & \vdots & \\ v_{0H} & = & v_{0H}, & v_{1H} = v_{1H}(\mathbf{F}),\ \ldots\ ,\ v_{HH} = v_{HH}(\mathbf{F}). \end{array} \tag{12.74}$$

No exemplo temos que obter a solução dos seguintes três problemas para as seções B e C:

$$\begin{array}{lcl} \text{Problema 0} & \rightarrow & v_{0B} \text{ em função do carregamento original,} \\ & & v_{0C} \text{ em função do carregamento original,} \\ \text{Problema 1} & \rightarrow & v_{1B} = v_{1B}(F_1, F_2), \\ & & v_{1C} = v_{1C}(F_1, F_2), \\ \text{Problema 2} & \rightarrow & v_{2B} = v_{2B}(F_1, F_2), \\ & & v_{2B} = v_{2B}(F_1, F_2). \end{array} \tag{12.75}$$

Uma vez que o problema 0 é definido com o carregamento original, seus deslocamentos podem ser obtidos em seus valores numéricos. Para os demais problemas teremos apenas expressões em termos dos valores literais de $\mathbf{F}$.

Etapa 8 - **Escrever H equações de compatibilidade** de deslocamento, uma para cada apoio eliminado. No caso do exemplo, teríamos que buscar os particulares valores de F_1 e F_2 tal que

$$H \text{ equações} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_B = v_{0B} + v_{1B}(F_1, F_2) + v_{2B}(F_1, F_2) = 0, \\ v_C = v_{0C} + v_{1C}(F_1, F_2) + v_{2C}(F_1, F_2) = 0. \end{array} \right. \tag{12.76}$$

i.e., a soma dos deslocamentos no ponto B nos três problemas auxiliares deve ser igual ao deslocamento v_B no mesmo ponto do problema original. Como B no problema original é um apoio, deve-se ter $v_B = 0$. O mesmo é feito com o apoio C, etc, até completar H equações. Essas equações claramente encontram-se em termos dos H valores incógnitos de $\mathbf{F}$.

Etapa 9 - **Resolver o sistema de equações** de compatibilidade. Devido ao Princípio de Sobreposição dos Efeitos, os valores de $\mathbf{F}$ que satisfazem às condições (12.76) devem ser iguais às reações nos apoios correspondentes. No exemplo,

$$R_B = F_1, \qquad R_C = F_2. \tag{12.77}$$

Etapa 10 - **Determinar as demais reações.** Com a solução obtida até a etapa anterior, se tem H das reações do problema original, sobrando apenas N_{eq} reações a serem determinadas. Isso pode ser feito usando as N_{eq} equações de equilíbrio disponíveis. Alternativamente, se pode usar o Princípio de Sobreposição dos Efeitos para obter essas reações simplesmente como a soma das reações em cada um dos problemas auxiliares.

Etapa 11 - **Determinação dos esforços**. Os esforços no problema original podem ser obtidos de duas maneiras:

(a) Usando o método das seções da maneira usual, uma vez que todas as reações são agora conhecidas;

(b) Usando o Princípio de Sobreposição dos Efeitos. Isso é feito simplesmente obtendo primeiro as funções de esforços de cada um dos problemas auxiliares e adicionando as equações em cada seção.

Etapa 12 - **Determinação da curva elástica**.Isso também pode ser feito pelas duas formas indicadas na **etapa 11**, i.e., conhecidas as distribuições de M_z em cada trecho, a curva elástica

pode ser obtida pelo método de integração de $EIv'' = M_z$ como se fosse um problema isostático. Ou a curva elástica pode ser obtida como a soma das curvas elásticas de cada um dos problemas auxiliares.

12.4.1 Exemplo 12.7 – Um vão, método de sobreposição

Determinar as reações, os esforços e a curva elástica da viga da Figura 12.18a.

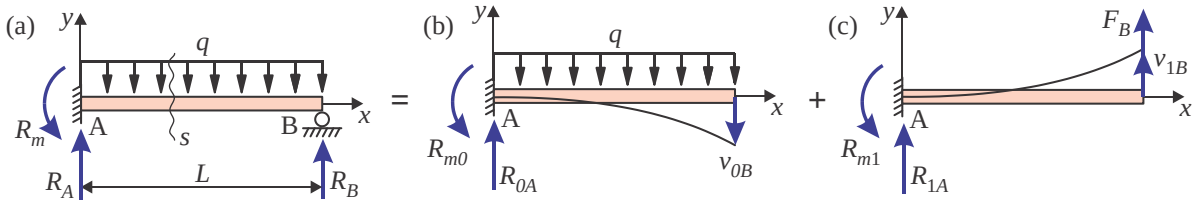


Figura 12.18: Viga do Exemplo 12.7. Em (a) são também indicados os eixos usados para a análise e as reações (ambos não fazem parte do enunciado do problema). (b) e (c) indicam a decomposição isostática do problema.

Solução:

Na Figura 12.18a também indicamos as $N_R = 3$ reações não nulas, e definimos um sistema de eixos para a análise. Como o número de equações de equilíbrio nesse problema é $N_{eq} = 2$, temos $H = 3 - 2 = 1$. Devemos então criar $H + 1 = 2$ problemas isostáticos, removendo $H = 1$ dos três apoios do problema original. O apoio escolhido aqui foi o suporte na seção B, o que gerou os dois problemas auxiliares vistos nas figuras (b) e (c). Como indicado na **etapa 4**, no primeiro problema aplicamos o carregamento original, Figura 12.18b, e no segundo uma força F_B na seção do apoio removido B, figura (c).

Ambos os problemas auxiliares são bastante simples e podem ser resolvidos rapidamente por integração, ou suas soluções podem ser obtidas diretamente numa tabela de soluções como aquela mostrada no **Apêndice**. Dali podemos obter o deslocamento em B para cada um dos problemas auxiliares:

$$v_{0B} = \frac{-qL^4}{8EI} \qquad \text{e} \qquad v_{1B} = \frac{F_B L^3}{3EI},$$

A equação de compatibilidade é

$$v_B = v_{0B} + v_{1B} = 0,$$

o que resulta na expressão para a reação em B:

$$\boxed{F_B = R_B = \frac{3qL}{8}} \tag{12.78}$$

As demais reações podem ser obtidas por dois métodos.

Método 1 - Equilíbrio global do problema original.

$$\begin{cases} \Sigma F_y & \rightarrow & R_A + R_B - qL = 0, \\ \Sigma M_z^A & \rightarrow & R_B L + R_m - \dfrac{qL^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A = 5qL/8, \\ R_m = qL^2/8. \end{cases} \tag{12.79}$$

Método 2 - Sobrepondo as reações dos problemas auxiliares, que são as seguintes:

$$\text{Problema 0} \rightarrow \begin{cases} R_{0A} = qL, \\ R_{m0} = qL^2/2. \end{cases} \qquad \text{Problema 1} \rightarrow \begin{cases} R_{1A} = -R_B = -3qL/8, \\ R_{m1} = qL^2/8. \end{cases} \tag{12.80}$$

A soma dessas reações resulta nas reações no problema original:

$$\begin{cases} R_A = R_{0A} - R_{1A} = qL - \dfrac{3qL}{8} = \dfrac{5qL}{8}, \\ R_m = R_{m0} - R_{m1} = \dfrac{qL^2}{2} - \dfrac{3qL^2}{8} = \dfrac{qL^2}{8}. \end{cases} \tag{12.81}$$

que são os mesmos valores obtidos com o **método 1**.

Os **esforços** de momento fletor poderiam ser obtidos também a partir dos esforços dos dois problemas, porém podemos obtê-los diretamente do problema original. Isso é feito da forma usual pelo método das seções, i.e., realizamos um corte numa seção genérica de coordenada x, como visto na Figura 12.18a, e construímos um diagrama de corpo livre como na Figura 12.19.

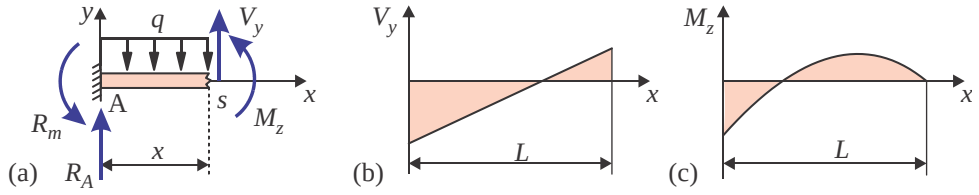


Figura 12.19: Diagrama de corpo livre para determinação dos esforços.

A condição de equilíbrio produz

$$\begin{cases} \Sigma F_y \to R_A + V_y - qx = 0, \\ \Sigma M_z^s \to M_z(x) + R_m - R_A x + \dfrac{qx^2}{2}. \end{cases}$$

Então os esforços cortantes de momento fletor numa seção genérica x são:

$$V_y(x) = qx - \frac{5qL}{8} \quad \text{e} \quad M_z(x) = \frac{q}{8}(5Lx - 4x^2 - L^2) \quad \to \quad M_z(0) = \frac{-qL^2}{8}. \tag{12.82}$$

Os diagramas correspondentes são ilustrados na Figura 12.19 para os dados do Exemplo 5, página 444, com carga $q = 1$ N/mm.

A **curva elástica** pode ser obtida por integração direta da equação diferencial (12.14) usando os momentos (12.82) ou, caso sejam disponíveis, sobrepondo as soluções dos problemas auxiliares. Mostraremos primeiramente, de forma abreviada, o processo de integração.

Para a **integração da equação diferencial** temos:

$$\begin{aligned} EI_z v'' &= M_z(x) = \frac{q}{8}\left(5Lx - 4x^2 - L^2\right), \\ EI_z v' &= \frac{q}{8}\left(\frac{5Lx^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - L^2 x\right) + C_1, \\ EIv &= \frac{q}{8}\left(\frac{5Lx^3}{6} - \frac{x^4}{3} - \frac{L^2x^2}{2}\right) + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{12.83}$$

As condições de **contorno do problema original** são:

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad \theta(0) = 0, \qquad M(L) = 0. \tag{12.84}$$

Como temos apenas duas constantes precisamos apenas duas condições. As condições $M_z(0) = M_z(L) = 0$ são agora inúteis, uma vez que a equação de momento já deve incorporar essa restrição. Assim, tomemos $v(0) = \theta(0) = 0$, que quando aplicadas rendem $C_1 = C_2 = 0$, tal que a curva elástica fica

$$v(x) = \frac{qx^2}{48EI_z}[5Lx - 2x^2 - 3L^2]. \tag{12.85}$$

Essa equação é plotada na Figura 12.20, para os seguintes dados: $q = 0,24$ N/m, $EI = 5 \cdot 10^{-2}$ Nm^2, $L = 1$ m.

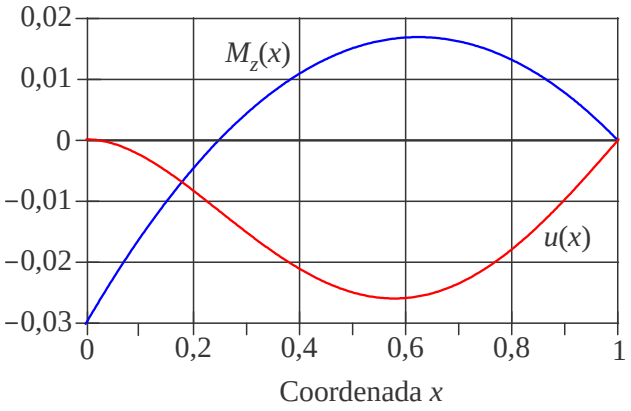


Figura 12.20: Resultados do Exemplo 12.7, com momento da eq.(12.82) e curva elástica de (12.85).

Para o **segundo método de obter uma curva elástica, por sobreposição**, tomamos do Apêndice as equações das curvas de cada um dos problemas auxiliares:

$$\begin{aligned} \text{Problema 0} \quad &\rightarrow \quad v_0(x) = \frac{q}{24EI_z}[-x^4 + 2Lx^3 - 6L^2x^2], \\ \text{Problema 1} \quad &\rightarrow \quad v_1(x) = \frac{R_B}{6EI_z}[x^3 - 3Lx^2]. \end{aligned} \tag{12.86}$$

Tomando a expressão de R_B em (12.78), somando as equações conforme

$$v(x) = v_0(x) + v_1(x),$$

e realizando simplificações chegamos à equação da curva elástica (12.85). Observe que os máximos das funções são os seguintes:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{qL^4}{185EI_z} \qquad \text{em } \bar{x} = 0,57846L, \\ M_{\max} &= M(0) = -\frac{qL^2}{8}, \quad \text{porém há um ponto de inflexão em } x = \frac{5L}{8} \text{ onde } M = \frac{9qL^2}{128}. \end{aligned}$$

12.5 O método de multicorpos

Existem diversas situações em que a estrutura é constituída por um conjunto de partes de formato simples (barras, vigas, molas, placas de formato simples), submetida a carregamentos simples (cargas concentradas ou distribuídas). O método é viável quando cada parte pode constituir um problema cuja solução já seja anteriormente conhecida, ou que possa ser rapidamente obtida.

As **etapas do método** são as seguintes:

1. Montar **diagramas de corpo livre de cada parte**, indicando as forças atuantes e os deslocamentos nos pontos de contato com as outras partes;

2. Montar **equações de compatibilidade** geométrica para os deslocamentos de cada ponto de interface entre as partes;

3. Montar **equações de equilíbrio** entre os esforços de cada contato;

4. **Buscar** ou deduzir **as soluções** que relacionem, **em cada componente**, os esforços com os deslocamentos;

5. Montar um sistema de equações dos itens 3 e 4, e resolver para os deslocamentos e esforços nos pontos de contato.

A aplicação do método é ilustrada em alguns exemplos a seguir.

12.5.1 Exemplo 12.8 - Aplicação do método de multicorpos

As vigas AB e BC são montadas em balanço, e uma mola linear de rigidez k é montada indeformada entre as extremidades B e C das vigas como mostrado na Figura 12.21. As vigas têm materiais e seções transversais idênticas e comprimentos L_1 e L_2. Determine os deslocamentos dos pontos B e C. Note que esse é um problema hiperestático.

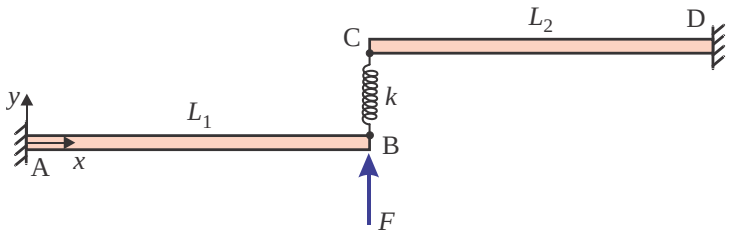


Figura 12.21: Dados do Exemplo 12.8.

Solução:

A estrutura como um todo é hiperestática, e fazemos sua decomposição nos três diagramas de corpo livre mostrados na Figura 12.22. Em cada componente, podem atuar forças externas, como R_{MA} e R_A como no apoio A da viga AB, e **forças internas à estrutura**, como a força F_m devida à mola. As forças internas sempre atuam em pares de ação-reação, cada uma atuando sobre um dos dois elementos em contato. No caso, a força F_m atuando em B da viga AB, tem sua reação (sentido oposto), atuando na extremidade B da mola. A mola, por sua vez, suporta uma outra força na sua extremidade oposta C. Por equilíbrio essa força também deve ser F_m. Da mesma forma, a reação da força na mola em C atua na extremidade C da viga CD, e finalmente se tem as reações em D.

Observa-se que o comportamento de cada elemento é simples: são duas vigas em balanço sob carga concentrada aplicada na extremidade. A resposta cinemática é que a forças F e F_m atuando na extremidade B da viga AB faz com que ela sofra um deslocamento transversal v_B na extremidade B. Na viga CD, a força F_m também gera um deslocamento transversal v_C na extremidade. Dessa forma, cada extremo da mola sofre valores distintos de deslocamento, que se traduz por uma variação do seu comprimento que está associado à força F_m. A solução de cada um dos três problemas é bastante conhecida e já é disponível no Apêndice. Assim, podem-se montar as seguintes três equações para o sistema:

$$\begin{cases} \text{Viga AB} & \longrightarrow & v_B = \dfrac{(F - F_m)\, L_1^3}{3EI}, \\ \text{Mola BC} & \longrightarrow & v_B - v_C = \dfrac{F_m}{k}, \\ \text{Viga CD} & \longrightarrow & v_C = \dfrac{F_m L_2^3}{3EI}. \end{cases} \tag{12.87}$$

Substituindo a primeira e a terceira equação na segunda obtém-se

$$\boxed{F_m = \frac{F L_1^3}{L_1^3 + L_2^3 + 3EI/k}} \tag{12.88}$$

Com isso, v_B e v_C são diretamente obtidos de (12.87).

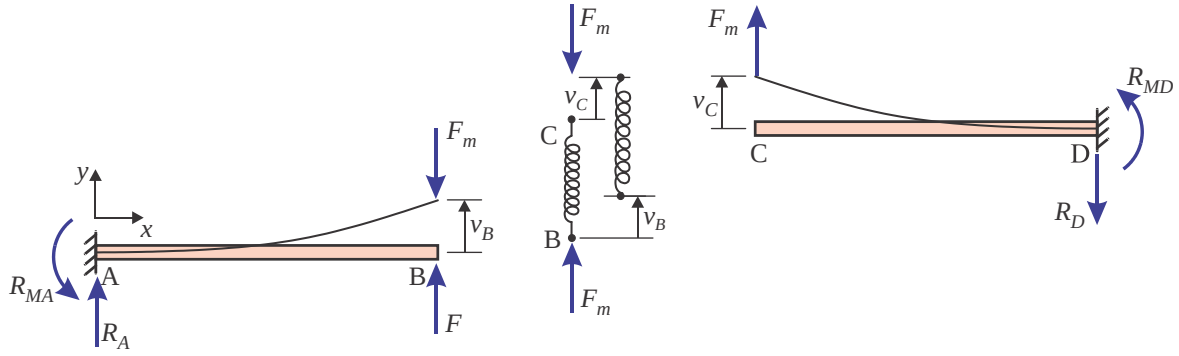


Figura 12.22: Diagramas de corpo livre do Exemplo 8.

As **reações e esforços** em cada componente também podem ser agora diretamente obtidos a partir das condições de equilíbrio em cada componente, a partir da Figura 12.22:

$$\text{Viga AB} \longrightarrow \begin{cases} R_A = F - F_m, \\ R_{MA} = (F - F_m)\, L_1, \\ M_{AB}(x) = (F - F_m)\,(L_1 - x)\,. \end{cases} \qquad \forall x \in [0; L_1].$$

$$\text{Viga CD} \longrightarrow \begin{cases} R_D = F_m, \\ R_{MD} = F_m L_2, \\ M_{CD}(x) = F_m\,(x - L_1)\,. \end{cases} \qquad \forall x \in [L_1; L_1 + L_2]. \tag{12.89}$$

Na mola o esforço normal é $N_m = -F_m$. Com os esforços determinados, as tensões podem ser facilmente determinadas em cada ponto da estrutura. Conhecida a força F_m, ela pode ser usado para dimensionar a mola, e as rações permitem o dimensionamento dos apoios.

Observação: Quando as equações acima forem usadas com valores numéricos, é necessário testar se estes estão na faixa de validade da teoria usada. As deflexões em ambas as vigas deve ser pequenas o suficiente, i.e., v_B, $v_C \lesssim h/2$, onde h é a altura da seção.

12.6 Problemas diversos

12.6.1 Exemplo 12.9 - Montagem de conjunto viga-mola com deformação inicial

Consideramos o problema de uma mola elástica linear de constante k que deve ser montada na extremidade de uma viga em balanço, como na Figura 12.23a. Na configuração inicial, indeformada, existe uma distância v_0 entre a extremidade C da mola e a seção B da viga. Determine a força na mola na configuração montada como na Figura 12.23b.

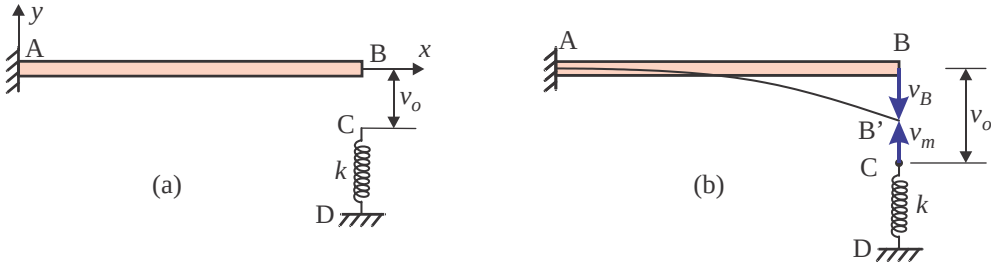


Figura 12.23: Conjunto viga-mola do Exemplo 12.9.

Solução:
Na configuração deformada o conjunto apresenta os deslocamentos e as forças indicadas na Figura 12.23b. O processo de montagem consiste em aplicar forças na extremidade C da mola e B da viga, até que ambos os pontos se encontrem numa posição intermediaria B'. Se a força aplicada em C na mola for F_m, na configuração montada a reação dessa força deve ser aplicada na seção B da viga como na Figura 12.24a. A mola elonga-se v_m, com uma força $F_m = kv_m$, e a viga deflete v_B na extremidade B pela ação da força F_m exercida pela mola. A **equação de compatibilidade geométrica** é (em valores absolutos):

$$|v_B| + v_m = v_0. \tag{12.90}$$

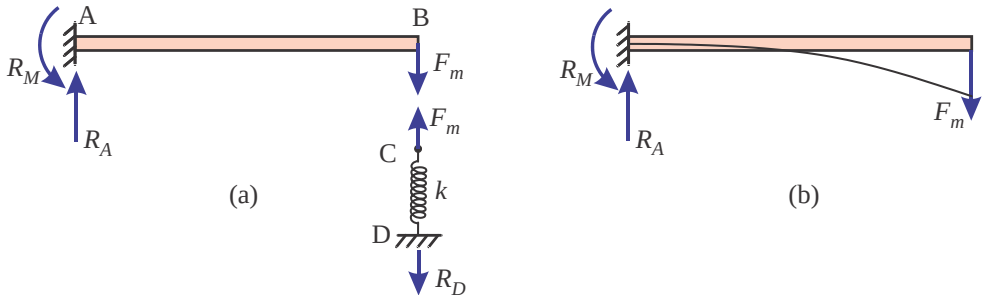


Figura 12.24: (a) Diagramas de corpo livre da viga e da mola; (b) Diagrama de corpo livre da viga do Exemplo 12.9.

A deflexão máxima da viga em balanço sob uma carga na extremidade pode ser obtida do Apêndice como:

$$v_B = -\frac{F_m L^3}{3EI}. \qquad \text{Como } F_m = kv_m \qquad \rightarrow \qquad v_B = -\frac{kv_m L^3}{2EI}. \tag{12.91}$$

Então (12.90) leva à solução

$$\begin{aligned} kv_m \frac{L^3}{3EI} + v_m &= v_0 \qquad \Longrightarrow \boxed{v_m = \frac{v_0 3EI}{(kL^3 + 3EI)}}, \\ v_B &= -\frac{kL^3 v_0}{kL^3 + 3EI} \qquad \text{e} \qquad F_m = kv_m. \end{aligned} \tag{12.92}$$

12.6.2 Exemplo 12.10 - Conjunto viga-mola sob deformação inicial

Consideramos o Exemplo 12.9, em que a mola já esteja montada na extremidade da viga em balanço. Após a montagem, uma força F é aplicada na extremidade da viga, como na Figura 12.25a. Determine o deslocamento $v(L)$ na extremidade da viga, como resultado das forças de montagem e de F. Determine o esforço $M_z(x)$ na viga e a força F_m na mola.
Solução:
A força da mola ainda é dada por $F_m = kv_m$, onde v_m é a deflexão da mola, porém seu valor é diferente daquele da equação (12.92). A força externa F é suportada em parte pela viga e em parte pela mola, i.e.,

$$F = F_v + F_m. \tag{12.93}$$

A deflexão v_B na extremidade da viga é proveniente de F_v, de forma que sua deflexão é

$$v_B = (F - F_m)\frac{L^3}{3EI}. \tag{12.94}$$

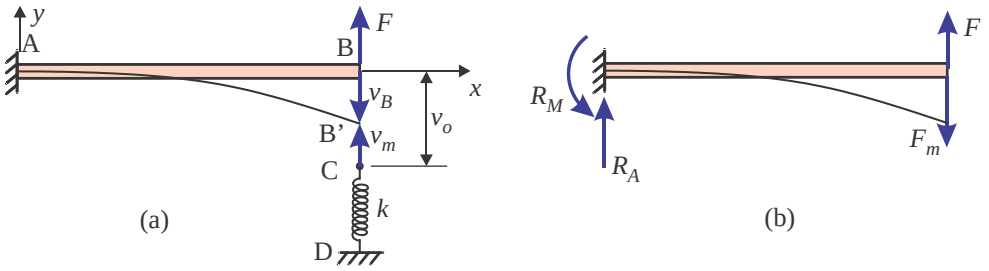


Figura 12.25: Conjunto do Exemplo 12.10.

A **equação de compatibilidade** continua sendo a eq. (12.90), de forma que:

$$-v_B + v_m = v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad -(F - kv_m)\frac{L^3}{3EI} + v_m = v_0, \tag{12.95}$$

Isolando v_m tem-se

$$v_m = \frac{v_0 + FL^3/3EI}{kL^3/3EI + 1}, \tag{12.96}$$

que levado à relação de compatibilidade (12.95), produz a deflexão na extremidade da viga

$$v_B = \frac{(F - kv_0)L^3}{kL^3 + 3EI} \tag{12.97}$$

O esforço de momento fletor na viga depende de F_v, que pode ser obtido de (12.93) como $F_v = F - F_m = F - kv_m$. Então, $M_z(x) = F_v(L - x) = (F - kv_m)(L - x)$. Nota-se que na ausência de mola, $k = 0$, se tem que a única rigidez no sistema é devida à viga, e (12.97) produz a deflexão em B na forma esperada para viga em balanço: $v_B = FL^3/3EI$, como no Apêndice.

Observação 1 - Rigidez de viga
Uma viga em balanço com uma força F_v na extremidade pode ser considerada uma **mola flexural**. A rigidez de uma mola é, por definição,

$$\boxed{k_v \equiv \frac{F_v}{v_B}} \tag{12.98}$$

Uma vez que o deslocamento é dado por $v_B = F_v L^3/3EI$, a rigidez da viga é dada por

$$\boxed{k_v = \frac{3EI}{L^3}} \tag{12.99}$$

Observação 2 - Rigidez do conjunto viga-mola
Para o exemplo, com a configuração da Figura 12.25, a rigidez do sistema viga-mola é dada por $k_s = F/v_B$. Usando (12.97), a rigidez fica

$$k_s = \frac{F\left(kL^3 + 3EI\right)}{(F - kv_0)L^3} \tag{12.100}$$

Observação 3 - Rigidez de molas em paralelo
Considere duas molas em paralelo, com comprimentos iguais e rigidezes k_1 e k_2. A força total F é suportada por uma parte F_1 na mola 1 e F_2 na mola 2, tal que $F = F_1 + F_2$. Uma vez que as deflexões em cada uma das duas molas são idênticas, u, tem-se que $F_1 = k_1 u$ e $F_2 = k_2 u$. Então, $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\, u$. Assim, a rigidez do conjunto é dada por $k = k_1 + k_2$. Para um conjunto de n molas em paralelo, a rigidez do conjunto é

$$\boxed{k = \sum_{j=1}^{n} k_j} \tag{12.101}$$

Observação 4 - Rigidez de molas em série
Considere duas molas em série, com rigidezes k_1 e k_2. O deslocamento total no conjunto é a soma dos elongamentos de cada mola, i.e., $u = u_1 + u_2$. Uma vez que as forças suportadas em cada uma das duas molas são idênticas, F, tem-se que $u_1 = F/k_1$ e $u_2 = F/k_2$. Então, $u = u_1 + u_2 = F/k_1 + F/k_2$. Assim, a rigidez do conjunto, $k = F/u$, é dada por

$$k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{12.102}$$

Para um conjunto de n molas em série, a rigidez do conjunto é

$$\boxed{k = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}\right)^{-1}} \tag{12.103}$$

Observação 5 - Rigidez do conjunto viga-mola
Para o conjunto viga-mola da Figura 12.25, para o caso em que a **folga inicial é nula**, $v_0 = 0$, a rigidez do sistema é dada por (12.100) (com k_m sendo a rigidez da mola)

$$k = \frac{\left(k_m L^3 + 3EI\right)}{L^3} \tag{12.104}$$

Comparando essa equação com as expressões da rigidez de uma viga em balanço e de uma mola, observa-se que essa expressão corresponde à rigidez de duas molas em paralelo, como visto na eq.(12.101) com $k_1 = k_v = 3EI/L^3$ e $k_2 = k_m$.

12.6.3 Exemplo 12.11 - Viga e mola flexural

A viga AB da Figura 12.26a está conectada a uma mola flexural de rigidez k, dada em momento fletor por radiano de rotação, i.e., k tem unidades [Nm/rad]. A mola é considerada sem dimensões, tal que se pode ignorar a distância entre sua fixação na base no ponto O, e o ponto A na extremidade da viga. Determinar a deflexão da seção B. Dados k, L, E e I.

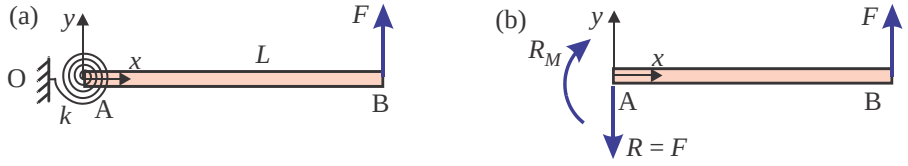


Figura 12.26: (a) Modelo de viga suportado por mola flexural; (b) diagrama de corpo livre da viga.

Solução:

As forças atuando na viga são vistas na Figura 12.26b. As reações e esforços de flexão são: $R_M = FL$ e $M_z(x) = R_M - Fx$. O problema pode ser facilmente resolvido utilizado os resultados do Apêndice para viga em balanço. Entretanto, utilizaremos o método de integração para apontar certos aspectos nas condições de contorno. Assim, a integração da equação diferencial da curva elástica produz:

$$\begin{aligned} EIv'' &= M_z = R_M - Fx, \\ EI\theta &= R_M x - \frac{Fx^2}{2} + C_1, \\ EIv &= R_M \frac{x^2}{2} - \frac{Fx^3}{6} + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{12.105}$$

Observa-se que nesse problema **a viga não é engastada na extremidade**. A seção A é apoiada na mola, de forma que ela pode se rotacionar no valor dado por $\theta(0) = M_z(0)/k$. Consideraremos que o suporte em A impeça movimentos de translação, mas não de rotação. Então, as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 \qquad &\longrightarrow \qquad \boxed{C_2 = 0} \\ \theta(0) = \frac{M_z(0)}{k} = \frac{FL}{k} = \frac{C_1}{EI} \qquad &\Longrightarrow \boxed{C_1 = F\frac{LEI}{k}} \end{aligned}$$

Substituindo as constantes, tem-se a curva elástica, o deslocamento na seção B e a rotação na seção A:

$$\boxed{\begin{aligned} EIv(x) &= F\left[\frac{LEI}{k}x + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] \\ v_B &= \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL^2}{k}, \qquad \theta_A = \frac{FL}{k} \end{aligned}}$$

O termo FL^2/k em v_B é a parcela adicional de deslocamento devidA à mola. Esse é o deslocamento que ocorreria se a viga fosse indeformável e a flexibilidade do sistema se devesse apenas à mola. O caso da viga perfeitamente engastada corresponde a uma mola de rigidez infinita.

12.7 Exercícios

Em todos os problemas, usar $E = 200$ GPa, e seção transversal com $I_z = 10^2$ mm^4. Após encontrar as soluções, aplicar nas equações os testes possíveis para verificar a consistência, usando os requisitos de continuidade e equações diferenciais de equilíbrio. As deduções necessárias nos problemas podem ser feitas com mais facilidade com o auxílio de um manipulador simbólico de equações, como Mathematica ou Maple. Os cálculos numéricos envolvidos também podem ser feitos com auxílio desses programas, ou também do Matlab ou Excel.

Problemas isostáticos

Para as vigas dos Exercícios 1 a 38, use o método de integração, com a equação diferencial da curva elástica de 2^a ordem, para resolver o seguinte:

a. Determine as reações.

b. Determine as equações de esforços de momento fletor em cada trecho.

c. Identifique as condições de contorno e de compatibilidade.

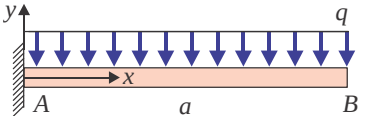
d. Identifique o sistema matricial $\mathbf{MC} = \mathbf{F}$ que gera as constantes de integração, i.e., a matriz $\mathbf{M}$ e o vetor $\mathbf{F}$, em forma literal.

e. Determine os valores numéricos das constantes $\mathbf{C}$ tomando entre os seguintes dados numéricos aqueles que sejam adequados do seguinte conjunto: $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $F = 100$ N, $m = m_1 = m_2 = 2$ kNmm, $q = q_o = 1$ N/mm.

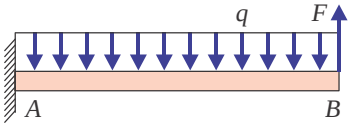
f. Determine a expressão da curva elástica em cada trecho, de forma numérica.

g Determine os valores de deslocamento e rotação em cada uma das seções marcadas (A, B, C, etc.).

12.1

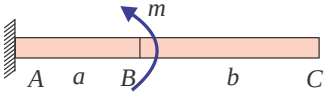


12.2

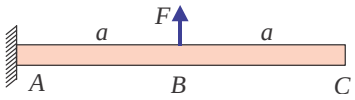


12.3

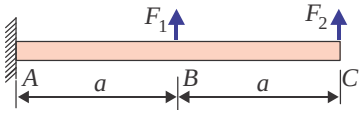
12.4



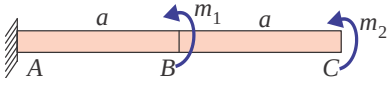
12.5



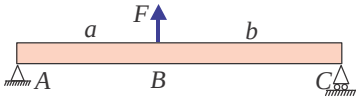
12.6



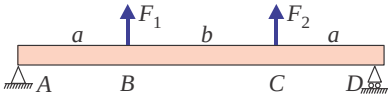
12.7



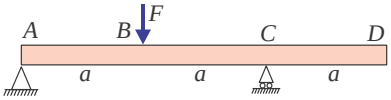
12.8



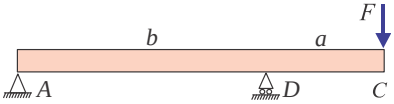
12.9



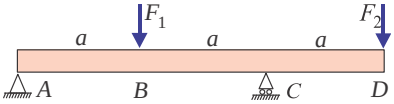
12.10



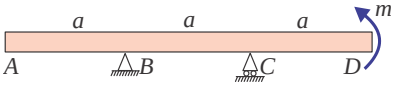
12.11



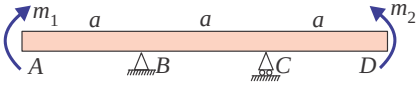
12.12



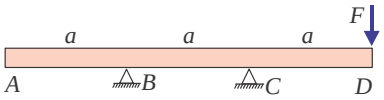
12.13



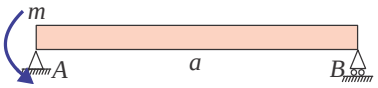
12.14



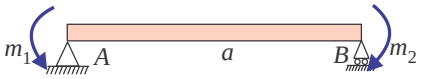
12.15



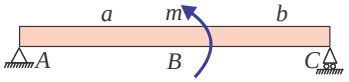
12.16



12.16.1

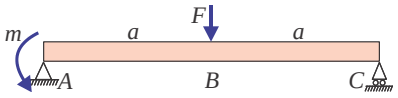


12.16.2

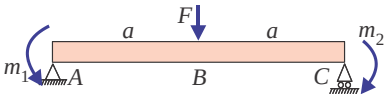


12.16.3 Resolva o Exercício 12.16.2 para $b = a$.

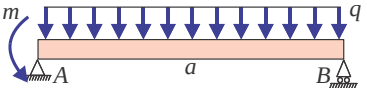
12.17



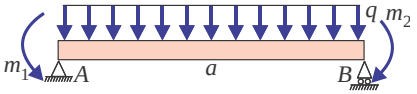
12.18



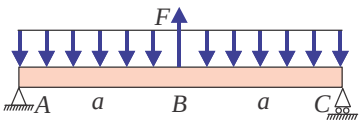
12.19



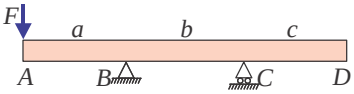
12.20



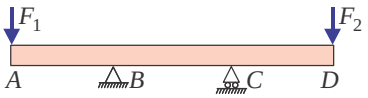
12.21



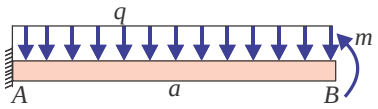
12.22



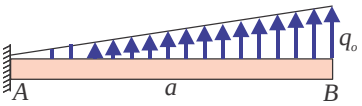
12.23



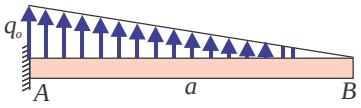
12.24



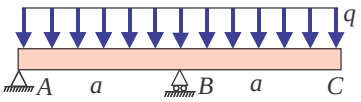
12.25



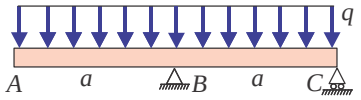
12.26



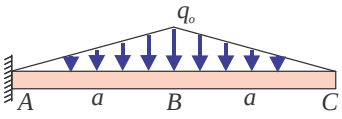
12.27



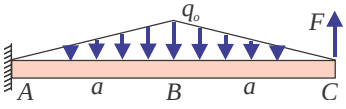
12.28



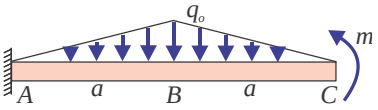
12.29



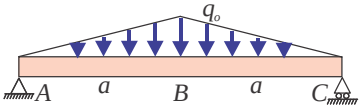
12.30



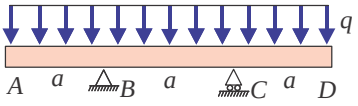
12.31



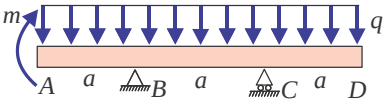
12.32



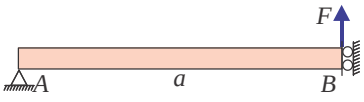
12.33



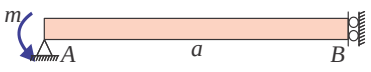
12.34



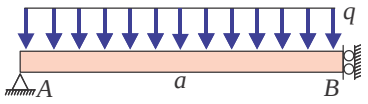
12.35



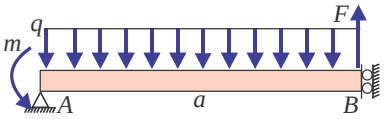
12.36



12.37



12.38



Problemas hiperestáticos

Para as vigas dos Exercícios 39 a 69, use o método de integração, com a equação diferencial da curva elástica de 4^a ordem, para resolver o seguinte:

a. Identifique as condições de contorno e de compatibilidade.

b. Identifique o sistema matricial $\mathbf{MC} = \mathbf{F}$ que gera as constantes de integração, i.e., a matriz $\mathbf{M}$ e o vetor $\mathbf{F}$, em forma literal.

c. Determine os valores numéricos das constantes $\mathbf{C}$ tomando entre os seguintes dados numéricos aqueles que sejam adequados do seguinte conjunto: $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $F = F_1 = F_2 = 100$ N, $q = q_o = 1$ N/mm.

d. Para os Exercícios 39 a 42, $m = m_1 = m_2 = 2$ kNmm, e para os demais, $m = m_1 = m_2 = 5$ kNmm.

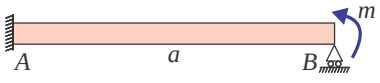
e. Determine a expressão da curva elástica em cada trecho de forma numérica.

f. Determine as expressões dos esforços cortante e de momento fletor em cada trecho, de forma numérica.

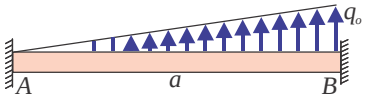
g. Determine os valores de deslocamento, rotação e esforços em cada uma das seções marcadas (A, B, C, etc.).

h. Determine os valores numéricos das reações nos apoios.

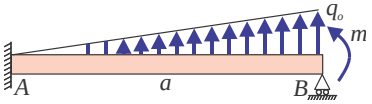
12.39



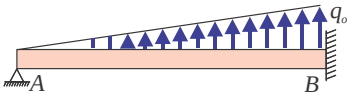
12.40



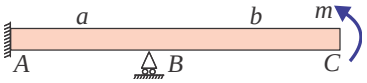
12.41



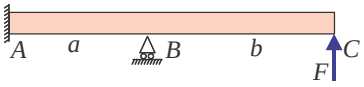
12.42



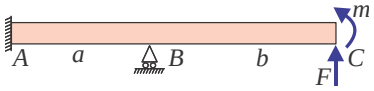
12.43



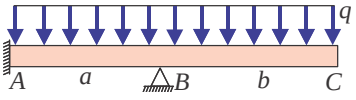
12.44



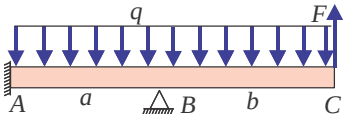
12.45



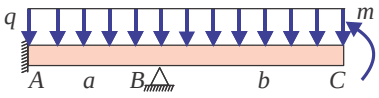
12.46



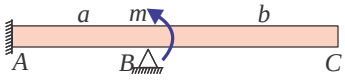
12.47



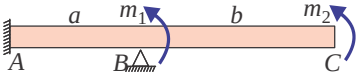
12.48



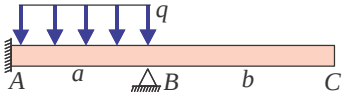
12.49



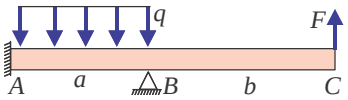
12.50



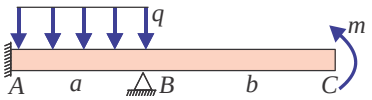
12.51



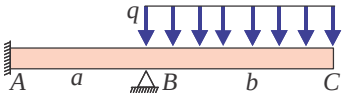
12.52



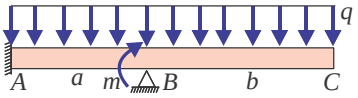
12.53



12.54

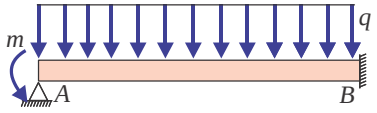


12.55

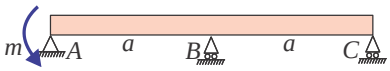


12.56

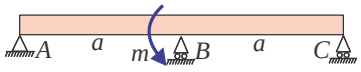
12.57



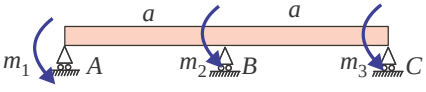
12.58



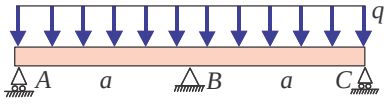
12.59



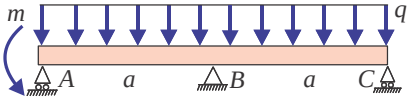
12.60



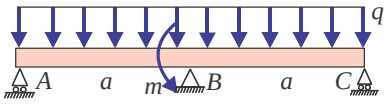
12.61



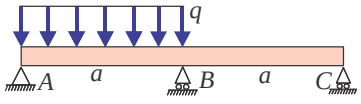
12.62



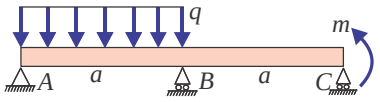
12.63



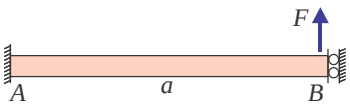
12.64



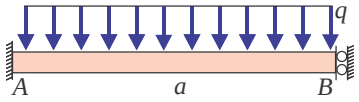
12.65



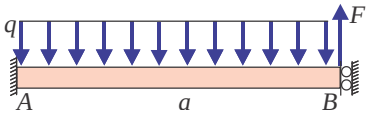
12.66



12.67



12.68



Método de sobreposição em problemas isostáticos

Em cada um dos Exercícios 69 a 82 é indicado um exercício da lista anterior (Exercícios 1 a 68), que deve ser resolvido usando o método de sobreposição. Cada um desses exercícios pode ser decomposto em dois ou mais problemas auxiliares já resolvidos na própria lista através do método de integração, ou usando uma das soluções prontas do Apêndice. Para cada um dos Exercícios 71 a 82, obter o seguinte:

a. Identifique cada um dos problemas auxiliares, com suas forças aplicadas e reações, em forma literal.

b. Identifique a(s) relações de compatibilidade geométrica.

c. Determine as reações e as equações dos esforços no problema original, em forma literal e/ou numérica.

d. Determine a equação da curva elástica em forma numérica.

12.69 Refazer Exercício 2.

12.70 Refazer Exercício 6.

12.71 Refazer Exercício 9.

12.72 Refazer Exercício 12.

12.73 Refazer Exercício 7.

12.74 Refazer Exercício 17.

12.75 Refazer Exercício 18.

12.76 Refazer Exercício 21.

12.77 Refazer Exercício 23.

12.78 Refazer Exercício 24.

12.79 Refazer Exercício 30.

12.80 Refazer Exercício 31.

12.81 Refazer Exercício 34.

12.82 Refazer Exercício 38.

Método de sobreposição em problemas hiperestáticos

Em cada um dos Exercícios 83 a 95 é indicado um exercício da lista anterior (Exercícios 1 a 68), que deve ser resolvido usando o método de sobreposição. Cada um desses exercícios pode ser decomposto em dois ou mais problemas auxiliares já resolvidos na própria lista através do método de integração, ou usando uma das soluções prontas do Apêndice. Para cada um dos Exercícios 83 a 95, obter o seguinte:

a. Identifique cada um dos problemas auxiliares, com suas forças aplicadas e reações, em forma numérica.

b. Identifique a(s) relações de compatibilidade geométrica.

c. Determine as reações nos apoios.

12.83 Refazer Exercício 39.

12.84 Refazer Exercício 41.

12.85 Refazer Exercício 40.

12.86 Refazer Exercício 43.

12.87 Refazer Exercício 44.

12.88 Refazer Exercício 45.

12.89 Refazer Exercício 46.

12.90 Refazer Exercício 47.

12.91 Refazer Exercício 48.

12.92 Refazer Exercício 49.

12.93 Refazer Exercício 67.

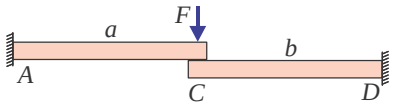
12.94 Refazer Exercício 66.

12.95 Refazer Exercício 68.

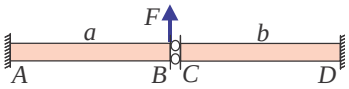
Problemas multicorpos

Em cada um dos Exercícios 96 a 99 determine o deslocamento na seção B e as reações.

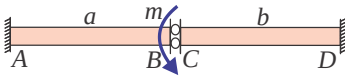
12.96



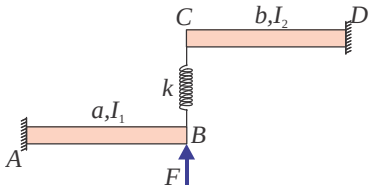
12.97



12.98



12.99



Uso de condição de simetria

Em cada um dos Exercícios 100 a 108 é indicado um exercício da lista anterior (Exercícios 1 a 68), que deve ser resolvido apenas em uma metade, usando o plano de simetria. Identifique as condições de contorno, de compatibilidade e de simetria.

12.100 Refazer Exercício 21.

12.101 Refazer Exercício 32.

12.102 Refazer Exercício 33.

12.103 Refazer Exercício 61.

12.104 Refazer Caso 4 do Apêndice.

12.105 Refazer Caso 7 do Apêndice.

12.106 Refazer Caso 11 do Apêndice.

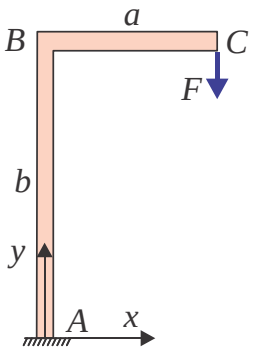
12.107 Refazer Caso 15 do Apêndice.

12.108 Refazer Caso 17 do Apêndice.

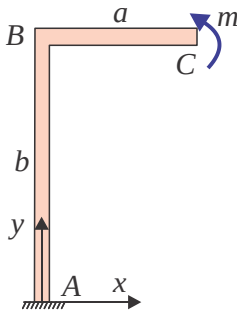
Exercícios adicionais

Determine o deslocamento na seção de aplicação de carga, na direção desta, usando as soluções de curva elástica do Apêndice.

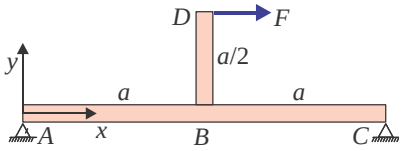
12.109



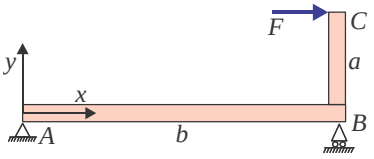
12.110



12.111



12.112



12.113 Deduza a equação (12.101) de rigidez de um conjunto de n molas em paralelo.

12.114 Deduza a equação (12.103) de rigidez de um conjunto de n molas em série.

Capítulo 13

Estabilidade de colunas

O dimensionamento e a análise de estruturas são feitos por critérios de falhas baseados num dos seguintes aspectos:

- **Tensões** máximas, que são relacionadas a valores de **resistência** do material associado a um conjunto de modos de falha;
- **Deslocamentos** máximos, para critério de falha por **rigidez**;
- **Estabilidade**.

Praticamente todo o presente livro trata de modos de falhas associados aos dois primeiros princípios de dimensionamento. O presente capítulo faz uma introdução dos conceitos de estabilidade estrutural, através do estudo de barras retas e alguns dos procedimentos de dimensionamento que produzam segurança quanto a esse modo de falha.

A instabilidade de barras é um fenômeno associado às tensões de compressão que ocorram em vigas submetidas a cargas axiais de compressão além das cargas de flexão, e mesmo nos problemas que envolvem apenas de flexão e torção. O fenômeno de instabilidade, em sua forma geral, ocorre nos mais diversos tipos de **estruturas delgadas**, em que uma dimensão muito menor que as demais, do tipo **barra, placa**, **casca ou arco**, e que uma ou mais das **tensões principais são compressivas**. Então, cilindros de parede delgada sob pressão externa e tubos sob torção, ou mesmo vigas sob flexão plana em que a seção transversal é muito alta e delgada, são situações que podem apresentar instabilidade caso as cargas excedam um certo valor, denominado **carga crítica**. A Figura 13.1 ilustra dois exemplos de instabilidade plástica em tubos de seção retangular e circular, de parede delgada. Inicialmente os tubos são retos. Quando submetidos a uma carga compressiva axial que excede certo limite, eles entram em colapso, inicialmente desenvolvendo ondulações nas superfícies laterais, i.e., afastam-se da configuração regular inicial, de cilindros retos de parede lisa. Com o crescimento da carga, as flexões locais elevam o nível de tensão acima do início do escoamento do material, e a peça começa a plastificar até atingir as formas mostradas.
A Figura 13.2 ilustra a seção transversal de um cilindro de seção circular de parede delgada, submetido a pressão externa. Para valores de pressão abaixo de certo limite, a seção permanece circular, sob um estado uniforme de tensões compressivas. A partir de certo limite de pressão, a estrutura atinge um ponto de instabilidade, em que a configuração muda quase que instantaneamente, da forma circular inicial, para uma forma que possui uma região flexionada, como mostrado. O estado de tensões na forma flexionada é tal que seus valores situam-se muito acima da resistência do material. A consequência, é que, o momento em que a estrutura muda de configuração, em geral significa também o colapso do tubo.

Note que esse é o modo de falha principal em estruturas das mais diversas, como **tubulações subterrâneas** de esgoto, em que a pressão interna é nula e a pressão externa é aquela proveniente da carga do solo e da altura de coluna d'água da água no solo. Similarmente, a estrutura de um **submarino** é escolhida de com seção cilíndrica circular de forma a reduzir os efeitos de flexão inicial e melhorar a estabilidade.

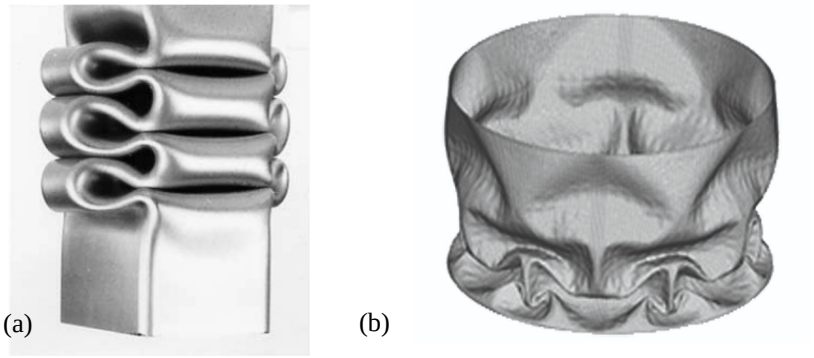


Figura 13.1: Exemplo de instabilidade plástica em tubos de seção retangular e circular, de parede delgada, sob carga compressiva axial.

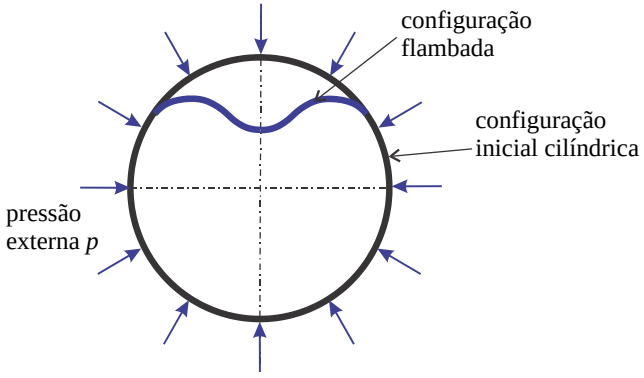


Figura 13.2: Instabilidade em um cilindro de seção circular de parede delgada, submetido à pressão externa.

Equilíbrio e estabilidade. O fenômeno de instabilidade não é algo exclusivo a estruturas, mas, aparentemente, a todo sistema, de qualquer espécie, quer seja econômico, financeiro, biológico, geológico etc. A Figura 13.3 mostra uma ilustração clássica que ajuda a diferenciar dois conceitos: equilíbrio e estabilidade. Tem-se três superfícies cilíndricas, duas curvas e uma plana, com uma **bola em equilíbrio** na posição A em todas as três superfícies. Enfatiza-se que nos três casos, a bola encontra-se em equilíbrio. Entretanto, é visível que algo distingue a situação da bola em cada um dos casos. Esse fator é a estabilidade, i.e., num caso o **equilíbrio** é **estável**, noutro é **instável** ou **neutro**. O que distingue um sistema em equilíbrio estável de um instável, é seu comportamento quando submetido a uma **perturbação**. Perturbação é entendido como qualquer fator que modifica a configuração, por exemplo, uma força F, mesmo que muito pequena, que afasta um pouco a bola da posição A para uma posição B vizinha. **O que ocorre no sistema quando a perturbação é removida, é o que define a estabilidade ou instabilidade do sistema**.

1. Se, após a remoção da perturbação, o sistema volta sozinho à sua configuração inicial de equilíbrio, o sistema é estável, como no caso da Figura 13.3a, i.e., a bola volta sozinha da posição B para A.

2. Se, após a remoção da perturbação, o sistema se afasta progressivamente da sua configuração inicial de equilíbrio, o sistema é estável, como no caso da Figura 13.3c, i.e., a bola continua se afastando de A, indo de B para C, etc. Note-se que, possivelmente, o sistema pode encontrar uma outra configuração de equilíbrio, mas não será A.

3. Se, após a remoção da perturbação, o sistema encontra equilíbrio na última configuração atingida sob a ação da perturbação, ele é neutro, oi indiferente, como na Figura 13.3, i.e., a bola foi perturbada da posição A para B, e depois ela permanece em equilíbrio em B.

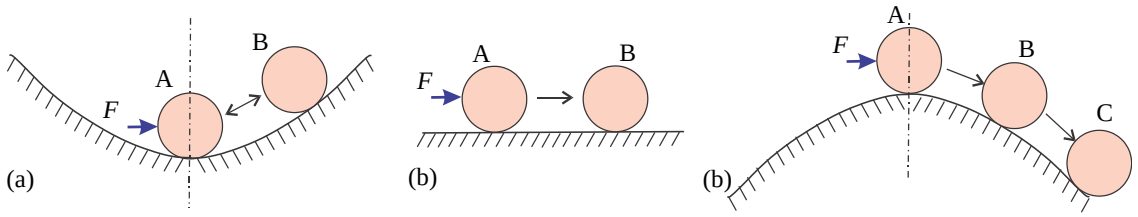


Figura 13.3: Ilustração qualitativa de equilíbrios de tipo (a) estável, (b) indiferente ou neutro, (c) instável.

Exemplo 13.1 – Instabilidade de barra rígida

Consideremos um problema distinto, como o caso clássico de uma barra rígida rotulada numa extremidade A e apoiada por uma mola de rigidez k em B, como ilustrado na Figura 13.4. Na configuração inicial AB, uma força compressiva P é aplicada, como uma força horizontal F. A configuração de equilíbrio AD pode ser facilmente determinada, porém busca-se determinar o comportamento da barra quando $F = 0$. Se P fosse trativo, a barra se deformaria axialmente e permaneceria vertical, qualquer que fosse o valor de P, até atingir algum modo de falha de material, como o início de escoamento. Entretanto, para P compressivo, um fenômeno de instabilidade pode ocorrer, dependendo do valor de P, tal que a barra pode afastar-se bruscamente da configuração vertical e desenvolver um movimento de rotação como ilustrado, para AD, com u crescendo de forma ilimitada para um valor constante de P.

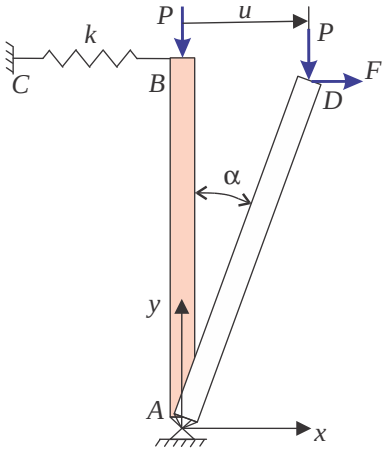


Figura 13.4: Flambagem de uma barra rígida de comprimento L.

A análise pode ser feita considerando o fenômeno separado em algumas etapas.

1. Consideramos a configuração de equilíbrio inicial AB, submetida apenas a P, i.e., com $F = 0$.

2. Nessa configuração AB, **aplica-se uma perturbação** definida por algum valor de F. Nessa configuração AD, o equilíbrio de momentos em relação a z é

$$\sum M_z^A \quad \rightarrow \quad Pu + FL\cos\alpha - kuL = 0. \tag{13.1}$$

A barra se encontra em equilíbrio, e essa equação provê uma relação entre P e u, para dados valores de F, k e L. Restringimos a presente dedução à situação de pequenas rotações. Dessa forma, pode-se aproximar $\alpha \approx 0$, e $\cos\alpha \approx 1$. A Figura 13.5 ilustra curvas para certos valores de perturbação F. Por exemplo, para $P = 1.000$ N, o deslocamento é $u = 1$ mm. As curvas

são hipérboles, que tendem assintoticamente ao patamar $P = P_{crit}$ (= 3.000 N no exemplo) mostrado na figura, conforme $F \to 0$. Deve-se notar que as curvas não seguem ao infinito para u como sugerido na figura. Quando a barra se afasta de sua condição vertical, ela pode encontrar uma outra configuração de equilíbrio, no ângulo $\alpha = 180°$, i.e., na posição pendurada para baixo, no caso em que P será trativo. As curvas na Figura 13.5 foram construídas para serem válidas apenas até pequenos valores de α.

3. Para um dado valor de P, a questão que se coloca é se o equilíbrio alcançado é estável ou não. A resposta a isso é definida pelo comportamento do sistema quando F é retornado a zero. Se a barra voltar sozinha, sob a ação de P e da mola, à sua posição original AB, essa configuração AB é estável sob aquele valor de P. Do contrário, a configuração AB é instável.

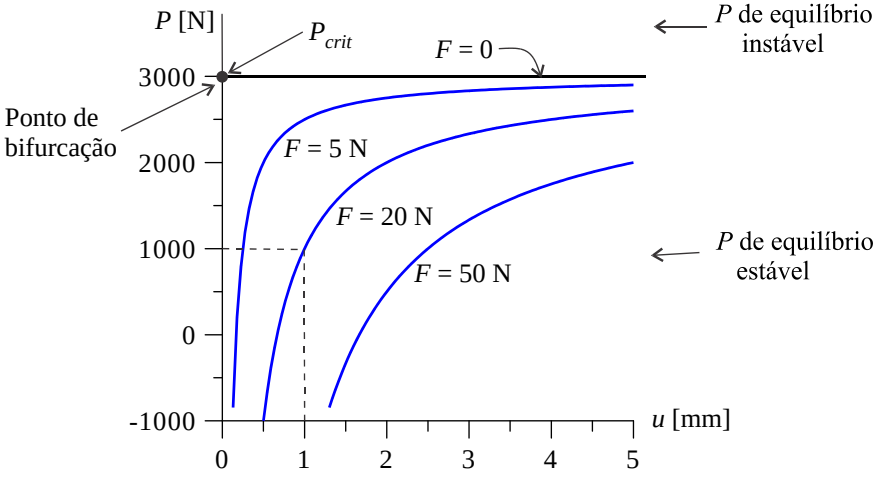


Figura 13.5: Diagrama $P \times u$ para a barra rotulada sob carga axial e perturbação F. Usados $L = 100$ mm, $k = 30$ N/mm.

Podemos observar melhor considerando a equação de equilíbrio da etapa 2, eq.(13.1), permite escrever

$$P = kL - \frac{FL}{u}. \tag{13.2}$$

Quando se retorna F a zero após a deformação transversal, momentaneamente haverá um desequilíbrio de forças.

- Se $P < kL$, então a força na mola é maior que o efeito de P, de forma que a mola vai fazer a barra voltar à posição original AB.

- Se $P > kL$, o momento Pu será maior que o momento devido à mola, kLu, de forma que a mola não conseguirá retornar a barra, e esta continuará aumentando sua rotação. Então se teria que a configuração AB está em equilíbrio instável. Note que todo o processo é fisicamente dinâmico, embora não estejamos considerando explicitamente as forças de inércia.

- O valor $P = kL$ é um valor de transição na carga axial, denominado P_{crit}. Então, se a força aplicada na barra for $P < P_{crit} = kL$, ela estará em equilíbrio estável, e permanecerá vertical, qualquer que seja o valor de P dentro desse limite. Essa região é mostrada no gráfico da Figura 13.5 entre as duas linhas horizontais.

- Por outro lado, se a força aplicada na barra for $P > P_{crit} = kL$, ela estará em equilíbrio instável. Nesse ponto, é interessante se observar um certo aspecto. A barra está vertical, sob uma força axial compressiva $P > P_{crit}$. Se nenhuma perturbação for aplicada, ela permanecerá vertical, qualquer que seja o valor de $P > P_{crit}$. Entretanto, no **mundo real, sabe-se que perturbações sempre existem**. Podem ser provenientes de uma pequena excentricidade na

carga, uma pequena região de heterogeneidade do material, um pequeno erro de retilineidade da barra, ou um veículo pesado que passe na rua e gere uma pequena vibração que atinja a barra. Então, considera-se que **um sistema instável obrigatoriamente entrará em colapso**, já no momento de aplicação da carga, pois sempre existirão perturbações aplicadas sobre ele que desencadearão o processo. Então, instabilidade significa falha.

Consideremos uma outra formulação para o problema. Tomamos a barra em sua configuração vertical AB, sob P compressivo e $F = 0$. Em vez de perturba-la com uma força transversal F, usemos um deslocamento infinitesimal δu como perturbação, i.e., um deslocamento imposto. O equilíbrio de momentos em torno de A é representado por

$$(P - kL)\,\delta u = 0 \tag{13.3}$$

Essa equação possui duas soluções distintas: (a) $\delta u = 0$ (a barra fica vertical) e P pode ser qualquer. Entretanto, o interesse é verificar se existe uma outra configuração de equilíbrio. (b) Essa segunda configuração considera que $\delta u \neq 0$, é arbitrário embora infinitesimal, tal que o termo entre parênteses em (13.3) deve ser nulo para satisfazer a igualdade, i.e., deve-se ter $P_{crit} = kL$. Então, para P_{crit}, existem duas possíveis soluções, uma com a barra vertical, e outra com a barra rotacionada por um δu arbitrário. Esse ponto de P_{crit} é denominado **ponto de bifurcação** na literatura. No gráfico da Figura 13.5, se $P < P_{crit}$ a resposta é o segmento vertical $u = 0$ do eixo das ordenadas. Para $P = P_{crit}$, a resposta pode ser tanto $u = 0$, quanto qualquer valor u ao longo da segunda linha horizontal do gráfico.

13.0.1 Exemplo 13.2 - "Snap-through" em barras no plano

No exemplo da Figura 13.4 a barra era absolutamente rígida, e a flexibilidade do sistema era gerada pela mola, o que permitia a cinemática do conjunto. Nas situações reais de estruturas, geralmente o próprio componente é considerado flexível, possuindo sua própria rigidez. Consideremos o problema clássico ilustrado na Figura 13.6, em que duas barras iguais são rotuladas entre si e nos apoios, e é submetida a uma força F. Consideramos o material das barras elastico linear ideal. Conforme F cresce, o sistema se deforma gradualmente, tal que a rótula B se move para D, descrevendo um deslocamento vertical v. Experimentalmente se observa que existe um determinado ponto (F, v) com $v < H$, em que um aumento infinitesimal de F faz o sistema saltar da configuração em que D (que está acima do eixo x), para uma configuração em que E se encontra abaixo, como na figura.

Buscaremos obter uma formulação para relacionar F com v ao longo de todo o trajeto do sistema, e em seguida aplicaremos para os valores $L = 100$ mm, $A = 100$ mm, $E = 200$ GPa, $\sigma_E = 500$ MPa, e ângulo inicial $\alpha = 5°$ e $\alpha = 8°$.

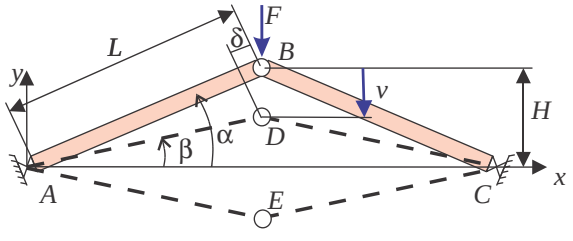


Figura 13.6: Exemplo de instabilidade por "snap-through" em um sistema plano de duas barras.

Solução:

Esse é um problema não linear, então é necessário que o equilíbrio seja representado numa configuração deformada arbitrária, como a linha tracejada ADC na Figura 13.6. Usando o método das seções, se pode representar o equilíbrio vertical da rótula B:

$$2f\ \text{sen}\beta = F, \tag{13.4a}$$

onde f é o esforço normal na barra, considerado aqui como positivo em compressão. β é o ângulo da barra na configuração deformada. As relações geométricas da deformação são:

$$l\cos\beta = L\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad l\ \text{sen}\beta = L\text{sen}\alpha - v, \tag{13.5}$$

onde l é o comprimento deformado da barra, tal que $l = L-\delta$, sendo δ a variação do seu comprimento. Fazendo o quadrado de cada uma das equações e somando uma a outra e reorganizando, obtemos

$$\delta = L - \sqrt{L^2 - 2Lv\ \text{sen}\ \alpha + v^2}. \tag{13.6}$$

De $(13.5)_2$ obtém-se $\text{sen}\beta = (L\text{sen}\alpha - v)/l$.

Agora usamos relações constitutivas elásticas, para relacionar o esforço f com a variação de comprimento δ: $\delta = fl/EA$. Logo, se pode definir a rigidez axial de uma das barras como $k = EA/L$, enquanto as barras estiverem na faixa elástico linear. Então, $f = k\delta$, que levado à equação de equilíbrio (13.4a) junto com (13.6), leva a

$$F = \frac{(\text{sen}\alpha - v/L)}{2kL}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2v\ \text{sen}\ \alpha/L + (v/L)^2}} - 1\right] \tag{13.7}$$

Essa é a solução do problema, a relação entre v e F. Para os dados numéricos, essa função pode ser plotada como na Figura 13.7 para cada um dos dois ângulos iniciais α das barras. Cada curva é construída como num ensaio de **controle de deformação**, i.e., o valor de F é ajustado para mais ou menos, de forma a produzir cada valor prescrito de deslocamento u. Entretanto, num ensaio de **controle de força**, a força aplicada é incrementada progressivamente (i.e., monotonicamente) a partir de zero. Nesse caso, se consideramos uma das curvas, por exemplo para $\alpha = 8°$, a curva observada seria o crescimento ao longo do trecho 0A, onde atinge o máximo local em A. Nesse ponto, um incremento infinitesimal de F faz a estrutura saltar, quase que imediatamente, do deslocamento do ponto A para o ponto B. Esse é o fenômeno de instabilidade conhecido na literatura como "**snap-through**".

Os pontos A e B são definidos no exemplo, pela tensão $\sigma_A = \sigma_B = 209,6$ MPa, e $u_A = 5,928$ mm e $u_B = 30,094$ mm. Após a instabilidade, um crescimento da carga gera um crescimento do deslocamento a partir do ponto B, seguindo a C e prosseguindo. Entretanto, deve-se observar que o crescimento da curva fica limitado à tensão de início de escoamento do material, que foi considerado elastoplástico ideal. O trecho da curva acima do patamar σ_E (a linha horizontal no gráfico do exemplo), é apenas extrapolação teórica de um modelo elástico linear.

Note que o ponto em que ocorre a instabilidade, em $u_A = 5,928$ mm, não corresponde à posição horizontal das barras, mas ocorre antes. Para confirmar isso, nota-se que o movimento da rótula central na estrutura da Figura 13.6 para atingir a linha entre os apoios é $H = L\text{sen}\alpha = L\text{sen}8° = 13,92$ mm. Então, quando a rótula B percorreu apenas $u_A = 5,928$ mm a instabilidade já ocorre, bastante antes do valor H que alinharia as duas barras.

Um problema análogo ao da treliça do Exemplo 2, é o caso de um arco sob pressão uniforme, como na Figura 13.8a. A resposta do deslocamento transversal depende do nível de curvatura do arco, aqui representado por h/L. Para o caso extremo de uma placa plana, em que $h = 0$, o crescimento da pressão gera um estado de tensões trativas crescentes, com preponderância da componente de membrana. Assim, resposta $p \times v$, mostrada na curva preta da Figura 13.8b, é monotonicamente crescente. Para valores de h/L acima de certo limite, a resposta tem a forma qualitativa da curva azul, com a presença de "snap-through", indicado ali pelo salto entre os pontos A e B. É um comportamento similar ao da treliça do Exemplo 2. Entretanto, no caso do arco, existe um valor limite de h/L, abaixo do qual a instabilidade não ocorrerá, como ilustrado na curva vermelha.

Como ilustrado no início dessa seção, as classes de problemas estruturais que envolvem instabili-

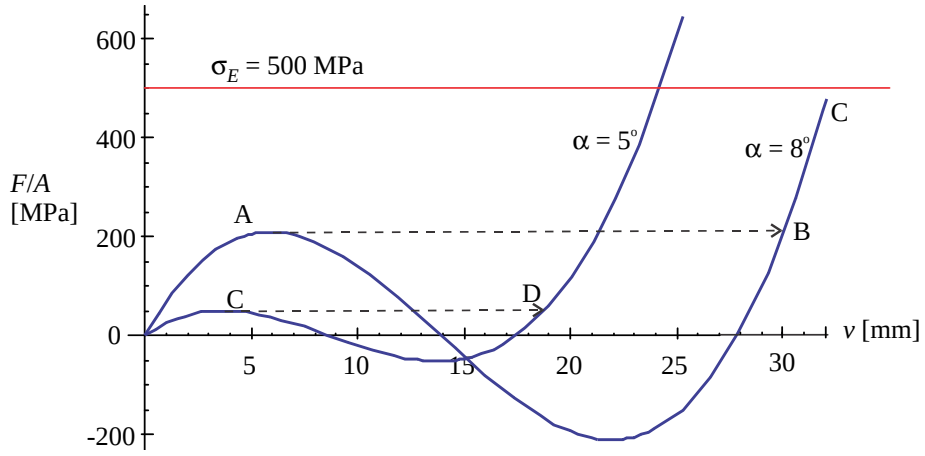


Figura 13.7: Relação tensão média numa barra F/A versus deslocamento v para dois ângulos iniciais α.

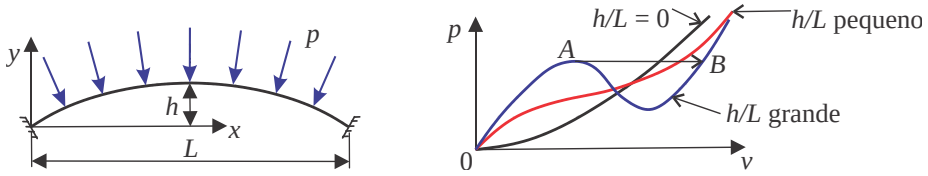


Figura 13.8: (a) arco plano sob pressão p uniforme. (b) curvas p versus deslocamento vertical v na seção central, para três tipos de coeficientes h/L.

dade são muito diversas, envolvendo todos os tipos de componentes de parede delgada, como barras, arcos, placas e cascas, submetidos a carregamentos que gerem **estados de tensão em que uma ou mais componentes de tensão principal seja compressivas**. Entretanto, a complexidade da maioria desses problemas os tornam inviáveis de serem tratados num texto introdutório. Em vez disso, é usual considerar, como um primeiro passo, apenas os problemas de instabilidade em barras retas, como faremos no restante do presente capítulo.

As falhas em barras causadas por instabilidade, comumente denominadas de **flambagem**, acontecem repentinamente e, assim, são perigosas e potencialmente catastróficas para a estrutura como um todo. O escopo deste capítulo é o estudo de barras e vigas submetidas a cargas de compressão e flexão.

Flambagem em estruturas de barras é o principal modo de falha em estruturas como torres de transmissão e guindastes, por exemplo, ilustrados na Figura 13.9, em que se observa um caso de colapso de uma torre de transmissão elétrica.

1. O início do processo de flambagem frequente é elástico, como nos modelos descritos no resto do presente capítulo, e que são usados no processo de cálculo de projeto e dimensionamento da estrutura.

2. Após a primeira fase da instabilidade, um subconjunto das barras da estrutura afasta-se levemente da sua configuração reta, e se desenvolvem tensões de flexão, que se caracteriza por reduzir drasticamente a rigidez da estrutura e aumentar os níveis de tensão locais nas seções.

3. A partir desse ponto, frequentemente o processo de deformação continua, numa fase denominada **pós-flambagem**, tal que, a partir de certo ponto, as tensões ultrapassam o limite de escoamento do material. Com a continuidade, a falha final ocorre por **plastificação** completa das seções de um grande conjunto de barras da estrutura.

Observação 1: **Não será estudado o problema de flambagem lateral que ocorre em vigas feitas de perfis tipo U, I ou cantoneiras.**

Figura 13.9: Ilustração de estrutura de barras num guindaste, e torre de transmissão elétrica em colapso.

Observação 2: Normalmente, na literatura de engenharia civil, o comportamento de flambagem é característico de **colunas**, i.e., elementos retos, longos, construídos de forma vertical, que suportam cargas axiais compressivas. Por outro lado, em máquinas, diversos tipos de componentes estruturais são **barras**, que quando submetidas a carga axial compressiva, podem apresentar falha por flambagem. Ao longo do presente capítulo, usaremos indistintamente ambas as nomenclaturas, coluna e barra, para indicar o elemento esbelto sob compressão sendo analisado.

13.1 Equação diferencial para viga-coluna

Consideremos uma viga submetida a uma carga axial de compressão P e uma carga distribuída transversal arbitrária de intensidade $p(x)$, como mostrado na Figura 13.10.

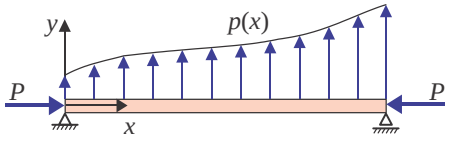


Figura 13.10: Viga sob carga transversal e axial de compressão.

Sob a ação da carga transversal, ocorre o deslocamento na direção y, denominado $v(x)$. Uma vez que a seção transversal se afasta do eixo de referência x, a força axial P gera um momento fletor que contribui para aumentar a deflexão transversal $v(x)$ (Figura 13.11). Então, a deflexão transversal é devida à carga transversal, e também à carga axial.

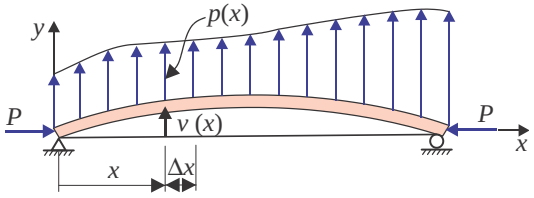


Figura 13.11: Configuração deformada de viga sob flexão e carga axial.

Nas deduções de todo o resto do livro se faz uso da hipótese que os deslocamentos sejam pequenos, de forma que a configuração deformada é bastante similar à indeformada. Isso permitia que o equilíbrio fosse sempre feito considerando o carregamento aplicado na configuração indeformada. Uma consequência, é que cargas axiais não provocavam deflexões transversais. Entretanto, o estudo de flambagem exige que se considere de forma mais precisa o fenômeno. Isso é feito representando o **equilíbrio das forças quando atuando na configuração deformada**, o que é coerente com a realidade física. Isso permite identificar adequadamente a resposta de flexão devida ao carregamento axial. Deste modelo, isola-se um elemento de viga de comprimento Δx, como na Figura 13.12, em que se considera o segmento em sua configuração deformada, i.e., sob translação transversal $v(x)$ e

flexão. Nota-se que a extensão do corte é Δx ao longo da direção axial, porém a extensão do trecho de viga tem comprimento ΔS. Observando a força axial P, nota-se que esta não é colinear entre as seções a esquerda e direita, de forma que agora se tem um binário de forças.

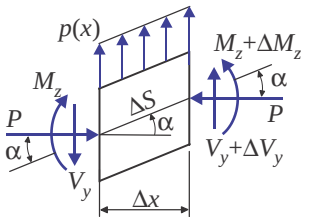


Figura 13.12: Equilíbrio de um elemento diferencial de viga-coluna em sua configuração deformada.

Do equilíbrio de forças na direção y tem-se:

$$(V_y + \Delta V_y) - V_y + p\,(x)\,\Delta x = 0. \tag{13.8}$$

Simplificando e dividindo a expressão por Δx e fazendo o limite $\Delta x \longrightarrow 0$, chega-se a expressão:

$$\boxed{\frac{dV_y}{dx} = -p\,(x)} \tag{13.9}$$

que é uma das equações diferenciais de equilíbrio de viga, obtida em (2.43), página 40.

Do equilíbrio de momentos em torno do eixo z, tem-se:

$$M_z - V_y\Delta x - (M_z + \Delta M_z) - P\Delta s \text{ sen } \alpha + p\,(x)\,\frac{\Delta x^2}{2} = 0. \tag{13.10}$$

Como o ângulo α é muito pequeno, pode-se considerar sen $\alpha \cong \alpha = dv/dx$ e $\Delta x \cong \Delta s$. Assim, simplificam-se alguns termos, divide-se a expressão por Δx, e toma-se o limite da expressão para $\Delta x \longrightarrow 0$. Com isso a equação fica:

$$\boxed{\frac{dM_z}{dx} = -V_y - P\frac{dv}{dx}} \tag{13.11}$$

Observa-se que essa é a mesma equação diferencial de equilíbrio de viga, obtida em (2.44), página 40, porém com uma modificação em virtude da carga axial, o termo Pdv/dx. Esse termo corresponde ao efeito da força P axial à viga.

Toma-se a equação da linha elástica, eq.$(12.17)_1$,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z, \tag{13.12}$$

e substitui-se na equação do equilíbrio de momentos, eq.(13.11), o que resulta em:

$$-V_y = \frac{d}{dx}\left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\right] + P\frac{dv}{dx}. \tag{13.13}$$

Caso o material e a **seção transversal seja uniforme**, i.e., que momento de inércia não variem com a posição x, a equação acima é reescrita como:

$$-V_y = EI\frac{d^3v}{dx^3} + P\frac{dv}{dx}. \tag{13.14}$$

Por sua vez, essa equação pode ser substituída na equação (13.9), resultando:

$$\boxed{\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p(x)}{EI} \text{ onde } \lambda^2 \text{ é definido por } \lambda^2 = \frac{P}{EI}} \tag{13.15}$$

Observa-se que P é positivo nessa análise de flambagem, em que a barra é comprimida. Observa-se que (13.15) é idêntica à equação diferencial da curva elástica vista na eq. $(12.17)_3$, exceto pelo segundo termo, associado à carga axial P.

Outra descrição diferencial. A equação diferencial ordinária de quarta ordem em $v(x)$, eq.(13.15), pode ser substituída por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, em termos de $M_z(x)$ e $v(x)$. Para isso, realiza-se em (13.15) uma substituição de variáveis: $d^2v/dx^2 = M_z/EI$, o que resulta no sistema:

$$\boxed{\frac{d^2M_z}{dx^2} + \lambda^2 M_z = p(x) \qquad \text{e} \qquad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z(x).} \tag{13.16}$$

13.1.1 Solução da equação homogênea

Busca-se a solução do problema homogêneo associado a $(13.16)_1$, $(p(x) = 0)$, ou seja

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} + \lambda^2 M_z = 0. \tag{13.17}$$

Da teoria das equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes, sabe-se que essa equação é satisfeita para qualquer função na forma $M_z(x) = Ce^{mx}$, sendo C e m números a serem determinados. Um resumo do processo de solução é incluído no Apêndice 17.2. A prova que essa função satisfaz a equação diferencial consistem em simplesmente fazer a substituição, o que resulta em $Ce^{mx}m^2 + \lambda^2 Ce^{mx} = 0$. Como C e e^{mx} são não nulos, obtém-se a condição para que a função seja solução:

$$m^2 + \lambda^2 = 0. \tag{13.18}$$

Essa é a chamada **equação característica** associada ao problema diferencial. Uma vez que $\lambda^2 > 0$, as raízes deste polinômio são complexas, dadas por:

$$m_1 = \lambda i \qquad \text{e} \qquad m_2 = -\lambda i, \tag{13.19}$$

onde i é a unidade imaginária. Desta forma, prova-se que a solução homogênea é:

$$\boxed{M_z(x) = c_1^* \cos \lambda x + c_2^* \text{sen } \lambda x} \tag{13.20}$$

onde as constantes c_1^* e c_2^* devem ser determinados a partir das condições de contorno da viga. Em seguida passa-se à solução da segunda equação diferencial em (13.16), tomando M_z de (13.20). Isso resulta em

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{c_1^*}{EI}\text{cos}\lambda x + \frac{c_2^*}{EI}\text{sen } \lambda x. \tag{13.21}$$

Integrando duas vezes tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{c_1^*}{\lambda EI}\text{sen}\lambda x - \frac{c_2^*}{\lambda EI}\text{cos } \lambda x + c_3, \\ v(x) &= -\frac{c_1^*}{\lambda^2 EI}\text{cos } \lambda x - \frac{c_2^*}{\lambda^2 EI}\text{sen}\lambda x + c_3 x + c_4. \end{aligned} \tag{13.22}$$

Coletam-se as constantes de forma a simplificar a notação para:

$$\boxed{v(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \text{sen}\lambda x + c_3 x + c_4} \tag{13.23}$$

$$\text{onde } c_1 = -\frac{c_1^*}{\lambda^2 EI} \qquad \text{e} \qquad c_2 = -\frac{c_2^*}{\lambda^2 EI}. \tag{13.24}$$

Observa-se que (13.23) é a **solução homogênea** da equação de quarta ordem $\dfrac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \dfrac{d^2v}{dx^2} = 0$, eq. (13.15). Assim, para posterior uso, pode-se escrever as derivadas da expressão acima como segue:

$$\begin{aligned} & v(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \text{ sen } \lambda x + c_3 x + c_4, \\ \theta(x) = & \frac{dv}{dx} = -c_1 \lambda \text{ sen } \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x + c_3, \\ \frac{M_z(x)}{EI} = & \frac{d^2v}{dx^2} = -c_1 \lambda^2 \cos \lambda x - c_2 \lambda^2 \text{ sen } \lambda x, \\ -\frac{V_y(x)}{EI} = & \frac{d^3v}{dx^3} = c_1 \lambda^3 \text{sen } \lambda x - c_2 \lambda^3 \cos \lambda x. \end{aligned} \tag{13.25}$$

13.1.2 Exemplo 13.3 - Carga de flambagem em barra bi-rotulada

Considere uma barra perfeitamente reta (Figura 13.13) de seção transversal uniforme, sob carga axial compressiva perfeitamente centrada nos centroides, com apoios que permitem a rotação no plano. Determine a carga de flambagem da barra.

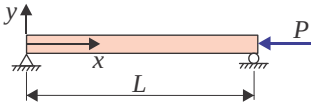


Figura 13.13: Barra bi-rotulada do Exemplo 13.3.

Solução:

Uma vez que a carga distribuída é nula, a solução deste problema é dada pela eq. (13.25):

$$v(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \text{sen } \lambda x + c_3 x + c_4. \tag{13.26}$$

As quatro condições de contorno da barra, para apoios simples, são:

$$v(0) = v(L) = 0, \qquad \text{e} \qquad M_z(0) = M_z(L) = 0.$$

Aplicando cada uma dessas condições em (13.26), pode-se montar o seguinte sistema de equações algébricas em termos das quatro constantes $c's$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \longrightarrow 0 = c_1 \cos 0 + c_2 \text{sen } 0 + c_3 0 + c_4, \\ v(L) &= 0 \longrightarrow 0 = c_1 \cos \lambda L + c_2 \text{sen } \lambda L + c_3 L + c_4, \\ M_z(0) &= 0 \longrightarrow 0 = -c_1 \lambda^2 \cos 0 - c_2 \lambda^2 \text{sen } 0, \\ M_z(L) &= 0 \longrightarrow 0 = -c_1 \lambda^2 \cos \lambda L - c_2 \lambda^2 \text{sen } \lambda L. \end{aligned}$$

Em forma matricial o sistema fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \lambda L & \text{sen } \lambda L & L & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 \cos \lambda L & -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{13.27}$$

ou ainda, de forma compacta,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \tag{13.28}$$

Para que este sistema tenha solução não-trivial, (a **solução trivial** é $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, que ocorre no caso de ausência de deslocamentos transversais) é necessário que o **determinante** da matriz seja **nulo**. Assim, busca-se o valor de λ que torna a **matriz singular**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \lambda L & \text{sen } \lambda L & L & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 \cos \lambda L & -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{13.29}$$

Deve-se lembrar que nesse problema, o valor da carga axial P (implícito na definição de λ) é a incógnita do problema, i.e., estamos buscando a carga que leva a barra à flambagem. Uma vez que λ é definido a partir de P, por $\lambda^2 = P/EI$, conforme a eq.(13.15), buscaremos o valor de λ que permite uma solução de deslocamento transversal não nulo. Matematicamente, isso se manifesta num valor de λ que torna a matriz A singular. Assim, o determinante da matriz pode ser calculado e simplificado para

$$\det A = -\lambda^4 L \text{ sen } \lambda L = 0. \tag{13.30}$$

Como a estrutura é real, $L > 0$, deve-se ter que:

$$\text{sen } \lambda L = 0. \tag{13.31}$$

Existem infinitos valores de $\lambda_n L$ que garantem que isto ocorra:

$$\lambda_n L = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi, ..., \text{ ou seja: } \rightarrow\ \lambda_n L = n\pi \qquad \text{onde,} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{13.32}$$

Uma vez que $\lambda_n^2 = P_n/EI$, pode-se escrever que

$$\sqrt{\frac{P_n}{EI}} L = n\pi. \tag{13.33}$$

Como a incógnita do problema é a carga que causa instabilidade, pode-se explicitar P_n como

$$P_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} EI. \tag{13.34}$$

Tem-se então diversos valores para a carga P, um para cada valor de n.

- **Observação:** Para a coluna bi-apoiada nas extremidades, os valores de P para $n = 1, 2, 3, \cdots$ são denominados **cargas de flambagem**. Entretanto, consideremos a situação física da forma como a barra é solicitada. A carga inicialmente é nula, e é aumentada gradualmente. Assim, a flambagem ocorre na primeira das cargas de flambagem, para $n = 1$, o que leva a estrutura ao colapso. Assim, torna-se impossível continuar aumentando a carga até atingir o nível correspondente a $n = 2$ e os superiores.

Assim, a **carga crítica de flambagem da viga bi-rotulada** é definida para $n = 1$:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI} \tag{13.35}$$

A linha elástica para esta viga é obtida substituindo $\lambda = n\pi/L$ de (13.32) em (13.25):

$$v(x) = c_1 \cos \frac{n\pi}{L} x + c_2 \text{sen} \frac{n\pi}{L} x + c_3 x + c_4. \tag{13.36}$$

Alguns dos valores das quatro constantes de integração podem ser obtidos a partir das **condições de contorno**.

- Em $x = 0$, tem-se que $v = 0$ e $M_z = 0$:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 = c_1 \cos 0 + c_2 \text{ sen } 0 + c_3\ 0 + c_4, \\ M_z(0) &= 0 = -c_1\lambda^2 EI \cos 0 - c_2\lambda^2 EI \text{ sen } 0, \end{aligned} \tag{13.37}$$

  que resulta em $c_1 = c_4 = 0$;

- Em $x = L$, (usando a identidade $\lambda L = n\pi$), deve-se ter $v = 0$ e $M_z = 0$

$$v\,(L) = c_2 \text{ sen } n\pi + c_3 L = 0 \qquad \text{e} \qquad M_z(L) = -c_2\lambda^2 EI \text{ sen } n\pi = 0. \tag{13.38}$$

A primeira equação resulta em $c_3 = 0$. Entretanto, a segunda equação não permite determinar c_2: tem-se $c_2 \text{sen} n\pi = 0$, porém o fato que $\text{sen} n\pi = 0$, para n inteiro, não implica que c_2 também seja nulo. Assim, resulta uma constante que não pode ser definida, c_2, de forma que a curva elástica fica

$$v\,(x) = c_2 \text{ sen } \frac{n\pi}{L}x. \tag{13.39}$$

Embora a equação não permita determinar o valor definido do deslocamento, ela mostra a **forma** assumida pela viga logo após o início da flambagem. Essa forma pode ser visualizada arbitrando um valor qualquer para c_2, por exemplo, $c_2 = 1$. A Figura 13.14 mostra as formas da viga defletida, também denominados **modos de flambagem**, associados a três das cargas críticas. Essas cargas e seus respectivos modos são os seguintes:

$n = 1$	$P_1 = P_{crit} = \dfrac{\pi^2}{L^2}EI$	$v\,(x) = c_2 \text{ sen } \dfrac{\pi}{L}x,$
$n = 2$	$P_2 = 4\dfrac{\pi^2}{L^2}EI = 4P_{crit}$	$v\,(x) = c_2 \text{ sen } \dfrac{2\pi}{L}x,$
$n = 4$	$P_4 = 16\dfrac{\pi^2}{L^2}EI = 16P_{crit}$	$v\,(x) = c_2 \text{ sen } \dfrac{4\pi}{L}x.$

(13.40)

Quando se observa à expressão da carga crítica, $P_{crit} = \pi^2 EI/L^2$, nota-se que se tem três parâmetros: um de propriedade de material (o módulo E) e dois geométricos (a seção definida por I e o comprimento L). Quanto mais rígido o material, maior a carga de flambagem da barra. Também, quanto mais robusta for a seção transversal, i.e., quanto maior for I, maior a capacidade de suportar cargas compressivas. Por outro lado, quanto maior o comprimento da barra, menor P_{crit}. De fato, a queda de P_{crit} ocorre com o quadrado do crescimento de L. Isso significa que, em projeto, para aumentar a carga crítica de uma barra, é mais eficiente reduzir seu comprimento que aumentar seu módulo de elasticidade ou momento de inércia.

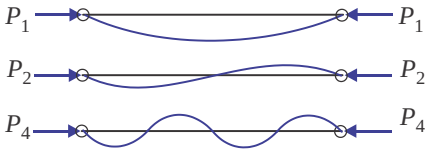


Figura 13.14: Modos de flambagem de uma barra bi-rotulada, associados a $n = 1$, 2 e 3.

13.1.3 Exemplo 13.4 - Carga de flambagem em barra bi-engastada

Determinar a carga de flambagem da barra bi-engastada mostrada na Figura 13.15a.
Solução:

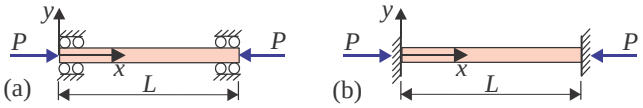


Figura 13.15: (a) Barra bi-engastada do Exemplo 4. (b) Idealização do problema.

Diversos mecanismos podem ser concebidos como vinculações nas extremidades de uma barra que permitam o deslocamento axial mas impeçam rotações de flexão. A Figura 13.15a apresenta o esboço de uma dessas possibilidades. A figura (b) apresenta a idealização do problema.

Inicialmente, deve-se buscar a solução geral da equação diferencial da viga-barra, eq.(13.15), que nesse caso é a solução do problema homogêneo, eq.(13.25), uma vez que o carregamento transversal $p\,(x) = 0$, o que implica que a solução particular é nula. Assim, a curva elástica tem a forma:

$$v(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \text{ sen } \lambda x + C_3 x + C_4. \tag{13.41}$$

As condições de contorno para este problema são:

$$\text{Em } x = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v\,(0) = 0, \\ \theta\,(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \text{em } x = L \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v\,(L) = 0, \\ \theta\,(L) = 0. \end{cases} \tag{13.42}$$

Aplicando-se essas condições à eq. (13.41), monta-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{rrrrr} C_1 \cos 0 & + & C_2 \text{ sen } 0 & + C_3 0 + C_4 & = 0, \\ -C_1 \lambda \text{ sen } 0 & + C_2 \lambda \cos 0 & + C_3 & & = 0, \\ C_1 \cos \lambda L + & C_2 \text{ sen } \lambda L + C_3 L + C_4 & & & = 0, \\ -C_1 \lambda \text{ sen } \lambda L + C_2 \lambda \cos \lambda L + C_3 & & & & = 0, \end{array} \tag{13.43}$$

o qual é escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos \lambda L & \text{sen } \lambda L & L & 1 \\ -\lambda \text{ sen } \lambda L & \lambda \cos \lambda L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{13.44}$$

Para que este sistema de equações tenha uma solução diferente da trivial, o determinante da matriz deve ser nulo. Logo,

$$-\lambda - \lambda \cos^2 \lambda L + 2\lambda \cos \lambda L + L\lambda \text{sen } \lambda L - \lambda \text{sen }^2 \lambda L = 0. \tag{13.45}$$

Simplificando tem-se $2\lambda(\cos \lambda L - 1) + L\lambda \text{ sen } \lambda L = 0$. Essa é uma *equação transcendental*, de forma que a maneira mais simples de resolvê-la é por inspeção. Assim, observa-se que

$$\lambda L = 2n\pi, \text{ onde } \quad n = 1, 2, 3 \tag{13.46}$$

satisfaz à equação, e são as raízes buscadas. Então, a carga crítica para este caso é:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI} \tag{13.47}$$

Nota-se que o enrijecimento provocado pelo duplo engaste na barra, aumenta sua capacidade de suportar flambagem em relação à barra bi-rotulada do Caso 1 na seção 13.1.2, em que se tinha obtido $P_{crit} = \pi^2 EI/L^2$.

13.1.4 Outra abordagem do problema de flambagem de barras bi-rotuladas

Seja o mesmo problema já resolvido no Caso 1, na seção 13.1.2, de uma barra bi-rotulada submetida a um carregamento axial e a um deslocamento transversal, como mostrada na Figura 13.16a em sua configuração deformada. Uma vez que o problema é isostático, é possível uma outra forma de solução diferente daquela usada no Exemplo 3. Lá, foi utilizada a solução da equação diferencial de quarta ordem, eq.(13.15). Uma vez que o problema é isostático, pode-se usar a equação diferencial de segunda ordem, eq.(13.12), uma vez que podemos obter previamente a equação para o momento fletor. Assim, faz-se um corte numa seção arbitrária da barra, e monta-se o **diagrama de corpo livre na configuração deformada**, como na Figura 13.16b. Observe que aqui o aspecto crítico é que se calcule as equações de equilíbrio na configuração deformada, de forma a obter a contribuição de flexão proveniente da carga axial agindo na flecha, como ilustrado na figura.

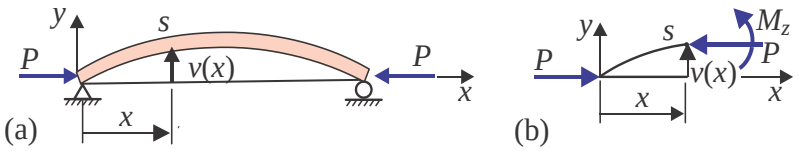


Figura 13.16: (a) Viga bi-rotulada. (b) Diagrama de corpo livre na configuração deformada da barra para um corte numa seção arbitrária s.

Do equilíbrio de momentos em relação à própria seção s de corte tem-se:

$$M_z(x) = -Pv\,(x)\,. \tag{13.48}$$

Substituindo-se na equação diferencial (13.12), $d^2v/dx^2 = M_z/IE$, tem-se

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v\,(x) = 0 \quad \text{onde} \quad \lambda^2 = \frac{P}{EI}. \tag{13.49}$$

Da teoria das equações diferenciais, (ver o resumo do processo de solução no Apêndice 17.2), tem-se que a **equação característica** associada a este problema é $m^2 + \lambda^2 = 0$.As raízes associadas a esta equação são $m_1 = \lambda i$ e $m_2 = -\lambda i$,ou seja, são complexas conjugadas com a parte real nula. Neste caso a **solução geral** da equação diferencial é:

$$\boxed{v\,(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \text{ sen } \lambda x} \tag{13.50}$$

onde as constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições de contorno. Observe que essa solução é válida para barras com diversos tipos de apoios, não apenas bi-apoiada. Para as **barras bi-rotuladas**, as **condições de contorno** são $v\,(0) = 0$ e $v\,(L) = 0$. Substituindo-se em (13.50) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} v\,(0) &= 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \text{ sen } 0, \\ v\,(L) &= 0 = C_1 \cos \lambda L + C_2 \text{ sen } \lambda L, \end{aligned} \tag{13.51}$$

da primeira equação obtém-se $C_1 = 0$ e da segunda equação tem-se sen $\lambda L = 0$, cujas raízes são $\lambda_n L = n\pi$, onde $n = 1, 2, 3, ...$Assim, tem-se que $\lambda_n L = n\pi$. Uma vez que, por definição, $\lambda^2 = P/EI$ em (13.49), tem-se que $P_n = n^2\pi^2 EI/L^2$. Essa é a mesma expressão já obtida no Caso 1, na seção 13.1.2, para o problema de barra bi-apoiada.

13.1.5 Caso 13.5 - Carga de flambagem de barra engastada-livre

Determinar a carga de flambagem da barra mostrada na Figura 13.17, engastada numa extremidade e livre na outra, em que é aplicada a carga compressiva P.

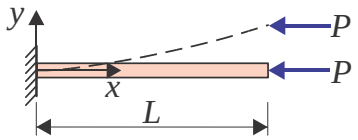


Figura 13.17: Barra com extremidade livre e engastada.

Solução:

A solução deste problema é dada pela solução homogênea da equação diferencial de quarta ordem, (13.15), dada por (13.25),

$$v\left(x\right) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \text{ sen } \lambda x + C_3 x + C_4, \tag{13.52}$$

(onde $\lambda^2 = P/EI$), com as seguintes condições de contorno:

$$x = 0 \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v\left(0\right) = 0, \\ \theta\left(0\right) = 0, \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad x = L \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} M_z\left(L\right) = 0, \\ V_y\left(L\right) = 0. \end{array} \right. \tag{13.53}$$

A última condição de contorno, do esforço cortante no engaste, precisa ser tratada com mais cuidado. Para isso, toma-se eq. (13.14), página 473, para o esforço cortante: $V_y = -EId^3v/dx^3 - Pdv/dx$. Usando a solução geral, tem-se:

$$-\frac{V_y(x)}{EI} = \lambda^3\{C_1 \text{ sen } \lambda x - C_2 \cos \lambda x - C_1 \text{ sen } \lambda x + C_2 \cos \lambda x\} + \lambda^2 C_3. \tag{13.54}$$

Essa equação torna-se simplesmente $V_y(x) = -EI\lambda^2 C_3$ para $\forall x$. Substituindo as três primeiras condições de contorno na solução, eq. (13.52), e juntando à condição do cortante, $V_y(x) = -\lambda^2 C_3 = 0$, tem-se o seguinte sistema algébrico de equações:

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \text{ sen } 0 + C_3 0 + C_4 &= 0, \\ -C_1 \lambda \text{ sen } 0 + C_2 \lambda \cos 0 + C_3 &= 0, \\ -C_1 \lambda^2 EI \cos \lambda L - C_2 \lambda^2 EI \text{ sen } \lambda L &= 0, \\ C_3 &= 0, \end{aligned}$$

que, em forma matricial fica:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ -\lambda^2 \cos \lambda L & -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{13.55}$$

O **determinante** da matriz deve ser **nulo**, o que resulta em:

$$\cos \lambda L = 0. \tag{13.56}$$

As **raízes** da equação são $\lambda L = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, ...$, que podem ser postas na forma

$$\lambda L = \frac{(2n-1)}{2}\pi \qquad\qquad n = 1, 2, 3.$$

Como $\lambda^2 = P/EI$, as **cargas de flambagem** associadas aos modos de flambagem da barra são:

$$P_n = \frac{EI}{L^2}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2. \tag{13.57}$$

Para $n = 1$, se tem a carga crítica de flambagem:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2}EI} \tag{13.58}$$

A forma assumida pela barra pode ser obtida obtendo as constantes do sistema (13.55). Das equações 2 e 4 temos que $C_2 = C_3 = 0$. Da equação 1, $C_4 = -C_1$, e da equação 3 se tem $C_1\lambda^2 \cos \lambda L = 0$. Como já foi identificado que $\cos \lambda L = 0$, segue-se que C_1 não pode ser determinado, e a formulação permite apenas conhecer o modo de flambagem associado à primeira carga crítica:

$$v\,(x) = C_1\,(\cos \lambda x - 1)\,. \tag{13.59}$$

Outra abordagem para a solução deste problema

Considera-se o diagrama de corpo livre do lado direito de um corte s realizado em uma coordenada x, como mostrado na Figura 13.18. O deslocamento na seção x é $v(x)$, e na extremidade $x = L$, é δ. O somatório de momentos fletores produz o esforço $M_z(x) = P\,(\delta - v)$.

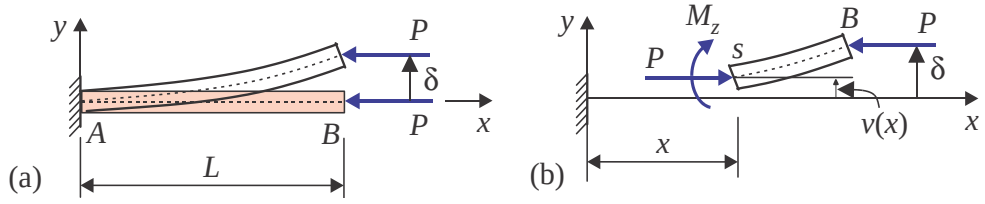


Figura 13.18: (a) Configuração deformada e deslocamento δ na extremidade da barra; (b) diagrama de corpo livre do lado direito do corte.

Então, a equação diferencial elástica fica $EId^2v/dx^2 = P\,(\delta - v)$, a qual, dividindo por EI, separando os termos, e usando a definição $\lambda^2 = P/EI$, toma a forma

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = \lambda^2 \delta. \tag{13.60}$$

Essa é uma **equação diferencial ordinária, de coeficientes constantes, não-homogênea, de segunda ordem**. A solução desta equação consiste na solução particular, v_p, (que depende do termo à direita), somada com a solução homogênea, v_h (solução com o lado direito nulo). Usando a teoria para a solução desse tipo de problema tem-se:

$$v_h = C_1 \cos \lambda x + C_2 \text{sen } \lambda x \qquad \text{e} \qquad v_p = \delta.$$

A **solução geral** é a soma de ambas, i.e., $v(x) = v_h(x) + v_p(x)$, que resulta em:

$$v(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \text{sen } \lambda x + \delta. \tag{13.61}$$

As **condições de contorno** são $\theta(0) = 0$ e $M_z(L) = 0$. Substituindo na solução geral obtém-se o sistema algébrico em termos das constantes C_1 e C_2:

$$\begin{aligned} 0 &= -C_1\lambda \text{ sen } 0 + C_2\lambda \cos 0, \\ 0 &= -C_1\lambda^2 \cos \lambda L - C_2\lambda^2 \text{sen } \lambda L. \end{aligned} \tag{13.62}$$

Da primeira expressão obtém-se $C_2 = 0$ e a segunda equação torna-se $C_1\lambda^2 \cos \lambda L = 0$. Como λ e C_1 não podem ser nulos, é necessário que $\cos \lambda L = 0$. As raízes dessa equação são $\lambda_n L = (2n-1)\pi/2$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Como $\lambda^2 = P/EI$, pode-se escrever as raízes diretamente em termos da carga axial P:

$$\sqrt{\frac{P_n}{EI}}L = \frac{(2n-1)}{2}\pi \qquad \longrightarrow \qquad P_n = \left(\frac{(2n-1)}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}EI. \tag{13.63}$$

A carga crítica é a mais baixa, dada por $n = 1$:

$$\boxed{P_{crit} = \frac{\pi^2}{4L^2}EI} \tag{13.64}$$

Nota-se que essa é a mesma expressão para a carga crítica obtida antes, eq.(13.58). A equação da linha elástica é obtida da eq. (13.61) substituindo λ_n e $C_2 = 0$:

$$v(x) = C_{1n}\cos\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right] + \delta. \tag{13.65}$$

Ainda C_{1n} é uma incógnita, associada à carga P_n, porém pode-se relacioná-la com o deslocamento na extremidade da viga, δ, aplicando a condição $v(0) = 0$:

$$0 = C_{1n} + \delta \qquad \rightarrow \qquad C_{1n} = -\delta. \tag{13.66}$$

Substituindo a expressão de C_1 de volta a (13.65), obtém-se as autofunções ou **funções de forma de flambagem** da viga engastada-livre para qualquer modo n:

$$\boxed{v(x) = \delta\left\{1 - \cos\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right]\right\}} \tag{13.67}$$

que é a mesma expressão obtida em (13.59) por outro método. A Figura 13.19 mostra os quatro primeiros modos de flambagem, associados às primeiras cargas de flambagem. Nota-se que essa solução ainda não é completamente definida, pois a amplitude de cada módulo é δ, incógnito. Seu valor não pode ser identificado pela presente teoria. Na figura, foi arbitrado um valor δ para todas as curvas.

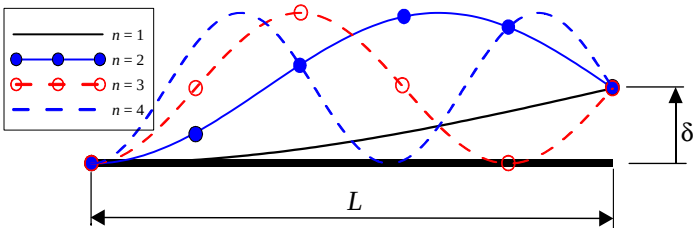


Figura 13.19: Os quatro primeiros modos de flambagem ($n = 1,\ 2,\ 3$ e 4) para a viga engastada-livre do Exemplo 4.

13.1.6 Exemplo 13.6 - Carga de flambagem de barra engastada-rotulada

Resolver o problema de estabilidade de uma barra engastada-rotulada, como ilustrada na Figura 13.20.

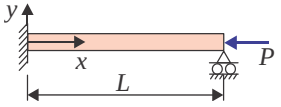


Figura 13.20: Barra engastada-rotulada do Exemplo 6.

A solução geral dessa classe de problemas foi obtida na eq. (13.23): $v = C_1 \cos \lambda x + C_2$ sen $\lambda x + C_3 x + C_4$. Para o presente problema, as condições de contorno são:

$$v\,(0) = 0, \qquad \theta\,(0) = 0, \qquad v\,(L) = 0, \qquad M_z\,(L) = 0. \tag{13.68}$$

Substituindo essas condições na solução geral obtém-se o sistema de equações para a determinação das constantes:

$$\begin{array}{ll} 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \text{ sen } 0 + C_3\ 0 + C_4, & 0 = C_1 \cos \lambda L + C_2 \text{ sen } \lambda L + C_3 L + C_4, \\ 0 = -C_1 \lambda \text{ sen } 0 + C_2 \lambda \cos 0 + C_3, & 0 = -C_1 \lambda^2 \cos \lambda L - C_2 \lambda^2 \text{ sen } \lambda L. \end{array} \tag{13.69}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{x} = \{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\}^T$. Para que tenha uma solução além da trivial é necessário que λ seja tal que $\det \mathbf{A} = 0$. Assim,

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos \lambda L & \text{sen } \lambda L & L & 1 \\ -\lambda^2 \cos \lambda L & -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{13.70}$$

A solução desse determinante é obtida seguindo os procedimentos da álgebra linear de matrizes. Nesse caso tem-se

$$1\times(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \text{sen } \lambda L & L & 1 \\ -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\times(-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ \cos \lambda L & \text{sen } \lambda L & L \\ -\lambda^2 \cos \lambda L & -\lambda^2 \text{sen } \lambda L & 0 \end{bmatrix} \tag{13.71}$$

O resultado simplifica-se para $\lambda^2\,(L\lambda \cos \lambda L - \text{sen } \lambda L) = 0$,ou simplesmente $\text{tg}\lambda L = \lambda L$. Essa é uma equação transcendental, e não se dispõe de fórmula fechada para suas raízes. Entretanto a **primeira raiz** pode ser aproximada por $\lambda L \cong 1,43\pi = 4,493$. Assim

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = 1,43\pi \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{P_{crit} = 2,045\ \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \tag{13.72}$$

13.1.7 Resumo dos casos

Até esse ponto determinamos as expressões para carga crítica de quatro casos de barra, para as condições de contorno (a) bi-rotulada, eq.(13.35), (b) bi-engastada, eq.(13.47), (c) engastada-livre, eq.(13.58) e (d) engastada-rotulada, eq.(13.72). As equações de carga crítica nos quatro casos considerados podem ser reescritas numa forma mais adequadas à interpretação física e ao projeto, fazendo as seguintes substituições de seus parâmetros. Para isso, definimos algumas grandezas.

1. Primeiramente define-se o **raio de giração** r da seção:

$$r = \sqrt{I/A}, \quad \text{i.e.,} \quad I = Ar^2, \tag{13.73}$$

onde A é a área da seção transversal e I é o **menor** dos dois momentos principais de inércia. É tomado o menor momento de inércia, considerando que a flambagem ocorrerá com uma flexão no plano de menor rigidez.

2. Em seguida, define-se a **tensão nominal crítica** σ_{crit} como a carga crítica nominal de flambagem dividida pela área da seção transversal da seção, i.e.,

$$\sigma_{crit} = \frac{\text{carga crítica de flambagem}}{\text{área da seção transversal}} = \frac{P_{crit}}{A}. \tag{13.74}$$

Essa é a tensão nominal compressiva em toda a barra, no limiar do processo de instabilidade.

3. Finalmente, define-se o **índice de esbeltez** (L/r) da barra como a relação entre seu comprimento e seu raio de giração. Esse coeficiente dá informação sobre o quão longa é a barra, em relação a sua seção transversal.

Com essas definições, a carga crítica da barra bi-apoiada pode ser reescrita como:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(L/r)^2} EA. \tag{13.75}$$

Dividindo a expressão pela área A da seção transversal, tem-se:

$$\boxed{\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}} \tag{13.76}$$

Observação: o valor do raio de giração r a ser utilizado nas equações de flambagem deve ser o menor dos dois raios de giração da seção, associados aos dois momentos de inércia principais. Isso é necessário porque a flambagem ocorre em torno do eixo de menor momento de inércia (no caso de as vinculações serem iguais em ambas as direções).

Até agora foram analisados quatro casos de combinações de vinculação de colunas submetidas à cargas de compressão. A Figura 13.21 mostra as quatro situações e em seguida são colocadas as respectivas equações.

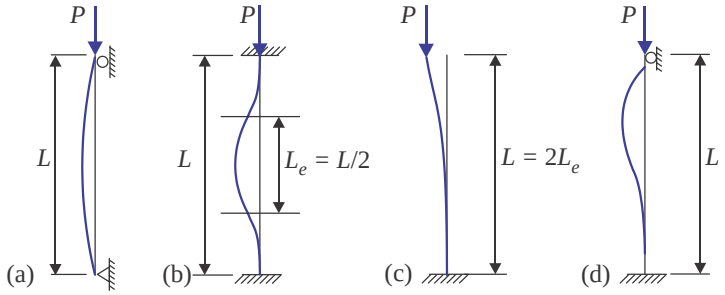


Figura 13.21: Modos críticos de flambagem para quatro diferentes combinações de condições de contorno: (a) bi-rotulada; (b) bi-engastada; (c) engastada-livre; (d) engastada-rotulada.

(a) Barra bi-rotulada. $P_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$. Com a dedução na eq. (13.76) tem-se a tensão crítica: $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$.

(b) Barra bi-engastada. $P_{crit} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $L_e = L/2$ é o comprimento equivalente para a barra bi-engastada.

1. Barra engastada-livre. $P_{crit} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $l_e = 2L$ é o comprimento equivalente para a barra engastada-livre.

(c) Barra engastada-rotulada. $P_{crit} = 2,045\frac{\pi^2}{L^2} EI$. Logo, $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, onde $L_e = 0,7L$ é o comprimento equivalente para a barra engastada-rotulada.

O **comprimento efetivo** L_e significa que, numa barra engastada-livre, por exemplo, em que $L_e = 2L$, a carga crítica de flambagem é a mesma de uma barra bi-rotulada com comprimento $2L$. Já no caso da barra bi-engastada, a carga crítica é a mesma de uma barra bi-rotulada de comprimento $L/2$. Nota-se que todas as expressões de tensão crítica são iguais, para todas as vinculações de

barras, sendo a única diferença o valor do comprimento efetivo. De maneira geral, $L_e = kL$ onde k é denominado de **fator de extremidade** (nos casos acima, $k = 1$; 0,5; 2 e 0,7, respectivamente). Fazer idênticas as expressões de todas as barras permite que as teorias de correção da presente formulação sejam uniformizadas, independentemente dos tipos de apoio.

Exemplo 13.7 – Cargas críticas de Euler

Considere uma barra de comprimento $L = 200$ mm e seção transversal $b \times h = 5 \times 10$ mm^2, com material com $E = 200$ GPa. (a) determine o raio de giração da seção e o índice de esbeltez da barra. (b) Determine a carga crítica de Euler para a flambagem da barra, para as quatro combinações de apoios detalhadas anteriormente (Casos 1 a 4). Em cada caso determinar a tensão axial média sob a carga crítica.

Solução:

O menor momento de inércia da seção é $I = hb^3/12 = 104,2$ mm^4, área $A = bh = 50$ mm^2, o raio de giração é $r = \sqrt{I/A} = 1,44$ mm, e o índice de esbeltez é $L/r = 138,6$. As cargas críticas e tensões são:

- Caso 1 - bi-rotulado. $P_{crit} = \pi^2 EI/L^2 = 5.140$ N e $\sigma_{crit} = P_{crit}/A = 102,808$ MPa.
- Caso 2 - bi-engastado. $P_{crit} = 4\pi^2 EI/L^2 = 20.561$ N e $\sigma_{crit} = P_{crit}/A = 411$ MPa.
- Caso 3 - engastado-livre. $P_{crit} = \pi^2 EI/4L^2 = 1.285$ N e $\sigma_{crit} = P_{crit}/A = 25,7$ MPa.
- Caso 4 - engastado-rotulado. $P_{crit} = 2,045\pi^2 EI/L^2 = 10.512$ N e $\sigma_{crit} = P_{crit}/A = 210,2$ MPa.

13.2 Excentricidade - fórmula da secante

A abordagem de Euler considera que a coluna é ideal, com geometria perfeitamente uniforme, em que a barra é perfeitamente reta, sem qualquer empenamento inicias, e a seção é perfeitamente uniforme. Também a carga P é colinear à barra e é sempre aplicada exatamente no centroide da seção. Nas situações reais isto não acontece: a coluna não é perfeitamente reta e a carga não é centroidal. Essa excentricidade provoca uma flexão que facilita a ocorrência da flambagem. Em barras reais, a excentricidade da carga pode ser quantificada de forma estatística, mas também esta pode ser escolhida propositalmente com um dado valor. Em ambos os casos, o comportamento da barra sob carga excêntrica pode ser analisado quanto a sua deflexão e tensão máxima.

A Figura 13.22a mostra uma idealização da excentricidade da carga, em que ela é aplicada a uma distância e do centroide da seção da barra. Aqui foi escolhida uma visualização em que a excentricidade é representada por um segmento perpendicular de barra de comprimento e. Entretanto, normalmente, a carga é aplicada sobre a própria extremidade da barra, a uma distância e do seu centroide, Por simplicidade, considera-se que a carga seja **aplicada sobre um dos dois eixos principais de inércia** da seção. Na configuração flambada, o deslocamento numa seção de coordenada x é $v(x)$.

O esforço de **momento fletor** numa seção arbitrária s é $M_z(x) = -P\,(v + e)$, como na Figura 13.22b. $M_z(x)$ varia em x através da variação do deslocamento $v(x)$. A equação diferencial de flexão torna-se:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z(x) = -P\,(v + e)\,, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e \tag{13.77}$$

onde L e e são o comprimento da coluna e a excentricidade da carga. Definindo $\lambda^2 = P/EI$, a solução é:

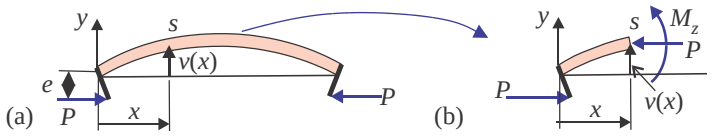


Figura 13.22: (a) Modelo de barra sob carga aplicada com excentricidade e. (b) Esforços numa seção arbirária s.

$$v = C_1\ \text{sen}(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) - e. \tag{13.78}$$

As constantes de integração são obtidas pelas **condições de contorno** $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$. Aplicando essas condições em (13.78) obtém-se $C_2 = e$ e

$$C_1 = e\frac{[1 - \cos(\lambda L)]}{\text{sen}(\lambda L)}. \tag{13.79}$$

A seguir realizam-se transformações algébricas buscando simplificar essa equação. Aplicam-se duas conhecidas identidades trigonométricas, $1-\cos \lambda L = 2\text{sen}^2(\lambda L/2)$ e $\text{sen}(\lambda L) = 2\text{sen}(\lambda L/2)\cos(\lambda L/2)$, ao numerador e ao denominador de (13.79), o que resulta em

$$C_1 = e\frac{\text{sen}^2(\lambda L/2)}{\text{sen}(\lambda L/2)\cos(\lambda L/2)} = e\frac{\text{sen}(\lambda L/2)}{\cos(\lambda L/2)} = e\ \text{tg}(\lambda L/2), \tag{13.80}$$

e a linha elástica para este problema é dada por (13.78):

$$\boxed{v(x) = e\left[\text{tg}\ (\lambda L/2)\text{sen}(\lambda x) + \cos(\lambda x) - 1\right]} \tag{13.81}$$

Devido à simetria do problema, a máxima deflexão ocorre em $x = L/2$, como na A Figura 13.23a. Logo

$$v_{\max} = v\,(L/2) = e\left[\text{tg}(\lambda L/2)\text{sen}(\lambda L/2) + \cos(\lambda L/2) - 1\right]. \tag{13.82}$$

Separando a tangente, tem-se

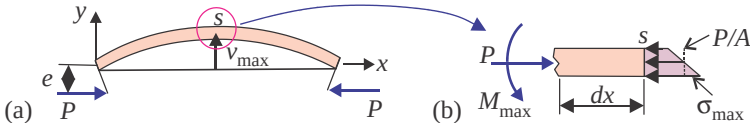


Figura 13.23: (a) Modelo de barra sob carga aplicada com excentricidade e. (b) Esforços e tensões na seção central.

$$v_{\max} = e\left[\frac{\text{sen}^2(\lambda L/2) + \cos^2(\lambda L/2)}{\cos(\lambda L/2)} - 1\right] \rightarrow \boxed{v_{\max} = e\left[\frac{1}{\cos(\lambda L/2)} - 1\right], \quad \text{onde } \lambda^2 = \frac{P}{EI}} \tag{13.83}$$

Essa expressão mostra que, **se a excentricidade não é nula, sempre ocorrerá deflexão transversal, qualquer que seja o valor da carga** P. Isso é distinto do caso em que $e = 0$, em que a barra permanece sem flexão qualquer que seja a carga, desde que seja inferior a $P_{crít}$. Apenas nessa carga $P_{crít}$ a barra se afasta instantaneamente da configuração reta para a flexionada. Como visto nas soluções de Euler, a deflexão flambada tem magnitude indefinida, onde a teoria fornece apenas o modo de flambagem. Entretanto, com a presença de excentricidade, (13.83) fornece o valor da deflexão, desde que $P < P_{crít}$.

Observa-se que quando $(\lambda L/2) \longrightarrow \pi/2$ se tem $v_{\max} \longrightarrow \infty$, o que significa que **a estrutura torna-se instável para qualquer valor de excentricidade**. Uma vez que $\lambda^2 = P/EI$, tem-se

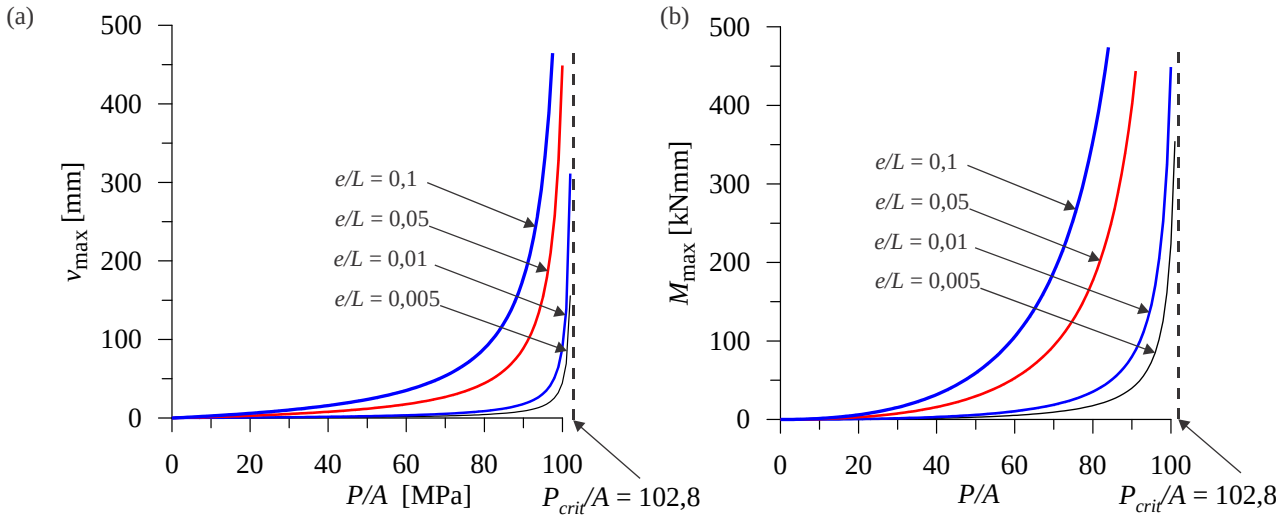


Figura 13.24: Barra bi-rotulada com $E = 200$ GPa, $L = 200$ mm, $b \times h = 5 \times 10$ mm^2. (a) $P/A \times v_{\max}$. (b) $P/A \times M_{\max}$, com $L/r = 138,6$. Curvas com diversas excentricidades e/L.

a carga crítica de flambagem, que é a mesma do modelo de Euler

$$P_{crít} = \frac{\pi^2}{L^2} EI. \tag{13.84}$$

A expressão do deslocamento máximo em (13.83) pode ser modificada convertendo o termo $\lambda L/2$, tal que:

$$v_{\max} = L\left(\frac{e}{L}\right)\left[\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right) - 1\right]. \tag{13.85}$$

A Figura 13.24a mostra a variação de $v_{\max}$ na barra bi-rotulada do Exemplo 7, em termos da tensão média P/A, para diversos valores de excentricidade adimensional e/L. Nota-se que quando P/A se aproxima de $P_{cr}/A = 102,808$ MPa calculado no Exemplo 7, o deslocamento tende ao infinito, qualquer que seja o valor da excentricidade.

Uma vez que $v_{\max}$ ocorre no centro da viga, o mesmo ocorre com o momento fletor máximo, cujo valor absoluto é:

$$M_{z_{\max}} = |-P\,(e + v_{\max})| = P\,[e + e\,(\sec(\lambda L/2) - 1)] \quad \longrightarrow \quad \boxed{M_{z_{\max}} = Pe\sec(\lambda L/2)} \tag{13.86}$$

Modificando o termo o termo $\lambda L/2$, essa expressão pode ser organizada da seguinte forma:

$$M_{z_{\max}} = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{e}{L}\right) AL\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right). \tag{13.87}$$

A Figura 13.24b mostra a variação do momento fletor máximo $M_{z_{\max}}$ na barra bi-rotulada do Exemplo 3, em termos da tensão média P/A, para diversos valores de excentricidade adimensional e/L, para uma esbeltez fixa $L/r = 138,6$. Para um valor dado de tensão média P/A, o momento fletor cresce com a excentricidade e/L. A taxa de crescimento do momento cresce conforme P/A se aproxima da carga crítica, quando a barra entra em flambagem, qualquer que seja a excentricidade da carga.

As **tensões** máximas devidas à carga axial são obtidas sobrepondo a tensão de flexão à tensão axial na seção central da viga. Considerando a **coordenada do ponto mais distante da linha neutra** na seção central é c, se tem

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{z_{\max}}}{I}c = \frac{P}{A} + \frac{M_{z_{\max}}}{Ar^2}c \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right]} \tag{13.88}$$

Essa é a chamada **fórmula da secante** e mostra um comportamento não-linear entre a tensão máxima e a carga P. Nota-se que o termo P/A à direita é a tensão média na seção, e o termo contendo a secante é a correção devido à excentricidade. A tensão máxima depende do fator $d = ec/r^2$, que contém a excentricidade e os parâmetros c e r da seção. A máxima força de início de escoamento na barra, P_E, é obtida resolvendo a equação para $\sigma_{\max} = \sigma_E$. A equação (13.88) é transcendental e não se pode obter uma expressão explícita para P_E. Em vez disso, dado o valor de $\sigma_{\max} = \sigma_E$ e as demais constantes, a raiz P_E pode facilmente ser obtida numericamente.

Observação - Na eq. (13.88), o raio de giração a ser utilizada pode não ser o valor mínimo entre os dois eixos principais da seção. Em vez disso, r pode ser aquele associado ao eixo principal transversal àquele ao longo do qual a excentricidade da carga existe.

Uma visualização gráfica de (13.88) pode ser obtida convertendo a equação para a forma

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{P}{A}\right)\left[1 + d\sec\left(\frac{L/r}{2\sqrt{E}}\sqrt{P/A}\right)\right] \qquad \text{com } d \equiv \frac{ec}{r^2}. \tag{13.89}$$

onde d é um parâmetro de excentricidade. A Figura 13.25a mostra $\sigma_{\max}$ em termos de P/A, para $L/r = 138,6$, para diversos valores de $d = ec/r^2$. Tanto quanto o momento fletor máximo, a tensão máxima tende ao infinito conforme a força axial tende ao valor crítico, para qualquer excentricidade. Para um valor $P < P_{cr}$, a tensão é maior quanto maior a excentricidade.

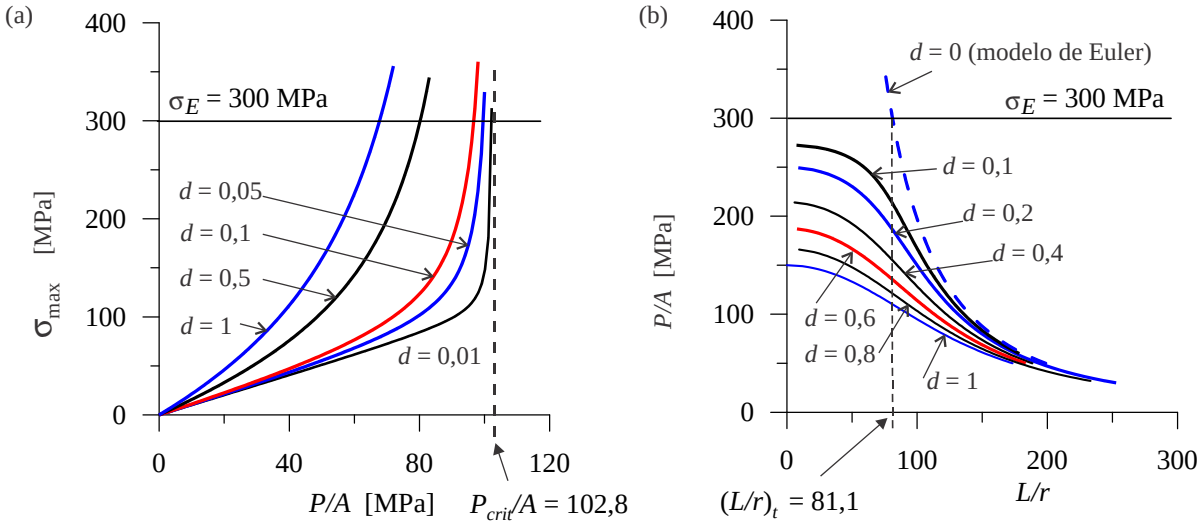


Figura 13.25: Barra bi-rotulada com $E = 200$ GPa, $b \times h = 5 \times 10$ mm^2. (a) $P/A \times \sigma_{\max}$ para $L/r = 138,6$. (b) $L/r \times P/A$, para $\sigma_{\max} = \sigma_E = 300$ MPa. Curvas para diversos valores de excentricidade $d = ec/r^2$.

13.2.1 Escoamento

A teoria desenvolvida na seção 13.1 tem a característica de considerar que o material da barra se comporta de forma elástico-linear até a tensão crítica de flambagem. Essa é a chamada teoria de flambagem de Euler, ou **carga crítica de Euler**, em homenagem a seu criador. Entretanto, observando-se a fórmula de Euler, $\sigma_{crit} = \pi^2 E/\left(L_e/r\right)^2$, conforme a barra se torna curta (baixo valor do índice de esbeltez L_e/r), a tensão crítica que a barra suportaria, de acordo com a teoria de Euler, cresceria indefinidamente. Claramente, abaixo de certo valor, de L_e/r, se teria σ_{crit} superior

à tensão de início de escoamento, quando a própria teoria de Euler não teria validade. De fato, a tensão prevista pode ser até mesmo superior à tensão de ruptura do material.

Se tomamos a tensão crítica de Euler, eq. (13.76), para $\sigma_{crit} = \sigma_E$, se pode obter o menor valor de índice de esbeltez possível para uma flambagem de Euler (i.e., flambagem elástica sem excentricidade):

$$\sigma_{crit} = \sigma_E = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{L_e}{r}\right)_t = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_E}}} \tag{13.90}$$

$(L_e/r)_t$ é o **índice de esbeltez de transição** da barra. A Figura 13.26 mostra a variação da tensão crítica de Euler versus L/r pelo modelo de Euler, com a forma esperada de uma hipérbole, em que σ_{crit} tende a infinito conforme L/e diminui. Aparece claramente o ponto de esbeltez de transição, abaixo da qual a equação de Euler perde a validade. Nessa faixa de **barras curtas**, o modo de falha não mais é por flambagem, mas por escoamento total da seção, que permanece reta.

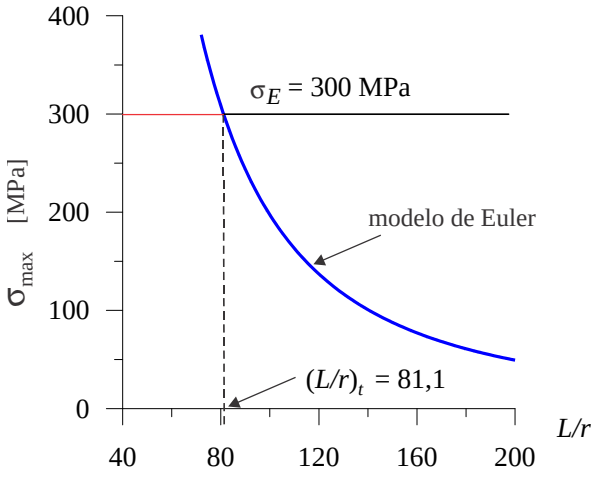


Figura 13.26: Barra bi-rotulada. (a) $L/r \times \sigma_{crit}$ pelo modelo de Euler e com limite elástico. $E = 200$ GPa, $b \times h = 5 \times 10$ mm^2 e $\sigma_E = 300$ MPa.

Quando consideramos a excentricidade da carga, usamos $\sigma_{\max}$ de (13.89). Nesse caso, a tensão máxima depende da excentricidade, como as diversas curvas na Figura 13.25a. Todas elas crescem ao infinito conforme P/A tende ao valor crítico. Se fixamos $\sigma_{\max} = \sigma_E$ em (13.89), temos curvas $L/r \times P/A$ na Figura 13.25b para diversos valores de excentricidade $d = ec/r^2$. Conforme a excentricidade tende a zero, a curva tende à forma quebrada da Figura 13.26.

Exemplo 13.8 – Segurança para excentricidade - fórmula da secante

Considere uma barra de comprimento $L = 200$ mm e seção transversal $a \times b = 5 \times 10$ mm^2, de material com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 500$ MPa. As extremidades da barra são rotuladas. O carregamento é axial compressivo, de valor $P = 4.500$ N, aplicado de forma excêntrica aos centroides das extremidades, com excentricidade $e = 0,05a$ medido ao longo da menor dimensão da seção. (a) determine o raio de giração da seção e o índice de esbeltez da barra. (b) Determine a tensão máxima aplicada. (c) o coeficiente de segurança, analisando possível falha quanto ao início do escoamento e quanto à instabilidade.

Solução:

O menor momento de inércia da seção é $I = ba^3/12 = 104,2$ mm^4, área $A = ab = 50$ mm^2, o raio de giração é $r = \sqrt{I/A} = 1,44$ mm, e o índice de esbeltez é $L/r = 138,6$. A meia altura

da seção na direção da menor dimensão é $c = a/2 = 2,5$ mm. O parâmetro de excentricidade é $d = ec/r^2 = 0,3$. Da eq.(13.89), a tensão máxima é

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right] = \frac{4.500}{50}\left[1 + 0,3\sec\left(138,6\sqrt{\frac{4.500}{4\times 200.000\times 50}}\right)\right] \quad (13.91)$$

que produz $\sigma_{\max} = 357,5$ MPa. Então o coeficiente de segurança para escoamento é $n = \sigma_E/\sigma_{\max} = 1,4$. Note que a tensão média é apenas $P/A = 90$ MPa. A carga crítica de instabilidade de Euler é obtida por (13.84):

$$\sigma_{crít} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = 102,8\text{MPa} \; > P/A,$$

tal que não é esperada falha por instabilidade.

Exemplo 13.9 – Dimensionamento com excentricidade - fórmula da secante

Considere uma barra de comprimento $L = 200$ mm e seção transversal retangular de dimensões $a \times b$, de material com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 500$ MPa. As extremidades da barra são rotuladas em todos os planos. O carregamento é axial compressivo, de valor $P = 4.700$ N, aplicado de forma excêntrica aos centroides das extremidades, no ponto s, com excentricidade $e = qa$ com $q = 0,05$, medido ao longo da menor dimensão da seção, como ilustrado na Figura 13.27. Dimensione a seção transversal necessária, considerando que $b = 2a$.

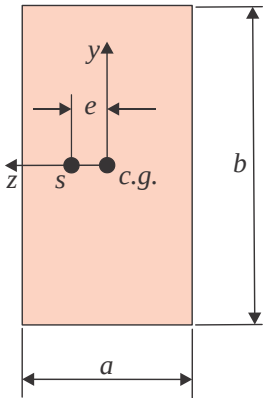


Figura 13.27: Seção transversal da barra do Exemplo 9. O ponto s é o de aplicação da carga axial.

Solução:

Com a restrição sobre as dimensões da seção, $b = 2a$, todo o problema pode ser colocado em termos de a. Os valores dimensionais são:

$$A = 2a^2, \qquad I_y = \frac{ba^3}{12} = \frac{a^4}{6}, \qquad \text{e} \qquad r = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

O dimensionamento deve ser feito obtendo o valor de a que faz $\sigma_{\max} = \sigma_E$ em (13.89) . Não é possível obter uma solução fechada para a solução do problema. Entretanto, é possível escrever uma expressão para o erro $f(a) = (\sigma_{\max} - \sigma_E)$ em termos de a:

$$f(a) = \left(\frac{P}{2a^2}\right)\left[1 + 6q\sec\left(\frac{L}{2a^2}\sqrt{\frac{6P}{E}}\right)\right] - \sigma_E. \quad (13.92)$$

e se busca o valor de a que faz $f(a) = 0$. Para qualquer processo iterativo, é importante ter uma estimativa para **valor inicial**, ou uma **faixa de valores** onde buscar a raiz. Aqui podemos tomar três valores.

1. Para o primeiro valor, consideramos a seção que seria necessária se a carga fosse concêntrica, com falha por simples plastificação, i.e., $P/A = \sigma_E$. Isso produz uma estimativa a_1 para a:

$$\sigma_E = \frac{P}{A} = \frac{P}{2a_1^2} \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \sqrt{\frac{P}{2\sigma_E}} = 2,17 \text{ mm}.$$

2. A segunda estimativa pode ser obtida da curva de Euler, que pressupõe flambagem elástica ocorrendo no limite plástico, com carga concêntrica. Isso produz

$$\sigma_{crít} = \sigma_E = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E a_2^2}{12L^2} \qquad \rightarrow \qquad a_2 = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{12\sigma_E}{E}} = 11 \text{ mm}.$$

   Essa dimensão corresponde ao ponto de transição da curva de Euler com o patamar $\sigma_{crít} = \sigma_E$.

3. A terceira estimativa é a área de seção correspondente à falha de Euler (carga concêntrica), sob a carga aplicada $P = 4.700$ N:

$$\sigma_{crít} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E a_3^2}{12L^2} \qquad \rightarrow \qquad a_3 = \left(\frac{6L^2}{\pi^2 E}\right)^{1/4} = 4,8893 \text{ mm}.$$

   Essa dimensão a_3 pode ser considerada o menor valor teórico possível: quando a carga for aplicada excentricamente, é de se prever que a seção deve ser mais robusta que a_3, para suportar também as tensões de flexão. Dessa forma, podemos ignorar valores na região a_1, e buscar uma raiz útil na faixa $a > a_3 = 4,8893$ mm.

A Figura 13.28a mostra uma visão geral da variação de $f(a)$ na faixa a entre 2 e 11 mm. Nota-se que a função é altamente oscilante, com picos singulares descontínuos, e com muitos zeros para valores abaixo de $a = 2$ mm. Isso torna difícil a convergência de um método iterativo, como o de Newton-Raphson. Entretanto, um procedimento mais simples pode ser usado, o chamado método gráfico. Da Figura 13.28a identificamos visualmente que a menor raiz na faixa $a > a_3 = 4,8893$ mm é a raiz útil, que fica logo após o segundo pico positivo mostrado. Assim, refaz-se o gráfico para um intervalo menor, como mostrado na Figura 13.28b para a entre 4,5 e 5,5 mm. Novamente, visualmente percebe-se que a raiz fica próxima de $a = 5$ mm. O procedimento pode ser repetido mais algumas vezes, gerando gráficos com comprimento do domínio da função progressivamente reduzido em torno da raiz, até se obter a precisão que se desejar. Pode-se testar a qualidade da primeira aproximação, $a = 5$ mm, calculando o valor do resíduo $f(a)$, que vale $f(a = 5) = 4,2$ MPa, i.e., para esse valor de a, a tensão máxima na seção é $\sigma_{\max} = 504,2$ MPa, o que é uma aproximação aceitável da raiz. Após algumas iterações gráficas, se obtém $a = 5,00113$ mm. Para esse valor, $\sigma_{\max} = 499,994$ MPa, a tensão média aplicada na seção é $P/A = 93,9575$ MPa, e o índice de esbeltez é $L/r = 102,855$.

13.3 Cálculo normalizado - colunas sob carga centrada

Historicamente, a fórmula de Euler para flambagem foi usada de forma generalizada, mesmo além de sua faixa de aplicabilidade. Isso gerou uma infinidade de fórmulas e fatores de correção para contemplar os diversos fenômenos envolvidos. Posteriormente a formulação foi sendo depurada para apenas duas fórmulas, uma aplicável a barras curtas e outra a barras longas, além de uma fórmula para fazer a caracterização do comprimento de transição entre o que é considerado barra longa e curta.

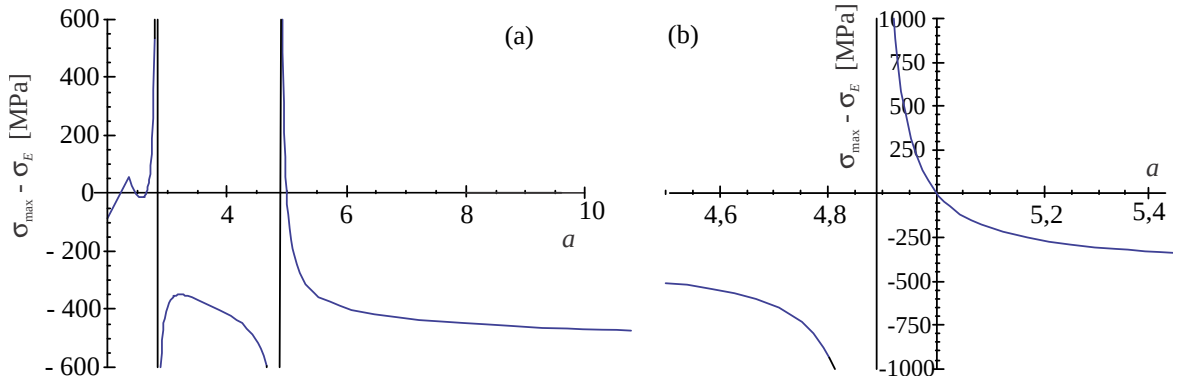


Figura 13.28: Variação do erro $(\sigma_{\max} - \sigma_E)$ com a dimensão a para o Exemplo 9, para duas faixas de esbeltez: (a) a de 2 a 11 mm e (b) a de 4,5 a 5,5 mm

Essas fórmulas se baseiam na fórmula de Euler e em alguns conceitos de plastificação de barras curtas, incorporando **coeficientes de segurança pré-determinados** que levem em conta quantificação estatística de resultados experimentais de erros de fabricação e de tolerância dimensional em perfis estruturais padronizados, pequenos desvios de excentricidade na carga, desvios nas vinculações e não homogeneidade de material. Esses fatores foram identificados estatisticamente a partir de extensas séries de ensaios realizados desde o final do século 19.

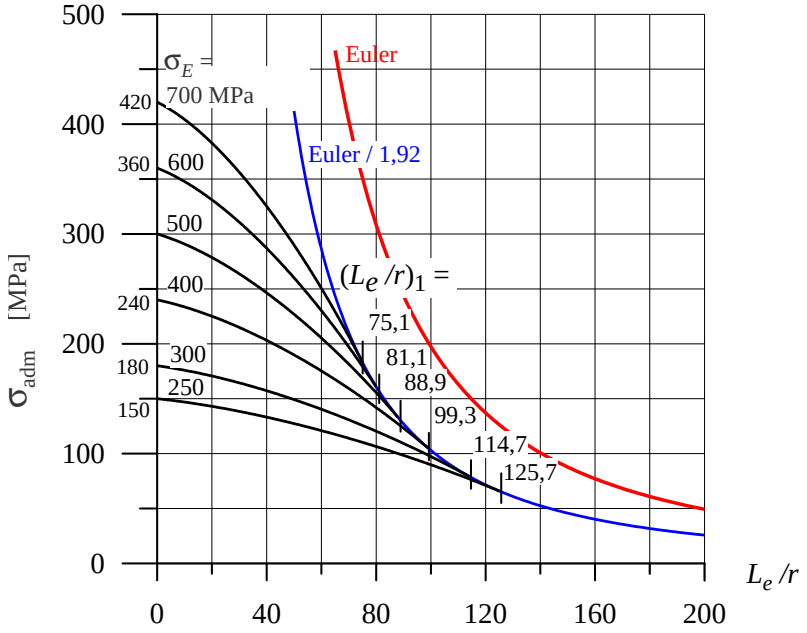


Figura 13.29: Curvas $\sigma_{adm} \times (L_e/r)$ de flambagem para diversos módulos de elasticidade, pelas fórmulas de Euler e de colunas curtas. À curva de Euler foi aplicado um fator de segurança de $23/11 = 1{,}92$.

Resumimos a seguir a formulação normalizada pelo AISC [3] (American Institute of Steel Construction) para **projeto colunas de aço sob compressão de força nominalmente concêntrica**. Para outros materiais (alumínio, madeira), existem outras normas adequadas emitidas por outras organizações de engenharia. São duas equações, uma para barras longas e outra curtas, sendo que a fórmula para barras longas é a de Euler, incorporando um fator de segurança $m = 23/12 = 1,92$. Então, a tensão admissível de Euler, dada em (13.76), $\sigma_{crit} = \pi^2 E/\left(L_e/r\right)^2$,

onde L_e é o comprimento efetivo, fica modificada para

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{m\,(L_e/r)^2} \quad \text{onde } m = 23/12 = 1,92} \tag{13.93}$$

Dessa forma se tem uma curva hiperbólica transladada para baixo no diagrama $L_e/r \times \sigma_{adm}$, como pode ser visto nas duas curvas superiores da Figura 13.29. Entretanto, essa curva é válida apenas para esbeltez maior que um valor de transição $(L_e/r)_1$.

1. A **fórmula para colunas curtas** é construída tomando como inspiração a curva quebrada da Figura 13.26, formada pelo patamar de escoamento e a parte inferior da hipérbole de Euler. Considera-se um **fator de segurança** $= 5/3 = 1,67$ como rebaixamento do patamar de escoamento.

2. Essa curva quebrada possui **esbeltez de transição** entre ambas as partes, definida pela fórmula de Euler no ponto em que $\sigma_{cr} = \sigma_E$, i.e.,

$$\left(\frac{L_e}{r}\right)_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_E}} \tag{13.94}$$

   Entretanto, a norma considera uma esbeltez de transição mais conservativa, aplicando um **fator de segurança** $= \sqrt{2} = 1,41$, de tal forma que o ponto de transição entre as curvas de barra curta e de Euler é definido por

$$\boxed{e_1 \equiv \left(\frac{L_e}{r}\right)_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}}} \tag{13.95}$$

   O coeficiente de segurança $\sqrt{2}$ pode ser entendido no sentido que barras serão consideradas longas apenas se forem $1,41$ vezes mais longas que aquelas indicadas pelo limite $(L_e/r)_1$ de Euler em (13.94). De forma equivalente, se nota que a esbeltez e_1 corresponde ao ponto na curva de Euler em que a tensão crítica é $\sigma_E/2$.

3. As **curvas admissíveis para barras curtas** são construídas uma para cada valor de σ_E. A curva nessa região possui dois pontos, o ponto de transição e o ponto inicial em $(L_e/r) = 0$, sobre o eixo das ordenadas. Entre esses dois pontos é arbitrada uma curva de concordância, na forma de um polinômio quadrático, ajustado de forma a possuir a mesma derivada que a curva de Euler modificada na esbeltez $(L_e/r)_1$. Em $(L_e/r) = 0$ é usado um fator de segurança $= 5/3 = 1,67$ como rebaixamento de σ_E. No ponto de transição $(L_e/r)_1$ é feito com que a tensão admissível seja $\sigma_E/2$, dividida por um fator de segurança $23/12 = 1,92$. Entre os dois pontos da curva de barra curta, o **fator de segurança intrínseco da norma é variável** entre $1,67$ e $1,92$, tendo sido arbitrado um polinômio cúbico:

$$\boxed{n_n = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{e_1} - \frac{1}{8}\frac{(L_e/r)^3}{e_1^3}} \tag{13.96}$$

A Figura 13.30 mostra curvas da variação do coeficiente de segurança n, para diversos valores de esbeltez de transição $(L_e/r)_1$. A curva de tensão admissível final do modelo para colunas curtas, é o polinômio quadrático que possui a mesma derivada na transição que a curva de Euler:

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2\,(L_e/r)_1^2}\right]\frac{\sigma_E}{n_n}. \tag{13.97}$$

A Figura 13.29 mostra curvas $\sigma_{adm} \times (L_e/r)$ para carga crítica de flambagem para diversos valores de tensão de escoamento, obtidos pelas fórmulas de Euler modificada pelo coeficiente de

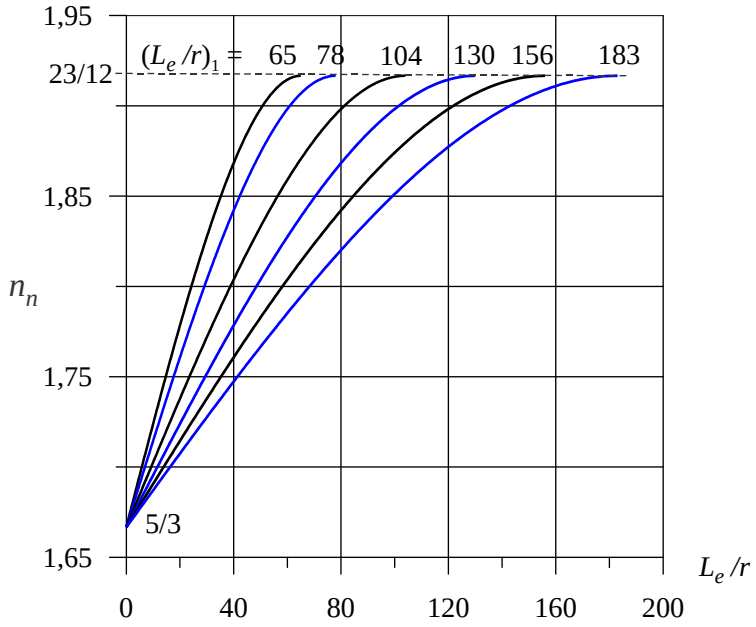


Figura 13.30: Variação do coeficiente de segurança intrínseco da norma, n_n, obtido por (13.96), aplicado na curva de tensão crítica de coluna curta, para diversos valores de esbeltez de transição $(L_e/r)_1$. Usado $E = 200$ GPa.

segurança m, (eq.(13.97)), e de curta (eq.(13.97)). Nota-se que o índice de esbeltez de transição $(L_e/r)_1$ varia conforme o material, conforme a eq.(13.95) e Figura 13.30.

Um sumário do critério de determinação de tensões admissíveis em compressão de barras, é o seguinte:

1. **Colunas longas de aço**. A coluna de índice de esbeltez L_e/r é considerada longa se $(L_e/r)_1 < L_e/r < 200$. O **índice de esbeltez de transição** é dado por

$$e_1 \equiv \left(\frac{L_e}{r}\right)_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}} \tag{13.98}$$

   Note-se que **vigas super-longas**, com $L_e/r > 200$, **são proibidas**. A tensão admissível para a viga longa é definida por um coeficiente de segurança igual a $n = 23/12$ (aproximadamente igual a 1,917) aplicado à fórmula de Euler:

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{12}{23}\frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}} \tag{13.99}$$

2. **Colunas curtas de aço**. Para índices de esbeltez menores que o de transição, $L_e/r < (L_e/r)_1$, deve ser usado

$$\boxed{\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{\sigma_E}{n_n}\left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2\,(L_e/r)_1^2}\right], \quad \text{com} \quad n_n = \left[\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{(L_e/r)_1} - \frac{1}{8}\frac{(L_e/r)^3}{(L_e/r)_1^3}\right]} \tag{13.100}$$

   Note-se que σ_{adm} é um valor admissível de tensão média na seção, i.e., $\sigma_{adm} = P_{adm}/A$ onde P_{adm} é a carga compressiva admissível, considerada ser aplicada de forma coaxial .

Exemplo 13.10 – Força admissível numa barra sob compressão - norma AISC

Considere uma barra de comprimento $L = 100$ mm e seção transversal $b \times h = 5 \times 10$ mm^2, com material com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 500$ MPa. (a) determine o raio de giração da seção e o índice de esbeltez da barra. (b) Determine a tensão axial média admissível na coluna, considerando que o carregamento é axial compressivo, aplicado de forma concêntrica aos centroides das extremidades. Use as fórmulas da norma AISC. As extremidades da barra são rotuladas. (c) qual o coeficiente de segurança adicional (além daqueles embutidos na norma), se a força axial compressiva aplicada for $P = 9$ kN?

Solução:

O menor momento de inércia da seção é $I = hb^3/12 = 104,2$ mm^4, área $A = bh = 50$ mm^2, o raio de giração é $r = \sqrt{I/A} = 1,44$ mm, e o índice de esbeltez é $L/r = 69,3$. A esbeltez de transição é $(L_e/r)_1 = e_1 = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_E} = 88,9$. Então, a coluna é curta, e devemos usar (13.100), onde o coeficiente de segurança é dado por (13.96):

$$n_n = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{e_1} - \frac{1}{8}\frac{(L_e/r)^3}{e_1^3} = 1,9.$$

Assim, a tensão admissível é $\sigma_{adm} = \left[1 - (L_e/r)^2/2e_1^2\right]\sigma_E/n_n = 183$ MPa. Então a força admissível na barra é $P_{adm} = \sigma_{adm}A = 9.159$ N. Se o carregamento é $P = 9$ kN, o coeficiente adicional de segurança do carregamento é $n = P_{adm}/P = 1,02$.

Exemplo 13.11 – Dimensionamento de barra sob compressão - norma AISC

Considere uma barra de comprimento $L = 100$ mm e seção transversal $a \times b$, com material com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 500$ MPa. As extremidades da barra são rotuladas. O carregamento é axial compressivo, de valor $P = 9.000$ N, aplicado de forma excêntrica aos centroides das extremidades. Dimensione a seção transversal necessária, considerando que $b = 2a$.

Solução:

Com a restrição sobre as dimensões da seção, $b = 2a$ e $A = 2a^2$. O menor momento de inércia da seção é $I = a^4/6$ e $r = \sqrt{I/A} = a/\sqrt{12}$. O índice de esbeltez de transição é dado por $(L_e/r)_1 = e_1 = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_E} = 88,9$.

O dimensionamento deve ser feito obtendo a que satisfaz $\sigma_{\max} = \sigma_E$. Entretanto, o procedimento envolve duas expressões para $\sigma_{\max}$, eqs.(13.99) e (13.100), cuja escolha não pode ser feita a priori, pois a esbeltez depende da incógnita a. Então não é possível obter uma solução fechada para a solução do problema, e se deve usar um procedimento iterativo.

- **Etapa 1**: podemos considerar um valor inicial de esbeltez $L_e/r = 0$, o que se constitui numa estimativa bastante pobre. Para esse valor, (13.100) produz $n = 5/3$ e $\sigma_{adm} = \sigma_E/n = 300$ MPa. A área associada é $A = P/\sigma_{adm} = 30$ mm^2, o que corresponde a $a = 3,87$ mm. Para esse valor tem-se os novos parâmetros geométricos: $I = 37,5$ mm^4, e $r = 1,12$ mm e $(L_e/r) = 89,4$.

- **Etapa 2**: Como a estimativa anterior é $(L_e/r) = 89,4 > (L_e/r)_1 = 88,9$, essa configuração é longa, e usamos (13.99): $\sigma_{adm} = 12\pi^2 E/23\,(L_e/r)^2 = 128,7$ MPa, o que corresponde a $A = P/\sigma_{adm} = 69,9$ mm^2 e $a = 5,91$ mm.

- **Etapa 3**: Com a estimativa anterior, $I = 203,7$ mm^4, e $r = 1,71$ mm e $(L_e/r) = 58,6 < (L_e/r)_1 = 88,9$, tal que essa configuração é curta. Eq. (13.100) produz $n_n = 1,88$ e $\sigma_{adm} = 208,4$ MPa, o que corresponde a $A = P/\sigma_{adm} = 43,2$ mm^2 e $a = 4,65$ mm.

- **Etapa 4**: Com a estimativa anterior, $I = 77,7$ mm^4, e $r = 1,34$ mm e $(L_e/r) = 74,5 < (L_e/r)_1 = 88,9$, tal que essa configuração é curta. Eq. (13.100) produz $n_n = 1,91$ e $\sigma_{adm} = 170$ MPa, o que corresponde a $A = P/\sigma_{adm} = 53$ mm^2 e $a = 5,15$ mm.

A tabela resume os valores obtidos nas iterações. As unidades são MPa e mm.

Etapa	L_e/r	n	σ_{adm}	a	r
1	0	5/3	300	3,87	1,12
2	89,4	23/12	128,7	5,91	1,71
3	58,6	1,88	208,4	4,65	1,34
4	74,5	1,91	170	5,15	1,49
5	67,3	1,90	188	4,89	1,41
6	70,8	1,902	179,4	5,008	1,45
7	69,2	1,90	183,5	4,952	1,43

13.4 Enrijecimento por tração

Todo o presente capítulo até a seção anterior é dedicado ao fenômeno de flambagem em barras. Entretanto, as equações diferenciais desenvolvidas podem ser facilmente modificadas para modelar um outro tipo de fenômeno: o enrijecimento por tensão. Quando consideramos uma viga, como a do exemplo na Figura 13.31. Consideramos três situações definidas por três tipos distintos de carregamento:

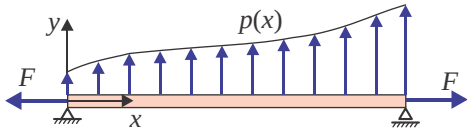


Figura 13.31: Viga sob carga transversal e tração.

1. Primeiro, apenas as cargas transversais, como $p(x)$ indicado. Nesse caso, a deflexão transversal é aquela obtida pela teoria de Euler-Bernoulli, definida pela equação diferencial da curva elástica $EI_z v'' = M_z(x)$.

2. Se a carga for apenas forças axiais, como F na figura, tem-se um problema de barra, que desenvolve deformações e tensões puramente axiais.

3. Caso ambos os carregamentos, transversal e axial trativo, como na figura, o comportamento é distinto dos casos anteriores.

Observando a Figura 13.32a se pode ver intuitivamente que o **esforço normal trativo** tem uma tendência de reduzir a deflexão transversal devido à carga transversal. Isso significa que, de fato, a carga axial trativa **aumenta a rigidez flexural** da viga, i.e., a tração gera um efeito de enrijecimento por tensão. Essa é uma situação análoga ao caso em que o **esforço normal é compressivo**, em que o fenômeno resultante é a instabilidade. Em ambos os casos, esse efeito só pode ser modelado identificando a condição de **equilíbrio na condição deformada** da viga.

A determinação das equações diferenciais de equilíbrio podem ser obtidas do elemento diferencial como na Figura 13.32b. Entretanto, uma dedução inteiramente similar já foi realizada, nas eqs.(13.8)-(13.16) para o caso de carga axial compressiva P. Dessa forma, para o presente caso, basta que adaptemos as mesmas equações, apenas substituindo P por $-F$. Assim, as equações para o problema da viga sob enrijecimento por tração são:

$$\boxed{EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_z, \qquad \frac{d^4v}{dx^4} - \lambda^2\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p(x)}{EI}, \quad \text{e} \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} - \lambda^2 M_z = p(x)} \tag{13.101}$$

onde λ^2 é definido por $\lambda^2 = F/EI$.

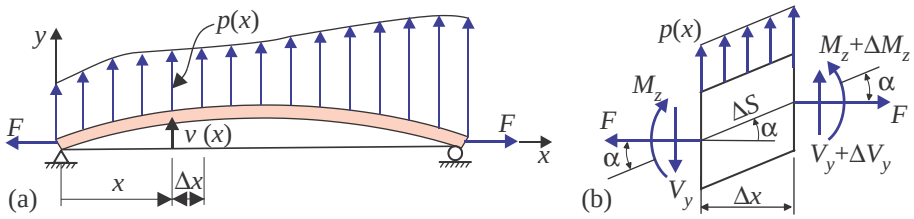


Figura 13.32: Configuração deformada de viga sob flexão e tração.

13.4.1 Solução da equação homogênea

Busca-se a solução do problema homogêneo associado a $(13.101)_3$, (com $p(x) = 0$), ou seja

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} - \lambda^2 M_z = 0. \tag{13.102}$$

Da teoria das equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes, sabe-se que essa equação é satisfeita para qualquer função na forma $M_z(x) = Ce^{mx}$, sendo C e m números reais a serem determinados. A prova que essa função satisfaz a equação diferencial consistem em simplesmente fazer a substituição, o que resulta em $Ce^{mx}m^2 - \lambda^2 Ce^{mx} = 0$. Como C e e^{mx} são não nulos, obtém-se a condição para que a função seja solução: $m^2 - \lambda^2 = 0$. Essa é a **equação característica** do problema diferencial. Uma vez que $\lambda^2 > 0$, as raízes deste polinômio são reais, dadas por: $m_1 = \lambda$ e $m_2 = -\lambda$. Desta forma, prova-se que a solução homogênea é:

$$\boxed{M_z = c_1^* \cosh \lambda x + c_2^* \text{senh } \lambda x} \tag{13.103}$$

onde as constantes c_1^* e c_2^* devem ser determinados a partir das condições de contorno da viga.

Em seguida passa-se à solução da equação $(13.101)_1$, tomando M_z de (13.103). Isso resulta em

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{c_1^*}{EI}\cosh\lambda x + \frac{c_2^*}{EI}\text{senh } \lambda x. \tag{13.104}$$

Integrando duas vezes obtém-se

$$v = -\frac{c_1^*}{\lambda^2 EI}\cosh \lambda x - \frac{c_2^*}{\lambda^2 EI}\text{senh}\lambda x + c_3 x + c_4. \tag{13.105}$$

Coletam-se as constantes de forma a simplificar a notação para:

$$\boxed{v(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \text{senh}\lambda x + c_3 x + c_4} \tag{13.106}$$

onde $c_1 = c_1^*/\lambda^2 EI$ e $c_2 = c_2^*/\lambda^2 EI$. Observa-se que (13.106) é a solução da equação de quarta ordem, eq. $(13.101)_2$.

13.4.2 Exemplo 13.12 - Enrijecimento em viga bi-rotulada

Consideremos uma viga perfeitamente reta (Figura 13.33a) de seção transversal uniforme, sob carga axial trativa perfeitamente centrada nos centroides, com apoios que permitem a rotação no plano. Determine a curva elástica da viga incluindo o efeito da força axial F na deflexão. Desejamos comparar a resposta com aquela obtida para a deflexão sem o efeito de F, como obtido no Capítulo 12. Os dados são: $p = 0,5$ N/mm, $E = 207$ GPa, o comprimento $L = 1$ m, e a seção transversal é tubular com diâmetros interno/externo $d/D = 12/20$ mm.

Solução:

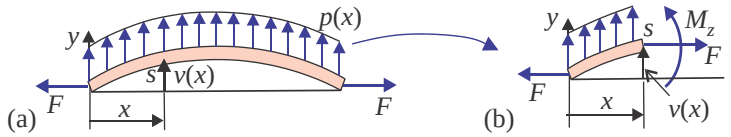


Figura 13.33: Viga bi-apoiada sob carga transversal uniforme e força axial.

O problema pode ser resolvido da equação diferencial de quarta ordem, $(13.101)_2$. Entretanto, como a viga é isostática, se pode usar um outro procedimento baseado em $(13.101)_1$, desde que primeiro obtenhamos a equação de momento fletor por equilíbrio global na configuração de referência. Assim, faz-se um corte numa seção arbitrária da barra, e monta-se o **diagrama de corpo livre na configuração deformada**, como na Figura 13.33b. Observe que aqui o aspecto crítico é que se calcule as equações de equilíbrio na configuração deformada, de forma a obter a contribuição de flexão proveniente da carga axial agindo na flecha, como ilustrado na figura.

Do equilíbrio de momentos em relação à própria seção s de corte tem-se:

$$M_z(x) = Fv\,(x) + p\frac{x^2}{2} - pL\frac{x}{2}. \tag{13.107}$$

Substituindo-se na equação diferencial $(13.101)_1$, $d^2v/dx^2 = M_z/EI$, tem-se

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \lambda^2 v\,(x) = p\frac{x^2}{2EI} - pL\frac{x}{2EI} \quad \text{onde} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}. \tag{13.108}$$

A solução geral é constituída pela parte homogênea e particular: $v(x) = v_h(x) + v_p(x)$.

Para o **Problema homogêneo**, $d^2v/dx^2 - \lambda^2 v\,(x) = 0$, da teoria das equações diferenciais tem-se que a **equação característica** associada é $m^2 - \lambda^2 = 0$. Um resumo do processo de solução é incluído no Apêndice 17.2. As raízes associadas a esta equação são reais: $m_1 = \lambda$ e $m_2 = -\lambda$. Neste caso a **solução geral** da equação diferencial é:

$$\boxed{v\,(x) = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \text{ senh } \lambda x} \tag{13.109}$$

Para o **Problema da solução particular,** como o lado direito de (13.108) é um polinômio quadrático, buscamos uma solução do mesmo tipo de polinômio:

$$v_p(x) = a + bx + cx^2\,, \tag{13.110}$$

onde as constantes a, b e c são obtidas de forma a satisfazer a equação diferencial. Substituindo (13.110) em (13.108) e igualando os coeficientes de cada potência de x, obtemos três equações que resultam em

$$a = -\frac{p}{EI\lambda^4}, \quad b = \frac{pL}{2EI\lambda^2} \quad \text{e} \quad c = -\frac{p}{EI\lambda^2}, \quad \text{onde } EI\lambda^2 = F. \tag{13.111}$$

Levando essas constantes à solução particular (13.110), somando-a com a solução homogênea (13.109), obtemos

$$v\,(x) = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \text{ senh } \lambda x - \frac{p}{F\lambda^2} + \frac{pL}{2F}x - \frac{p}{2F}x^2. \tag{13.112}$$

As constantes C_1 e C_2 devem ser determinadas a partir das condições de contorno da viga. Observe que essa solução é válida para barras com diversos tipos de apoios, não apenas bi-apoiada. Para a **barra bi-rotuladas** as **condições de contorno** são $v\,(0) = 0$ e $v\,(L) = 0$. Substituindo-se em (13.112) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
v\,(0) &= 0 = C_1 \cosh 0 + C_2 \text{ senh } 0 - \frac{p}{F\lambda^2}, \\
v\,(L) &= 0 = C_1 \cosh \lambda L + C_2 \text{ senh } \lambda L - \frac{p}{F\lambda^2} + \frac{pL^2}{2F} - \frac{pL^2}{2F}.
\end{aligned} \tag{13.113}
$$

da primeira equação obtém-se $C_1 = p/F\lambda^2$ e da segunda equação obtém-se $C_2 = [p/(F\lambda^2 \text{senh } \lambda L)][1 - \cosh \lambda L]$. Substituindo as constantes em (13.112) se tem a curva elástica da viga. A deflexão máxima ocorre em $x = L/2$, tal que

$$
v_{\max} = \frac{p}{8EI\lambda^4}\left[-8 + (\lambda L)^2 + 8\text{sech}(\lambda L/2)\right]. \tag{13.114}
$$

Deve-se notar que essa solução se aplica apenas para $F > 0$. Para $F = 0$, a equação diferencial (13.108) toma outra forma em que a solução é aquela descrita com os métodos do Capítulo 12 para curva elástica. No presente caso, da viga bi-apoiada, o Apêndice 17.1, caso 14, mostra que $v_{\max} = pL^4/384EI$ para $F = 0$. Aplicando os valores numéricos, podemos comparar os valores de $v_{\max}$ obtidos com e sem aplicação de força axial trativa F. Essa comparação é mostrada na Figura 13.34 para os dados numéricos do enunciado do exemplo. Nota-se que, como esperado, a aplicação da tração F reduz a deflexão transversal, i.e., a tração provoca um aumento da rigidez transversal da viga. Esse é o mesmo efeito que se observa em cordas de instrumentos musicais, como violão, que são adequadamente enrijecidos pelo aperto de afinamento aplicado. Cabos de aço suportando cargas também apresentam esse efeito.

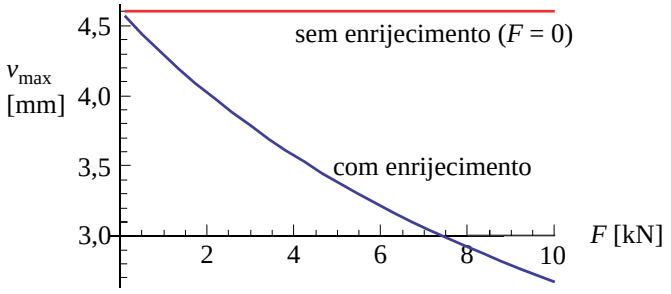
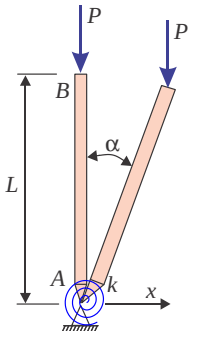


Figura 13.34: Deflexão máxima na viga bi-apoiada sem e com o efeito do enrijecimento.

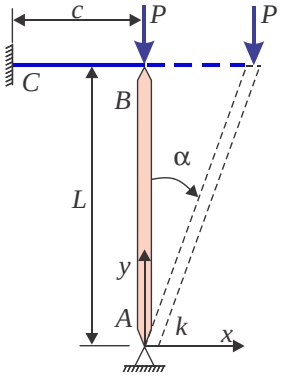
13.5 Exercícios

13.1 A barra AB é rígida de comprimento L está engastada na posição vertical na seção A. Pode-se representar a rigidez da base como uma mola flexural de rigidez k [Nm] na extremidade inferior A. A barra é submetida a uma força compressiva P. (a) Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema para instabilidade no plano xy. (b) determine P_{cr} para $L = 1$ m, $k = 1,2 \cdot 10^4$ kNmm/rad.

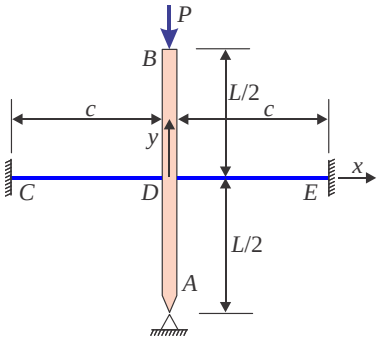


13.2 A barra rígida AB é rotulada em A e suportada em B na posição vertical por um cabo BC de comprimento c e submetida a uma força compressiva P. Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema para insta-

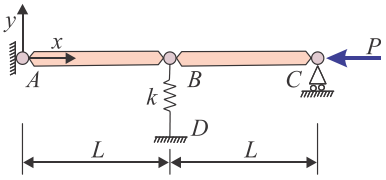
bilidade no plano xy, considerando que há uma barreira que impede o deslocamento da seção B para a esquerda. Use $L = 1$ m, e o cabo tem módulo de elasticidade $E = 120$ GPa, seção transversal de área $A = 20$ mm^2, $c = 200$ mm.



13.3 A barra rígida AB rotulada em A e suportada em D na posição vertical por dois cabos, CD e DE, de comprimentos c e submetida a uma força compressiva P. Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema para instabilidade no plano xy. Use $L = 1$ m. Os cabos têm módulo de elasticidade $E = 120$ GPa, seção transversal de área $A = 20$ mm^2 e $c = 200$ mm. Considere que a barra encontra-se impedida de se deslocar na direção z.

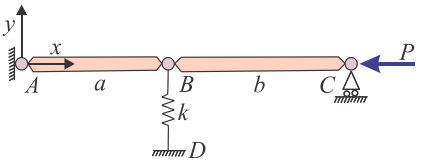


13.4 O par de barras AB e BC mostradas na figura são rotuladas entre si e nas extremidades. O apoio C permite a rotação e a translação ao longo do eixo x. O conjunto é suportado na rótula interna por uma mola linear de rigidez k. Considerando a rigidez da mola, podem-se considerar as barras absolutamente rígidas. (a) Determine a equação de equilíbrio, relacionando P com o ângulo de rotação α. Particularize para o caso de pequenos α. (b) Determine a carga crítica P_{cr}, considerando α pequeno. (c) Determine P_{cr} Para os valores: $L = 1$ m, $k = 10$ N/mm. Considere que as barra encontram-se impedidas de se deslocar na direção z.



13.5 Para o sistema do Exercício 4, (a) determine a relação (P/P_{cr}) versus α, para α entre 0 e $\pi/2$. (b) Qual o valor necessário para P que faça o sistema encontrar equilíbrio em $\alpha = 60°$.

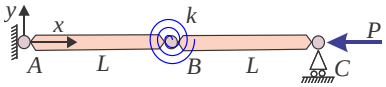
13.6 O par de barras AB e BC mostradas na figura são rotuladas entre si e nas extremidades. O apoio C permite a rotação e a translação ao longo do eixo x. O conjunto é suportado na rótula interna por uma mola linear de rigidez k. As barras têm comprimentos a e b. Considerando a rigidez da mola, pode-se considerar as barras absolutamente rígidas. (a) Determine a equação de equilíbrio relacionando P com o ângulo de rotação α da barra AB ou β da barra BC. Particularize para o caso de pequenos α. (b) Determine a carga crítica P_{cr}, considerando α e β pequenos. (c) Determine P_{cr} Para os valores: $a = 300$ mm e $b = 700$ mm e $k = 10$ N/mm. Considere que as barra encontram-se impedidas de se deslocar na direção z.



13.7 Para o sistema do Exercício 6, (a) determine a relação (P/P_{cr}) versus α ou β, para ângulos entre 0 e $\pi/2$. (b) Qual o valor necessário para P que faça o sistema encontrar equilíbrio em $\beta = 60°$.

13.8 As barras AB e BC mostradas na figura são rotuladas entre si e nas extremidades. O apoio C permite a rotação e a translação ao longo do eixo x. Uma mola flexural linear de rigidez k [Nmm/rad] une as extremidades de ambas as barras em B. Considerando a rigidez da mola, pode-se considerar as barras absolutamente rígidas.

(a) Determine a equação de equilíbrio relacionando P com o ângulo de rotação α. Particularize para o caso de pequenos α. (b) Determine a carga crítica P_{cr}, considerando α pequeno. (c) Determine P_{cr} Para os valores: $L = 1$ m, $k = 10^6$ Nmm/rad.

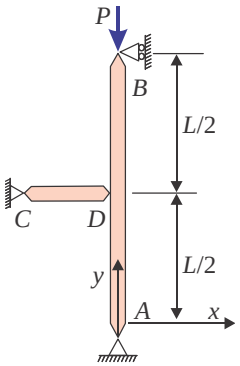


13.9 Considere o sistema do Exercício 1, em que a força P seja aplicada com uma **excentricidade** e em relação ao centroide da seção, no plano xy. (a) Determine a equação de equilíbrio na configuração deformada. (b) Determine a relação α versus P para pequenas deflexões. (c) Qual o valor limite de P, P_{cr}, que torna α arbitrariamente grande qualquer que seja e?

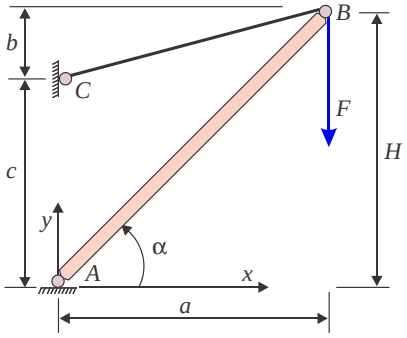
13.10 Considere o sistema do Exercício 2, em que a força P seja aplicada com uma **excentricidade** e em relação ao centroide da seção, no plano xy. (a) Determine a equação de equilíbrio na configuração deformada. (b) Determine a relação α versus P para pequenas deflexões. (c) Qual o valor limite de P, P_{cr}, que torna α arbitrariamente grande qualquer que seja e?

Teoria de Euler

13.11 A barra AB é flexível e bi-rotulada nas extremidades, com $E = 120$ GPa, $L = 1.000$ mm, seção transversal retangular com lados $b = 12$ mm na direção x e $h = 20$ mm na direção z. Essa barra é firmada no ponto central por uma barra CD, bi-rotulada e infinitamente rígida. Determine a força crítica axial P_{cr} do sistema. Qual o plano previsto para ocorrer a flambagem?



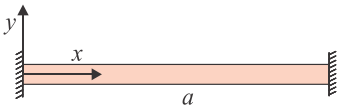
13.12 A barra AB é rotulada em A e suportada em B pelo cabo BC, e é usada como equipamento de elevação de carga F. Determine a máxima força F que pode ser aplicada, usando as equações de Euler com coeficiente de segurança $n = 2,5$. A barra AB é de liga com seção transversal circular tubular de diâmetros interno/externo $d = 50$ mm e $D = 60$ mm, e $E = 120$ GPa. As dimensões da estrutura são: $a = 1$ m, $b = c = 0,5$ m.



13.13 Resolva o Exercício 12 para $c = 0,5$ m, $\alpha = 60°$, comprimento da lança AB $L = 1.414$ mm e comprimento do cabo BC $L_c = 1.118$ mm. Determine também o esforço trativo no cabo.

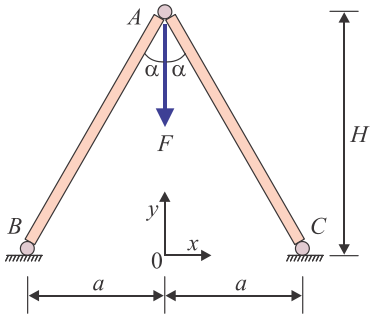
13.14 Resolva o Exercício 12 para $c = 0,5$ m, $\alpha = 30°$, comprimento da lança AB $L = 1.414$ mm e comprimento do cabo BC $L_c = 1.118$ mm. Determine também o esforço trativo no cabo.

13.15 A barra de aço foi montada sob interferência entre duas paredes distantes $a = 100$ mm. A força axial necessária para a montagem foi $F_0 = 200$ N. (a) Qual o máximo incremento ΔT de temperatura acima da temperatura de montagem que pode ser aplicada à barra? Considerar falha por flambagem com coeficiente de segurança $n = 2,5$ quanto à fórmula de Euler para barra bi-rotulada. (b) Qual a interferência geométrica inicial de montagem Δa? Considere um aço com $E = 200$ GPa, coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°$C e seção transversal retangular com dimensões $b \times h = 4 \times 6$ mm^2, com h na direção z. Qual o plano de flambagem?



13.16 Considere a barra do Exercício 15, montada sem interferência entre as duas placas. Qual o máximo incremento ΔT de temperatura acima da temperatura de montagem que pode ser aplicada à barra? Considerar falha por flambagem com coeficiente de segurança $n = 2,5$ quanto à fórmula de Euler.

13.17 Considere a treliça simples de duas barras como na figura. As barras são idênticas, com seção transversal de largura $b = 10$ mm no plano xy e $h = 20$ mm na direção z. $a = 300$ mm, $H = 2$ m e $E = 70$ GPa. Determine a máxima força F que pode ser aplicada, usando a fórmula de Euler com coeficiente de segurança $n = 2,5$.

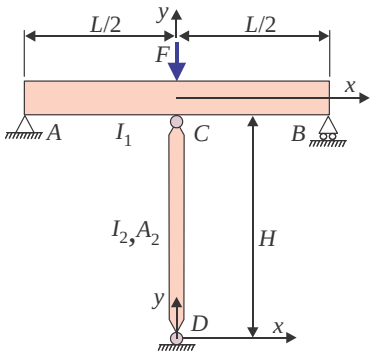


13.18 Resolva o problema da treliça do Exercício 17 com $a = 600$ mm.

13.19 Considere a treliça simples de duas barras do Exercício 17. As barras são idênticas. $a = 300$ mm, $H = 2$ m e $E = 70$ GPa. Determine o momento de inércia I_z da seção necessário para força $F = 4$ kN, usando a fórmula de Euler com coeficiente de segurança $n = 2,5$.

13.20 Resolva o problema da treliça do Exercício 19 com $a = 600$ mm.

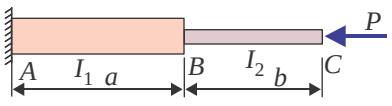
13.21 Considere uma viga bi-apoiada AB, apoiada no centro por uma barra bi-rotulada CD como na figura. Uma força F é aplicada no centro da viga. (a) Determine a máxima força F que pode ser aplicada, usando a fórmula de Euler para avaliar a flambagem da barra CD. (b) Para essa carga, determine o deslocamento transversal v_C no centro da viga na configuração instantaneamente antes da flambagem. (c) Determine v_C no centro da viga na configuração imediatamente após flambagem, obtida desconsiderando completamente a rigidez da barra. Usar os valores: $L = 1$ m, $H = 2$ m, $E = 70$ GPa. Os momentos de inércia em relação ao eixo z são $I_1 = 4.000$ mm^4, $I_2 = 6.000$ mm^4. $A_2 = 200$ mm^2.



13.22 Resolva o Exercício 21 com $L = 500$ mm, $H = 2$ m, $E = 200$ GPa, $I_1 = 4.000$ mm^4, $I_2 = 6.000$ mm^4, $A_2 = 200$ mm^2.

13.23 Resolva o Exercício 21 com $L = 1$ mm, $H = 1$ m, $E = 200$ GPa, $I_1 = 4.000$ mm^4, $I_2 = 6.000$ mm^4, $A_2 = 200$ mm^2.

13.24 Considere a barra escalonada mostrada na figura. (a) Determine a equação do esforço $M_z(x)$ em termos do deslocamento transversal $v(x)$ e do deslocamento v_c na seção C. Identifique a equação diferencial da curva elástica em cada trecho. (b) Determine a solução geral de cada uma das duas equações diferenciais em termos de 4 constantes de integração e de v_c (solução homogênea mais solução particular). (c) Identifique as condições de contorno e de compatibilidade (4 condições), e uma condição extra envolvendo $v(L)$ ou $M_z(L)$. (d) Determine o sistema matricial para as constantes de integração e faça a resolução analítica do sistema. Use como base a solução mostrada nas eqs. (13.60)-(13.67).



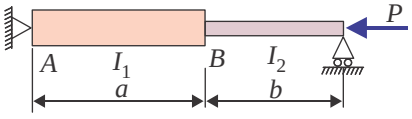
13.25 Considere a barra escalonada do Exercício 24. (a) Use a quinta equação envolvendo v_c e identifique a equação em termos de a, b e P, cuja raiz produz a carga crítica P_{cr}.

13.26 Considere a barra escalonada do Exercício 24 e 25. Particularize a equação obtida no Exercício 25 para o caso da barra não

escalonada (faça $b = 0$), e compare o resultado com a condição (13.56).

13.27 Considere a barra escalonada dos Exercícios 24 e 25. Particularize a equação obtida no Exercício 25 para o caso da barra com $I_{z2} = 4I_{z1}$ e $a = b = L/2$. Aplique para os valores: $E = 200$ GPa, $L = 1$ m, $I_{z2} = 1.000$ mm^4.

13.28 Considere a barra escalonada bi-rotulada mostrada na figura. (a) Determine a equação do esforço $M_z(x)$ em termos do deslocamento transversal $v(x)$. Identifique a equação diferencial da curva elástica em cada trecho. (b) Determine a solução geral de cada uma das duas equações diferenciais em termos de 4 constantes. (c) Identifique as condições de contorno e de compatibilidade. (d) Determine o sistema matricial para as constantes de integração e faça a resolução analítica do sistema. Use como base a solução mostrada nas eqs. (13.48)-(13.39).

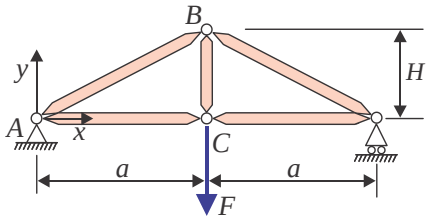


13.29 Considere a barra escalonada do Exercício 28. Identifique a equação em termos de P, cuja raiz produz a carga crítica P_{cr}.

13.30 Considere a barra escalonada dos Exercícios 28-29. Particularize a equação obtida no Exercício 29 para o caso da barra não escalonada (faça $b = 0$), e compare o resultado com a condição (13.31).

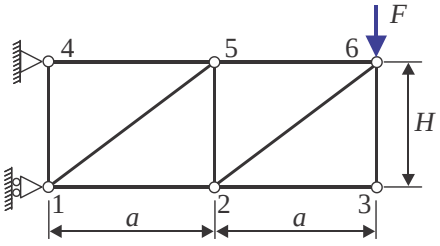
13.31 Considere a barra escalonada dos Exercícios 28-29. Particularize a equação obtida no Exercício 29 para o caso da barra com $I_{z1} = 4I_{z2}$ e $a = b = L/2$. Aplique para os valores: $E = 200$ GPa, $L = 1$ m, $I_{z2} = 1.000$ mm^4.

13.32 Para a treliça mostrada na figura, (a) determine os esforços nas barras, (b) identifique a barra mais comprimida, (c) determine o coeficiente de segurança teórico da estrutura quanto a flambagem, usando a fórmula de Euler. As barras são tubos de alumínio com $E = 72$ GPa, $a = 500$ mm, $H = 200$ mm, e seção com diâmetros externo/interno 20 mm/14 mm. $F = 4$ kN.



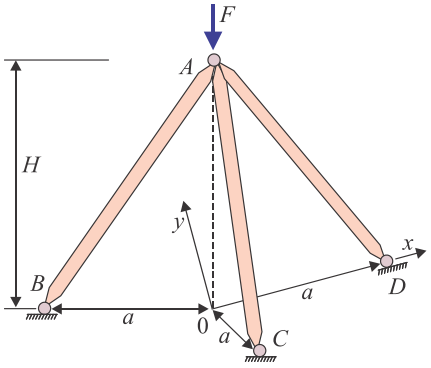
13.32.1 Resolva o Exercício 32 com $a = 700$ mm, $H = 200$ mm.

13.33 Resolva o problema da treliça da figura usando o enunciado do Exercício 32, com $H = 200$ mm e $F = 3$ kN.



13.33.1 Resolva o Exercício 33 com $a = 700$ mm, $H = 200$ mm.

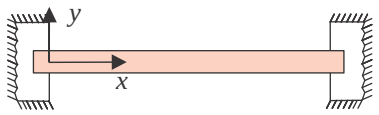
13.34 Considere a treliça simples de três barras como na figura. As barras são idênticas, montadas com ângulos idênticos entre si, com seções tubulares com diâmetros externo/interno 20 mm/14 mm. $F = 4$ kN, $a = 1,5$ m, $H = 1$ m e $E = 72$ GPa. Determine o coeficiente de segurança n usando a fórmula de Euler. O sistema cartesiano é definido com os eixos xy no plano da base, origem no centro e eixo z passando pelo ápice em A.



13.34.1 Resolva o Exercício 34 com $a = 1$ m.

13.35 Na estrutura do Exercício 34, qual o momento de inércia nas barras, necessário para suportar a carga com o coeficiente de segurança $n = 2,5$?

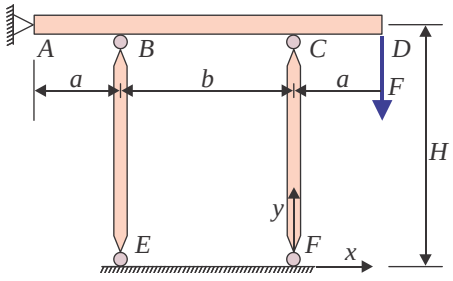
13.36 Uma barra de aço foi engastada em duas paredes distanciadas entre si por $L = 100$ mm. (a) Qual o máximo incremento ΔT de temperatura acima da temperatura de montagem que pode ser aplicada à barra? Considerar falha por flambagem com coeficiente de segurança $n = 2,5$ quanto à fórmula de Euler. (b) Use $E = 207$ GPa, coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6}/°\text{C}$ e seção transversal retangular com dimensões $b \times h = 4 \times 6$ mm^2, com h na direção z. Qual o plano de flambagem?



13.36.1 Resolva o Exercício 36, para alumínio com $E = 72$ GPa, $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}/°\text{C}$ e $b \times h = 6 \times 4$ mm^2, com h na direção z.

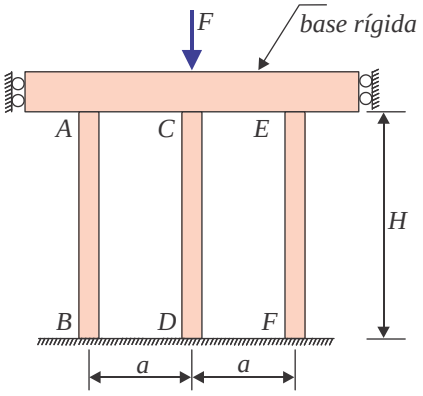
13.37 Para o problema 35, mostre que o incremento admissível de temperatura na barra bi-engastada é dado por $\Delta T = 4\pi^2 r^2/n\alpha L^2$ onde r é o raio de giração adequado da seção.

13.38 Na estrutura mostrada na figura, a barra horizontal AD é de aço e as barras verticais são de plástico rígido, PVC, rotuladas em todas as extremidades. (a) Determine as reações nos apoios. (b) Determine o coeficiente de segurança n usando a fórmula de Euler. Considere a barra horizontal absolutamente rígida. Para as barras verticais, $E = 3$ GPa. As barras BE e CF te, seção circular maciça, com diâmetros $d_1 = 15$ mm e $d_2 = 20$ mm, respectivamente. $H = 100$ mm, $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $F = 7$ kN. Note que o problema é hiperestático.



13.38.1 Resolva o Exercício 38 para barras verticais de diâmetros idênticos, $d_1 = d_2 = 20$ mm.

13.39 A estrutura mostrada na figura é constituída por uma barra horizontal considerada absolutamente rígida, que é pressionada por uma força vertical F. As três colunas são consideradas engastadas em ambas as extremidades. (a) Determine as reações nos apoios. (b) Determine o coeficiente de segurança n usando a fórmula de Euler. As barras verticais AB e EF são iguais com $E_{AB} = 1$ GPa e seção circular maciça de diâmetro $d_{AB} = 15$ mm. A barra central CD tem $E_{CD} = 2$ GPa e $d_{CD} = 12$ mm. $H = 100$ mm, $a = 100$ mm, $F = 8$ kN. Note que o problema é hiperestático.



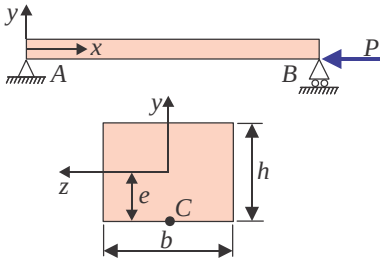
13.39.1 Resolva o Exercício 39 para $d_{AB} = 10$ mm e $d_{CD} = 12$ mm.

Cargas excêntricas

13.40 Considere uma barra com seção retangular $b \times h = 50 \times 100$ mm^2 $E = 72$ GPa e $\sigma_E = 300$ MPa. Determine o menor comprimento L_{min} para a barra, considerando início de escoamento, caso (a) a barra seja bi-rotulada e (b) biengastada.

13.41 Considere uma barra como na figura, de comprimento $L = 300$ mm e seção transversal $b \times h = 10 \times 5$ mm^2, de material com $E = 72$ GPa e $\sigma_E = 300$ MPa. As extremidades da barra são rotuladas de forma excêntrica como na figura. O carregamento é axial compressivo, de valor $P = 500$ N, aplicado na posição C dos apoios de forma excêntrica aos centroides das extremidades, com excentricidade $e = h/2$ medida ao longo da menor dimensão da seção. Determine: (a) o raio de giração da seção e o índice de esbeltez da barra; (b) a tensão normal máxima aplicada; (c)

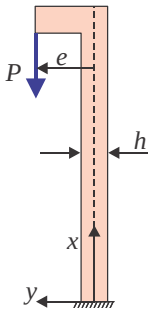
o coeficiente de segurança, analisando possível falha quanto ao início do escoamento e quanto à instabilidade; (d) a deflexão máxima, usando (13.83). Esse valor de deflexão é admissível quanto aos limites de validade da teoria linear?



13.41.1 Resolva o Exercício 41 para $L = 350$ mm.

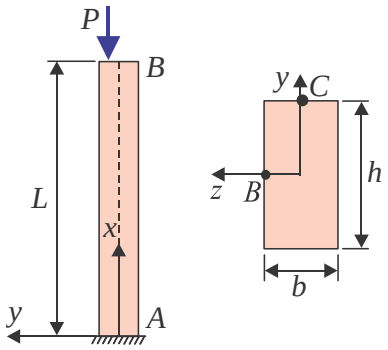
13.42 Para a barra do Exercício 41, qual seria a carga P aplicada para que a deflexão ficasse no limite admissível da teoria linear de flexão vista no texto? Use (13.83) e $v_{\max} = h/2$.

13.43 Considere a coluna mostrada na figura, engastada na base e sob a ação de uma força axial P aplicada no topo com uma excentricidade e. (a) Determine a equação diferencial da curva elástica, similar a (13.77), em termos de P, e, do comprimento L e I_z. (b) Identifique as condições de contorno e determine a curva elástica, $v(x) = (v_{\max} + e)(1 - \cos \lambda x)$.



13.44 Para o problema do Exercício 43, (a) determine a expressão do deslocamento máximo, $v_{\max} = e(\sec \lambda L - 1)$; (b) determine a expressão da carga crítica, $P_{cr} = \pi^2 EI_z/4L^2$; (c) determine a expressão da tensão máxima na barra, $\sigma_{\max} = \dfrac{P}{A}\left[1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{L}{r}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\right)\right]$.

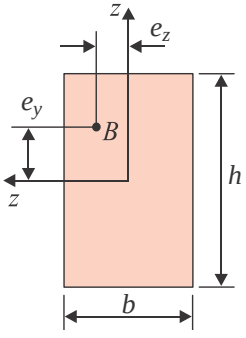
13.45 Considere a coluna mostrada na figura, em que a carga P é aplicada no ponto B da seção.



Determine: (a) o deslocamento máximo; (b) a carga crítica de instabilidade; (c) a tensão máxima na coluna; (d) o coeficiente de segurança quanto á flambagem, ao excesso de flexibilidade e ao início do escoamento. Use $P = 1$ kN, $L = 1,5$ m, $b = 20$ mm, $h = 40$ mm, $E = 72$ GPa, $\sigma_E = 300$ MPa, $v_{adm} = b/2$, $e = b/2$. (Dica: use os resultados dos Exercícios 43 e 44.)

13.46 Considere o problema do Exercício 45, em que a carga P é aplicada no ponto C da seção, com $v_{adm} = h/2$, $e = h/2$.

13.47 Na coluna do Exercício 45 a carga é aplicada no ponto B mostrado na figura, com excentricidades e_z e e_y.



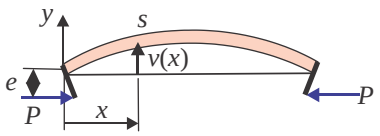
(a) Determine a expressão para a relação e_y/e_z que façam a deflexão máxima em ambas as direções y e z sejam iguais. (b) Aplique para: $P = 1$ kN, $L = 2$ m, $b = 20$ mm, $h = 40$ mm, $E = 207$ GPa.

13.48 Refaça o Exercício 47 com $P = 5$ kN.

13.48.1 No Exercício 47, qual a excentricidade e_z se $P = 3.405,01$ N?

13.49 Considere uma barra bi-rotulada como na figura, sob a ação de uma força compressiva P aplicada com uma excentricidade $e = 0,25D$, onde D é o diâmetro da seção

tubular circular. Use (13.89) para estimar o valor de P/A correspondente a uma tensão admissível $\sigma_{\max} = 300$ MPa. $L = 2$ m, $D = 50$ mm, $d = 28$ mm, $E = 200$ GPa. Qual a tensão crítica $(P/A)_{cr}$?

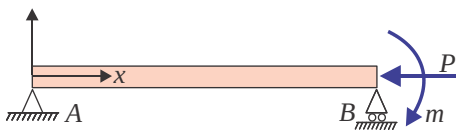


13.50 Resolva o problema do Exercício 49, para $L = 1$ m, $D = 20$ mm, $d = 12$ mm, com excentricidade $e = 0,05D$. Use a eq. (13.89) para obter uma curva para L/r e o fator d apropriados, e use a curva para obter P/A correspondente à tensão admissível. Qual a tensão crítica $(P/A)_{cr}$?

13.51 Considere uma coluna engastada-livre como no Exercício 43, sob a ação de uma força compressiva P aplicada com uma excentricidade $e = 0,05D$, onde D é o diâmetro da seção tubular circular. Use a equação obtida naquele Exercício para obter uma curva para L/r e o fator d apropriados, e use a curva para obter P/A correspondente a uma tensão admissível $\sigma_{\max} = 300$ MPa. $L = 2$ m, $D = 50$ mm, $d = 28$ mm, $E = 207$ GPa. Qual a tensão crítica $(P/A)_{cr}$?

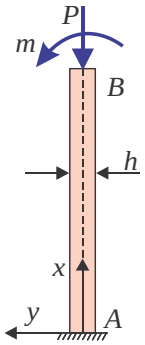
13.52 Resolva o problema do Exercício 51 para $L = 1$ m, $D = 20$ mm, $d = 12$ mm. Use a eq. (13.89) para obter uma curva para L/r e o fator d apropriados, e use a curva para obter P/A correspondente à tensão admissível. Qual a tensão crítica $(P/A)_{cr}$?

13.53 Considere uma barra bi-rotulada como na figura, sob a ação de uma força compressiva P e um momento fletor concentrado aplicados na seção B. (a) Use o procedimento da seção 13.1.4, página 479, para determinar $M_z(x)$ em termos de $v(x)$, e em seguida identifique a equação diferencial de equilíbrio e identifique as condições de contorno. (b) Resolva a equação diferencial, obtendo a solução homogênea e a particular. (c) Obtenha a expressão para a coordenada $\bar{x}$ em que $v(x)$ é máximo.



13.54 Para o Exercício 53, (a) determine a expressão explícita para $M_z(x)$. (b) Determine a expressão de $M_{z\max}$ e de $\sigma_{\max}$ na viga e a coordenada $\hat{x}$ onde atuam. (c) Qual a carga crítica P_{cr}? Para isso use a expressão de $v(L/2)$. Use a curva elástica $v(x) = m\text{sen}\lambda x/\left(P\text{sen}\lambda L\right) - mx/PL$.

13.55 Considere a coluna engastada na base como na figura, sob a ação de uma força compressiva P e um momento fletor concentrado aplicados na seção B.



(a) Use o procedimento da seção 13.1.4, página 479, para determinar $M_z(x)$ em termos de $v(x)$, e em seguida identifique a equação diferencial de equilíbrio e identifique as condições de contorno. (b) Resolva a equação diferencial, obtendo a solução homogênea e a particular. (c) Obtenha a expressão para $v_{\max}$.

13.56 Para o Exercício 55, (a) determine a expressão explícita para $M_z(x)$. (b) Determine a expressão de $M_{z\max}$ e de $\sigma_{\max}$ na viga e a coordenada $\hat{x}$ onde atuam. (c) Qual a carga crítica P_{cr}? Use a curva elástica $v(x) = (v_{\max} + m/P)(1 - \cos\lambda x)$. Use a solução do Exercício 43.

Cálculo normalizado pela AISC

13.57 Considere uma barra de comprimento $L = 100$ mm e seção transversal $b \times h = 5 \times 10$ mm^2, com material com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 500$ MPa. (a) determine o raio de giração da seção e o índice de esbeltez da barra. (b) Determine a tensão axial média admissível na coluna, considerando que o carregamento é axial compressivo, aplicado de forma concêntrica aos centroides das extremidades. Use as fórmulas da norma AISC. As extremidades da barra são rotuladas. (c) qual o coeficiente de segurança,

se a força axial compressiva aplicada for $P = 4$ kN? Usar o desenvolvimento do Exemplo 10.

13.58 Refaça o Exercício 57, com uma seção circular maciça de mesma área.

13.59 Refaça o Exercício 57, com uma seção circular tubular de mesma área, em que a relação diâmetro interno/externo seja $d/D = a = 0,8$.

13.60 Refaça o Exercício 57 com uma barra de comprimento $L = 150$ mm.

13.61 Refaça o Exercício 57 com uma barra de comprimento $L = 300$ mm.

Capítulo 14

Métodos de energia

Desde o início da física, nos séculos 16 e 17, duas grandes filosofias foram desenvolvidas, a chamada *mecânica Newtoniana* e a *mecânica Lagrangeana*. A primeira trata com entidades vetorias, principalmente as forças e deslocamentos. O equilíbrio é identificado também de forma vetorial. Já a mecânica Lagrangeana trata com entidades escalares, principalmente energias e trabalho. Os mesmos principios gerais da mecânica são expressos nas duas familias, porém em formatos distintos, que apresentam vantagem em distintos tipos de problemas.

A **mecânica newtoniana** é uma ferramenta bastante poderosa para a solução de problemas com pequeno número de graus de liberdade. Quando o número de graus de liberdade cresce, os sistemas ficam de difícil manuseio com a mecânica vetorial de Newton. Em diversas situações o trabalho com a mecânica Lagrangeana é mais interessante, por utilizar apenas entidades escalares.

No presente capítulo apresentam-se as ferramentas matemáticas da mecânica Lagrangeana associada a problemas básicos de mecânica estrutural. Nesse âmbito, tem-se procedimentos eficientes para o cálculo manual de estruturas comuns como pórticos e treliças simples, de poucos elementos e vigas hiperestáticas, por exemplo, em que se pode rapidamente calcular valores em pontos isolados, como algumas reações ou deslocamentos. São métodos que complementam outros métodos como o da integração da curva elástica. Os métodos vistos aqui são mais adequados em situações onde não se tem interesse em determinar a curva elástica completa em todos os pontos da estrutura, mas é suficiente apenas que se determine os valores de deslocamento em alguns poucos pontos específicos da peça. Isso é mais comum em estruturas planas ou tridimensionais de poucos elementos, onde a determinação da configuração deformada completa é dificil de ser obtida por cálculo manual. Por outro lado, em estruturas complexas de grandes quatidades de elementos, em que se deseje a determinação completa dos campos em todos os pontos, devem-se buscar métodos computacionais, como o método de elementos finitos.

Inicialmente considere-se o **trabalho** realizado por uma força aplicada nm ponto material P que se move ao longo de uma determinada trajetória c, conforme ilustrado na Figura 14.1. O trabalho dU realizado pela força $\mathbf{F}$ ao longo do caminho $d\mathbf{r}$ de comprimento diferencial é dado por:

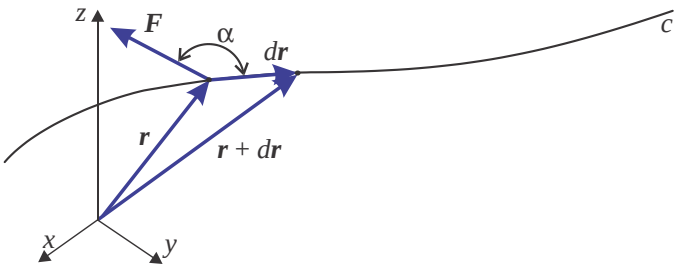


Figura 14.1: Força aplicada sobre um ponto que desloca-se ao longo de um trajeto c.

$$dU = \mathbf{F} \cdot \ d\mathbf{r}. \tag{14.1}$$

Logo, o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ ao longo de um caminho c é dado por

$$U = \int_c \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} \tag{14.2}$$

i.e., U é a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo da linha c. Outra maneira de escrever o trabalho é:

$$U = \int_c \|\mathbf{F}\| \;\; \|d\mathbf{r}\| \cos\alpha, \tag{14.3}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do vetor e α é o ângulo entre a força e a direção de deslocamento. Essa representação indica alguns casos em que as forças que não realizam trabalho:

- Forças que atuam perpendiculares ao deslocamento do ponto;
- Forças aplicadas em pontos fixos, como apoios considerados rígidos, que não sofrem movimento.

Com a definição geral dada acima, o objetivo a partir de agora á aplicá-la à modelagem e solução de problemas de mecânica dos corpos deformáveis. Inicia-se o estudo a partir de dois casos simples, como segue.

14.1 Trabalho de deformação

14.1.1 Trabalho de deformação para estado uniaxial de tensão

Considere um elemento diferencial de dimensões $dx \times dy \times dz$ como ilustrado na Figura 14.2a, submetido apenas à componente de tensão σ_{xx}. Sob a ação deste estado uniaxial de tensões, o corpo se deforma nas três direções. Para um **material elástico-linear**, essas deformações são dadas pela lei de Hooke, eq.(4.60), página 120, como:

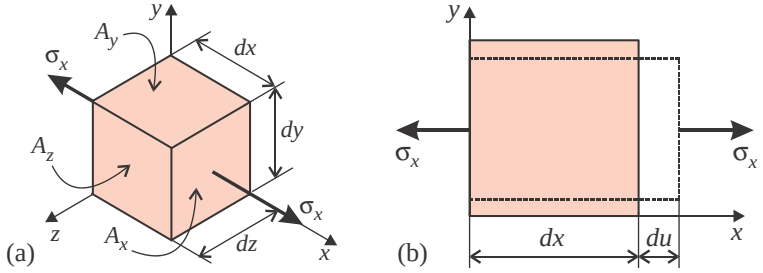


Figura 14.2: (a) Tensão normal uniaxial atuando num elemento diferencial de volume; (b) tensão e deformações num elemento diferencial.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E}, \tag{14.4}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade do material. Como ilustrado na Figura 14.2b, a relação entre a variação do comprimento, du, da linha dx, e a deformação ε_x, é dada através de:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \tag{14.5}$$

(De fato, essa é uma das equações das relações deformação-deslocamento, eq.(4.12), página 97.) Pode-se escrever que:

$$du = \varepsilon_x dx. \tag{14.6}$$

Lembrando ainda a definição de tensão em termos das forças locais,

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA_x}, \tag{14.7}$$

pode-se escrever que:

$$dF_x = \sigma_x \; dA_x. \tag{14.8}$$

O trabalho aplicado por dF_x, que varia linearmente com du, num elemento diferencial de volume dV, é

$$dU = \frac{1}{2} dF_x du. \tag{14.9}$$

A notação do produto escalar não é utilizada aqui, uma vez que a força e o deslocamento são colineares.

- **Observação**: **o fator** $1/2$ **aparece em (14.9) porque o carregamento aplicado cresce a partir de** 0 **até seu valor máximo**. Na definição original de trabalho de uma força, como em (14.3), a força é considerada ser uniforme ao longo da trajetória do ponto. No caso de um corpo deformavel como na situação da Figura 14.2, a força começa nula, e seu valor posterior é dependente do deslocamento desenvolvido no elemento diferencial.

Tomando (14.6) e (14.8), a energia pode ser escrita como:

$$dU = \frac{1}{2} \; \sigma_x \; \varepsilon_x \; \underbrace{dx \; dA_x}_{dV}, \tag{14.10}$$

onde $dV = dx \; dy \; dz$ e $dA_x = dy \; dz$.

$$dU = \frac{1}{2} \; \sigma_x \; \varepsilon_x \; dxdydz, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \; \sigma_x \; \varepsilon_x, \tag{14.11}$$

Define-se a razão $U_o \equiv \dfrac{dU}{dV}$ como a **densidade de energia por unidade de volume**. Então,

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2} \; \sigma_x \varepsilon_x.} \tag{14.12}$$

Essa expressão pode ser representada geometricamente na forma mostrada na Figura 14.3a. A linearidade na relação tensão deformação indica que a área sob a reta representa a energia de deformação armazanada num elemento de material de volume unitário.

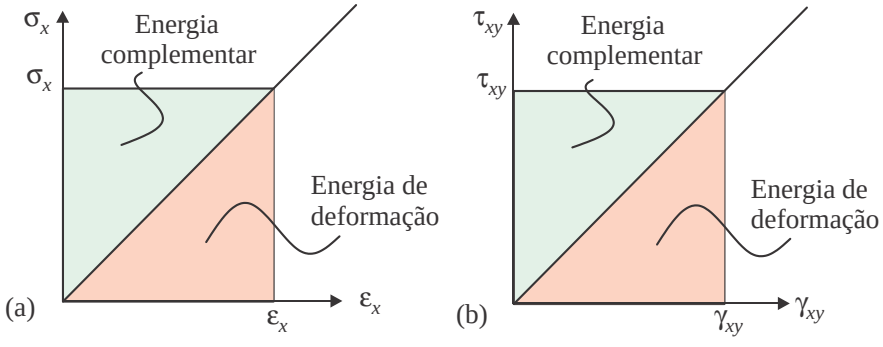


Figura 14.3: Energias de deformação e complementar elástico-lineares em estado uniaxial de tensões e em cisalhamento plano.

Considerando que os deslocamentos aconteçam com velocidade muito baixa, ou seja, carregamentos quase estáticos, pode-se dizer que o corpo, ao se deformar, transforma todo o trabalho de

deformação em energia potencial ou energia de deformação armazenada elasticamente no material, sem parcela de energia cinética.

A área hachurada superior na Figura 14.3a da linha é denominada de **energia complementar de deformação**. Como o comportamento do material é linear, o valor das duas áreas, inferior e superior são iguais. Tomando da lei de Hooke, pode-se escrever a densidade de energia de deformação de duas formas diferentes:

$$\boxed{U_o = \frac{\sigma_x^2}{2E} \qquad \text{ou} \qquad U_o = \frac{E}{2}\,\varepsilon_x^2}. \tag{14.13}$$

14.1.2 Trabalho de deformação para o caso de cisalhamento puro

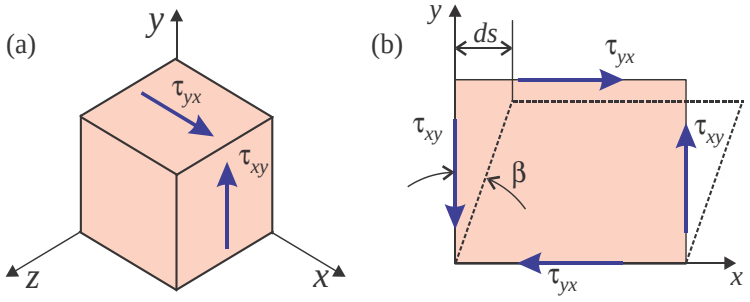


Figura 14.4: (a) Tensão cisalhante num elemento diferencial; (b) tensão e deformação cisalhante num elemento diferencial.

Consideramos um elemento diferencial de um corpo, numa posição arbitrária, sob a ação apenas das tensões cisalhantes τ_{xy}, como na Figura 14.4a. Sob a ação das deformações cisalhantes o elemento diferencial sofre deslocamentos que causam alterações dos ângulos retos das faces do elemento de volume. Estas deformações são representadas na Figura 14.4(b), onde se fez um tombamento do trapezio para melhor identificação da deformação angular β. Considera-se que a deformação cisalhante seja $\gamma_{xy} = \beta$.

Em seguida, considera-se o material elástico-linear, tal que a lei de Hooke, eq.(4.60), página 120, toma a forma simples

$$\beta = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \tag{14.14}$$

onde G é o modulo de elasticidade cisalhante.

A única força que se desloca na direção do deslocamento é aquela associada à tensão no topo do elemento. Na face inferior a força não sofre deslocamento, e nas duas faces laterais a força é perpendicular ao deslocamento, de forma que em ambos os casos o trabalho da força é zero. Lembramos que aqui nos restringimos a pequenos deslocamentos e rotações. Também, de forma mais rigorosa, ambas as faces do elemento, inferior e superior, se transladam no sentido x. Entretanto, na presente dedução, importa apenas o deslocamento relativo entre elas, já que a força atuante em ambas as faces é a mesma.

O trabalho de deformação cisalhante no elemento diferencial do corpo é dado por $dU = dF_x ds/2$, onde $dF_x = \tau_{xy}\; dz\; dx$ e $ds = \gamma_{xy}\; dy$ (desde que se tenha pequenas deformações). Assim tem-se

$$dU = \frac{1}{2}\,\underbrace{\tau_{yx}\; dz\; dx}_{dF_x}\; ds = \frac{1}{2}\;\tau_{xy}\;\gamma_{xy}\;\underbrace{dx\; dy\; dz}_{dV}. \tag{14.15}$$

Na segunda igualdade utilizou-se a condição de simetria do tensor tensão, tal que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Em seguida, substituindo, obtém-se a **densidade de energia de deformação elástica** como:

$$\boxed{U_o \equiv \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\ \tau_{xy}\ \gamma_{xy}.} \tag{14.16}$$

Novamente pode ser feita uma interpretação geométrica dessa expressão, como feita para o caso de tensão uniaxial, porém tomando cuidado de trocar os símbolos da tensão e da deformação normais para cisalhantes, como ilustrado na Figura 14.3b.

14.1.3 Trabalho de deformação para estado multiaxial de tensões

Os resultados deduzidos acima mostram que, caso se aplique num elemento diferencial de volume de material **apenas** uma componente de tensão, σ_x, a densidade de energia é $U_o = \frac{1}{2}\ \sigma_x\ \varepsilon_x$, e que se for aplicada **apenas** a componente σ_y, a densidade de energia é $U_o = \frac{1}{2}\sigma_y\ \varepsilon_y$. Mesmo que σ_x também cause deformações transversais, como ε_y, ela não gerará trabalho, uma vez que ocorrem em direções perpendiculares. Assim, as parcelas de energia devidas às duas componentes de tensão são associadas apenas às correspondentes componentes de deformação, sem interação entre elas. Conclui-se que, caso sejam aplicadas simultaneamente ambas as componentes de tensão no ponto, a densidade de energia será simplesmente a soma das parcelas individuais, $U_o = \frac{1}{2}\ \sigma_x\ \varepsilon_x + \frac{1}{2}\ \sigma_{yy}\ \varepsilon_{yy}$, i.e., a energia, sendo um escalar, apenas se soma. O mesmo raciocinio aplica-se ao caso de um **estado triaxial de tensões**, em que as seis componentes são aplicadas simultaneamente. Nesse caso, a densidade de energia de deformação é dada por:

$$\boxed{U_o = \frac{1}{2}\ \left\{\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right\}} \tag{14.17}$$

Essa expressão pode ser reescrita inteiramente em termos de tensões ou de deformações, pelo uso da lei de Hooke generalizada, vista nas equações (4.62) e (4.63), na página 120. Com isto, a equação da energia pode ser escrita como:

$$\boxed{\begin{array}{rl} U_o = & \frac{1}{2E_\nu}\ \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) + \frac{1}{2G}\ \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right) \\ & -\frac{\nu}{2E}\ \left[\sigma_x\ \left(\sigma_y + \sigma_z\right) + \sigma_y\ \left(\sigma_x + \sigma_z\right) + \sigma_z\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \text{ou} \\ U_o = & \frac{E\ \nu}{2\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_{zz}\right)^2 \\ & +G\ \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\ \left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)\right] \end{array}} \tag{14.18}$$

Essas são expressões da densidade de energia de deformação em um estado triaxial de tensões, agora **particularizadas para materiais isotrópicos elástico-lineares**. Nota-se que a representação (14.17) independe do tipo de material.

14.2 Energia de deformação elástica

14.2.1 Energia de deformação elástica de uma barra sob esforço normal

Considera-se uma barra de comprimento L, como na Figura 14.5, com seção transversal de área A, eventualmente variavel, i.e., $A = A(x)$, sob a ação de cargas axiais, tal que o esforço normal seja descrito por uma função $N_x = N_x\left(x\right)$. A energia de deformação na barra como um todo é dada por

$$U = \int\ dU = \int_V\ U_o\ dV. \tag{14.19}$$

A densidade de energia de deformação para um estado uniaxial de tensões é dada na eq.(14.13), $U_o = \sigma_x^2/2E$. Como $\sigma_x = N_x\left(x\right)/A(x)$. O volume diferencial é separado em duas partes para facilitar a integração: $dV = dA\ dx = (dydz)dx$. Assim,

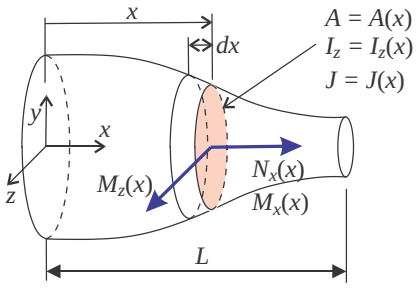


Figura 14.5: Barra de seção transversal variável, sujeita a esforços normal e de momentos fletor e torçor.

$$U = \int_{x=0}^{L} \int_{A} \frac{N_x^2}{2EA^2} \, (dydz)dx. \tag{14.20}$$

Uma vez que $N_x\,(x)$ e $A\,(x)$ independem de y e z, pode-se tirar o integrando para fora da integral interna, resultando

$$U = \int_{x=0}^{L} \frac{N_x^2}{2EA^2} \underbrace{\left[\int_{A} dydz\right]}_{A} dx.$$

Agora a integral interna resulta apenas no valor da área A da seção transversal. Com isso, a energia de deformação de uma barra sob esforço normal é dada por:

$$\boxed{U = \int_{0}^{L} \frac{N_x^2}{2EA} \, dx.} \tag{14.21}$$

14.2.2 Energia de deformação para o problema de flexão

Considera-se uma barra de comprimento L, , como na Figura 14.5, com seção transversal de momento de inércia I_{zz}, eventualmente variavel, i.e., $I_{zz} = I_{zz}(x)$, sob a ação de cargas transversais, tal que o esforço de momento fletor seja descrito por uma função $M_z\,(x)$. A energia de deformação na barra como um todo é dada por

$$U = \int dU = \int_{V} U_o \, dV. \tag{14.22}$$

A densidade de energia de deformação para um estado uniaxial de tensões é dada na eq.(14.13), $U_o = \sigma_x^2/2E$. Assim, a energia de deformação total da viga é

$$U = \int dU = \int_{V} U_o \, dV = \int_{V} \frac{\sigma_x^2}{2E} \, dV. \tag{14.23}$$

Como no caso da barra sob carga axial, o volume diferencial é separado em duas partes para facilitar a integração: $dV = dA\ dx = (dydz)dx$. A variação da tensão normal na viga é dada pela **fórmula de flexão**, $\sigma_x = -M_z\ y/I_{zz}$, como visto na seção 8.2, página 281. Então a energia na viga fica

$$U = \int_{x=0}^{L} \int_{A} \frac{1}{2E} \left(-\frac{M_z\ y}{I_{zz}}\right)^2 \, (dydz)dx. \tag{14.24}$$

Como M_z e I_{zz} independem de y e z, o integrando pode sair da integral interna, o que resulta em:

$$U = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_{zz}^2} \left[\underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_{zz}} \right] dx, \tag{14.25}$$

A integral interna é, por definição o momento de inércia da seção. Então, tem-se a expressão para a **energia de deformação de uma viga sob flexão no plano** z:

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M_z^2}{I_{zz}} \, dx} \tag{14.26}$$

De maneira semelhante, **para a flexão no plano** y, se tem:

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M_y^2}{I_{yy}} \, dx} \tag{14.27}$$

14.2.3 Energia de deformação para torção de eixos de seção circular

Considera-se uma barra de comprimento L, , como na Figura 14.5, com seção transversal circular de momento polar inércia J, eventualmente variavel, i.e., $J = J(x)$, sob a ação de cargas torcionais, tal que o esforço de momento torçor seja descrito por uma função $M_x\,(x)$. A energia de deformação na barra como um todo, é dada por

$$U = \int dU = \int_V U_o \, dV.$$

A densidade de energia de deformação para um estado de tensões de cisalhamento simples é dada na eq.(14.18), $U_o = \tau^2/2G$. A variação da tensão cisalhante na viga é dada pela **fórmula de torção**, $\tau = M_x \, r/J$, como visto na seção 7.4, página 248. Assim, a energia de deformação total da barra é

$$U = \int dU = \int_V U_o \, dV = \int_V \frac{1}{2G} \, \tau^2 \, dV. \tag{14.28}$$

Como nos casos da barra sob carga axial e flexão, o volume diferencial é separado em duas partes para facilitar a integração, porém em coordenadas polares: $dV = dA \, dx$. Assim

$$U = \frac{1}{2G} \int_V \left(\frac{M_x}{J} r \right)^2 \, dV = \frac{1}{2G} \int_{x=0}^{L} \frac{M_x^2}{J^2} \left[\underbrace{\int_A r^2 \, dA}_{J} \right] dx, \tag{14.29}$$

Uma vez que $J = \int_A r^2 \, dA$ é o momento polar de inércia da seção, pode-se escrever que a energia de deformação da barra é dada por:

$$\boxed{U = \frac{1}{2G} \int_{x=0}^{L} \frac{M_x^2\,(x)}{J} \, dx} \tag{14.30}$$

14.2.4 Energia de deformação devido ao esforço cortante

Considera-se agora uma viga sob a ação de forças transversais. Essas forças geram dois tipos de esforços, os momentos fletores e o esforço cortante. O primeiro geram as tensões normais de flexão e a energia de deformação de flexão. O esforço cortante está assciado à distribuição de tensões cisalhantes transversais na viga e também a uma outra quantidade de energia de deformação, agora de cisalhamento. Ambas as parcelas de energia de deformação são armazenadas simulataneamente no material. Consideramos aqui apenas o efeito isolado do esforço cortante e a energia que ele acarreta.

Considera-se aqui que as forças transversais e o esforço cortante V_y sejam aplicados na direção y. A distribuição de tensões cisalhantes é dada pela eq.(9.12), página 317:

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{V_y\, Q_z}{I_{zz}\, t_y}, \tag{14.31}$$

Da eq.(14.16), a densidade de energia de deformação por $U_o = \tau_{xy}^2/2G$, de forma que a energia de deformação total da viga é dada por:

$$U = \int dU = \int_V U_o\, dV = \int_V \frac{1}{2G}\, \tau_{xy}^2\, dV. \tag{14.32}$$

Assim, para o cortante na direção y, a energia de deformação da viga é:

$$\boxed{U = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2G} \frac{V_y^2}{I_{zz}^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_z}{t_y} \right)^2 dA \right] dx} \tag{14.33}$$

De maneira semelhante, para o esforço cortante na direção z, a energia é

$$\boxed{U = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2G}\, \frac{V_z^2}{I_{yy}^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_y}{t_z} \right)^2 dA \right] dx} \tag{14.34}$$

14.3 Deslocamento pelo método da energia

O princípio da conservação da energia, que diz que a energia não pode ser criada ou perdida, pode ser aplicada aos sistemas elásticos para a determinação de deslocamentos. Para um processo em que não há troca de calor (processo adiabático) e com as forças aplicadas de maneira lenta (quase estática) de tal forma que a variação da energia cinética do corpo possa ser desprezada (velocidade e aceleração do corpo muito baixos), a primeira lei da termodinâmica pode ser expressa como:

Trabalho aplicado sobre o sistema	=	Variação de energia de deformação armazenada no sistema

De forma compacta, tem-se

$$W_e = U, \tag{14.35}$$

ou seja, o trabalho das forças externas deve ser igual à variação da energia de deformação elástica do corpo que, por sua vez, é igual ao trabalho das forças internas com sinal contrário.

14.3.1 Exemplo 14.1 - Deslocamento em uma barra

Considere o problema simples da barra engastada sob carga axial, como mostrada na Figura 14.6. Calcular o deslocamento na extremidade da barra utilizando a equação de balanço de energia.
Solução:
O trabalho realizado pelas forças externas (F e a reação no apoio) é

$$W_e = \frac{1}{2}\, F\delta. \tag{14.36}$$

Note que a **reação no apoio** não gera trabalho, pois considera-se que o apoio seja rígido. A energia de deformação da barra vem de (14.21)

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^L \frac{N_x^2}{A}\, dx = \frac{1}{2E} \int_0^L \frac{F^2}{A}\, dx. \tag{14.37}$$

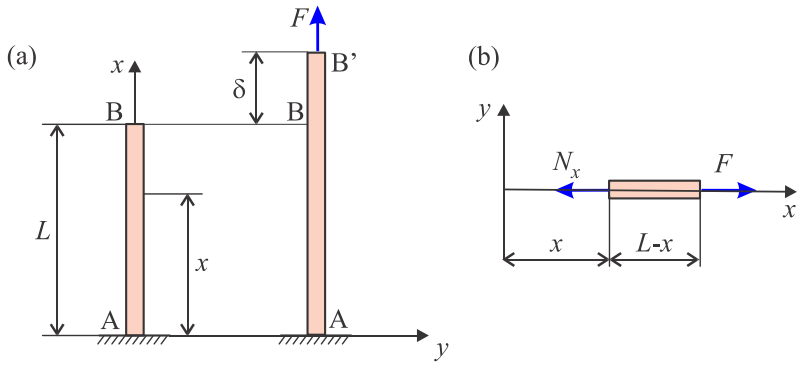


Figura 14.6: (a) Configuração deformada em barra sob carga axial e (b) esforços.

Como A e F são independentes de x, a energia na barra fica

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}. \tag{14.38}$$

Assim, igualando o trabalho realizado pelas forças externas à energia de deformação elástica, eq.(14.35), tem-se:

$$\frac{1}{2} F\delta = \frac{F^2 L}{2EA}, \tag{14.39}$$

a qual, com as devidas simplificações, reduz-se à conhecida expressão $\delta = FL/EA$, já obtida no Capítulo 4 através de considerações de equilíbrio.

14.3.2 Exemplo 14.2 - Calcular deslocamentos axiais numa barra

Considerar a barra mostrada na Figura 14.7, sob a ação das forças F_1 e F_2 aplicadas nas seções B e C. Calcular os deslocamentos nessas seções.

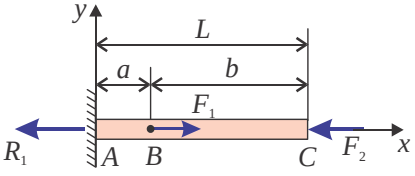


Figura 14.7: Dados do Exemplo 14.2.

Solução:

A reação axial é obtida por equilíbrio: $R_1 = F_1 - F_2$. O esforço normal em qualquer seção do trecho AB é $N_{AB} = F_1 - F_2$ e no trecho BC é $N_{BC} = -F_2$. A **energia de deformação elástica** da barra é dada por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{L} \frac{N_x^2}{EA}\, dx = \frac{1}{2EA}\left[\int_{x=0}^{a} (N_{AB})^2 \; dx + \int_{x=a}^{L} (N_{BC})^2 \; dx\right], \\ \Longrightarrow \quad U &= \frac{1}{2EA}\left[F_1 \;\; (F_1 - 2F_2) \;\; a + F_2^2 \;\; L\right]. \end{aligned} \tag{14.40}$$

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por:

$$W_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_B + \frac{1}{2} F_2 \delta_C, \tag{14.41}$$

onde δ_B e δ_C são os deslocamentos axiais nas seções B e C, respectivamente. Assim, usando o balanço de energia, eq.(14.35), tem-se

$$\frac{1}{2}F_1\delta_B + \frac{1}{2}F_2\delta_C = \frac{1}{2EA}\left[F_1\left(F_1 - 2F_2\right)a + F_2^2\ L\right]. \tag{14.42}$$

Como existem duas incógnitas, δ_B e δ_C, e apenas uma equação, a solução deste problema é impossível com este método.

- **Observação 1**: No processo de solução é necessário arbitrar um sentido positivo para os deslocamentos nos pontos que se encontram sob ação das forças. Uma vez que o método é baseado em energia e trabalho, as forças e deslocamentos envolvidos são considerados apenas em módulo. No cálculo do trabalho, por exemplo na parcela devida a F_1, é necessário aplicar F_1 sobre o deslocamento do ponto, δ_A. Entretanto, no início dos cálculos, o valor e o sentido de δ_A são desconhecidos. O procedimento a ser usado consiste em arbitrar um sentido positivo para o deslocamento. Ao final dos cálculos, com a identificação do seu valor numérico, o seu sinal indicará o sentido do deslocamento em relação ao que foi inicialmente convencionado como positivo. No presente exemplo, foi convencionado que δ_A seria positivo se no sentido de F_1, e δ_B positivo se no sentido de F_2, i.e., a seção C se moveria para a esquerda. Pode acontecer que, ao final dos cálculos, se obtenha um valor $\delta_B < 0$, signficando que o ponto C se deslocaria, de fato, para a direita.

- **Observação 2:** Pode-se afirmar que o método da energia, em sua forma simples, tem aplicação bastante restrita no calculo dos deslocamentos em estruturas. Isso ocorre porque, num problema arbitrário, pode haver uma infinidade de pontos em que sejam necessário a determinação do deslocamento, enquanto existe apenas uma equação de balanço de energia. Como conseqência, o uso direto do balanço de energia não se constitui num procedimento útil como forma de solução de problemas de mecânica dos sólidos. De fato, o uso dos conceitos de trabalho e energia, em problemas de mecânica dos sólidos requer o uso de formulações especias, baseados em teoremas adequados que permitam o cálculo em situações reais. Os **teoremas de Castigliano**, vistos na seção 14.4, se constituem em alguns desses métodos.

14.3.3 Exemplo 14.3 - Deslocamento máximo em viga em balanço

Apesar de suas grandes limitações, o método do balanço de energia utilizado nos exemplos anteriores pode ser utilizado com sucesso na solução do presente problema, que consiste na determinação da deflexão máxima na viga em balanço, de seção retangular, mostrada na Figura 14.8a. Esse problema pode ser facilmente resolvido usando o método da integração da equação diferencial da curva elástica, vista no Capítulo 12. Entretanto, aquele método, na forma como foi vista, permite apenas considerar o efeito do esforço de momento fletor. Agora, desejamos obter uma solução que incorpore tanto o momento fletor quanto o esforço cortante. A solução desse problema permitirá chegar a algumas conclusões interessantes e abrangentes para os problemas de flexão de vigas e placas em geral.

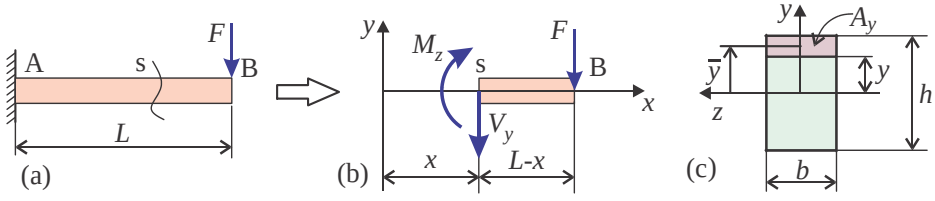


Figura 14.8: (a) Viga em balanço sob carga concentrada; (b) esforços numa seção arbitrária; (c) área auxiliar para o cálculo do momento estático Q_z.

Solução:

Tomando o diagrama de corpo livre visto na Figura 14.8b, obtém-se os esforços cortante e de momento fletor numa seção arbitrária: $V_y = -F$ e $M_z(x) = -F\,(L-x)$. A energia de deformação da viga contém uma parcela devida a flexão, U_f, e outra ao cortante, U_V, dadas pelas equações (14.26) e (14.34), dadas, respectivamente, por

$$U_V = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2G}\frac{V_y^2}{I_{zz}^2}\left[\int_A \left(\frac{Q_z}{t_y}\right)^2 dA\right] dx \qquad \text{e} \qquad U_f = \int_{x=0}^{L} \frac{1}{2E}\frac{M_z^2}{I_{zz}}\, dx. \tag{14.43}$$

Os parâmetros geométricos são obtidos com a ajuda da Figura 14.8c:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= bh^3/12, \qquad\qquad t_y = b, \\ Q_z &= A_y\bar{y} = \underbrace{b\left(\frac{h}{2}-y\right)}_{A_y}\left[\frac{(h/2-y)}{2}+y\right] = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]. \end{aligned} \tag{14.44}$$

A energia de deformação total da viga é a soma das parcelas de energia de flexão e de cisalhamento devido ao esforço cortante. Somando as duas parcelas de energia em (14.43) tem-se $U = U_V + U_f$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E}\int_{x=0}^{L}\frac{M_z^2}{I_{zz}}dx + \frac{1}{2G}\int_{x=0}^{L}\frac{V_y^2}{I_{zz}^2}\left[\int_A\left(\frac{b}{2b}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right)^2 dA\right] dx, \\ \text{ou} \quad U &= \frac{1}{2E}\int_{x=0}^{L}\frac{(-F\,(L-x))^2}{I_{zz}}dx + \frac{1}{8G}\int_{x=0}^{L}\frac{F^2}{I_{zz}^2}\int_A\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]^2 dA\, dx. \end{aligned} \tag{14.45}$$

A integral interna do último termo do lado direito da equação acima é resolvida fazendo $dA = b dy$, e resulta em:

$$\int_A\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]^2 b\, dy = \left(\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^2}{6} + \frac{y^5}{5}\right)\int_{-h/2}^{h/2} b = \frac{b\,h^5}{30}. \tag{14.46}$$

Simplificando, obtém-se a expressão da **energia de deformação** elástica na viga:

$$\boxed{U = \frac{F^2L^3}{6EI_{zz}}\left[1 + \frac{3E\,h^2}{10G\,L^2}\right]} \tag{14.47}$$

O **trabalho** realizado pelas forças externas é dado por:

$$W_e = \frac{1}{2}\,F\delta, \tag{14.48}$$

Finalmente, utilizamos a **lei de conservação de energia**, eq.(14.35):

$$\frac{1}{2}F\delta = \frac{FL^3}{6EI_{zz}}\left[1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right] \implies \boxed{\delta = \frac{FL^3}{3EI_{zz}}\left[\underbrace{1}_{\text{Flexão}} + \underbrace{\frac{3}{10}\left(\frac{E}{G}\right)\left(\frac{h}{L}\right)^2}_{\text{Cisalhamento}}\right]} \tag{14.49}$$

O primeiro termo entre colchetes representa a parcela de deflexão causada pelo momento fletor, i.e., a mesma expressão já obtida pelo método da integração direta (seção 12.2, página 432), a partir da teoria de flexão de Euler-Bernoulli. O segundo termo representa uma correção a esse valor, devido à presença do esforço cortante. Como forma de simplificar a notação, consideremos o termo cisalhante

na equação (14.49) representado por K:

$$K = \frac{3}{10}\left(\frac{E}{G}\right)\left(\frac{h}{L}\right)^2. \tag{14.50}$$

Para uma análise rápida de ordens de grandeza entre as parcelas de flexão de de cisalhamento, consideremos um material típico, com um valor típico de coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Como, por definição, $G = E/2(1+\nu)$, tem-se que para esse caso, $E/G \cong 2,5$. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} & & & K = \frac{3}{10}2,5\left(\frac{h}{L}\right)^2 = 0,75\left(\frac{h}{L}\right)^2, \\ \text{Por exemplo,} \quad & \text{se } \frac{h}{L} \cong 0,10 & \longrightarrow \quad & K = 0,0075, \\ & \text{se } \frac{h}{L} \cong 0,05 & \longrightarrow \quad & K = 0,001875, \\ & \text{se } \frac{h}{L} \cong 0,01 & \longrightarrow \quad & K = 7,5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \tag{14.51}$$

Com isto observa-se que se que para **vigas longas**, i.e., com $h/L \leq 0,1$ (ou $L/h \geq 10$), **o efeito do cisalhamento na deflexão total da viga é insignificante** do ponto de vista dos cálculos do dia a dia em engenharia, o que explica por que o efeito do esforço cortante é desprezado no cálculo das deflexões de vigas longas. Isso explica que a maioria dos cálculos manuais feitos para vigas, é utilizada apenas a parcela de esforços de momento fletor.

14.4 Teoremas de Castigliano

Como ilustrado no Exemplo 2, as expressões de energia e de trabalho, junto à equação de balanço de energia, por si so, não possuem qualquer capacidade de resolver problemas de mecânica dos sólidos, inclusive aqueles bastante banais. O uso efetivo dessas grandezas só pode ser feito através de teoremas específicos que tem sido desenvolvido ao longo dos últimos dois séculos. A presente seção apresenta dois desses teoremas, propostos por Castigliano. Esses teoremas são apresentados sem prova, uma vez que uma demonstração consistente requer conceitos acima daqueles vistos pelos estudantes em cursos de graduação.[1] Leitores interessados podem ver as deduções consistentes em textos como o de Dym e Shames [1].

Considera-se um corpo qualquer, apoiado de maneira a evitar qualquer deslocamento de corpo rígido, que é carregado por um conjunto de forças F_1, F_2, ..., F_k, ..., F_n de maneira quase-estática, Na Figura 14.9 estão mostradas as cargas aplicadas e os respectivos deslocamentos. Consideram-se apenas as **componentes de deslocamento do ponto solicitado, na direção da força**, i.e., $u_1,\ u_2, \cdots, u_k, \cdots, u_n$.

Dependendo do tipo de problema, a energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças externas podem ser colocados em função tanto das forças quanto dos deslocamentos, i.e., pode-se ter

$$\begin{aligned} W &= W(u_1, u_2, \cdots, u_k, \cdots, u_n) \quad \text{ou} \quad W = W(F_1, F_2, ..., F_k, ..., F_n), \text{ e} \\ U &= U(u_1, u_2, \cdots, u_k, \cdots, u_n) \quad \text{ou} \quad U = U(F_1, F_2, ..., F_k, ..., F_n). \end{aligned} \tag{14.52}$$

Cada deslocamento u_k corresponde a uma força concentrada F_k. Observando a Figura 14.9, o ponto de aplicação de F_k pode se deslocar em uma direção desconhecida a priori, inclusive contra o sentido

[1] A maioria dos textos didáticos de Mecânica dos Sólidos para graduação inclui uma dedução para cada um desses teoremas. É opinião dos autores que, no afã de restringir o uso de conceitos avançados, essas deduções se tornam excessivamente truncadas, e resultam incompreensiveis para a maioria dos estudantes.

de F_k. Como se considera o trabalho, o termo u_k a ser considerado não é o deslocamento sofrido pelo ponto de aplicação da força, mas apenas **a componente desse deslocamento na direção colinear à força** como mostrado na figura.

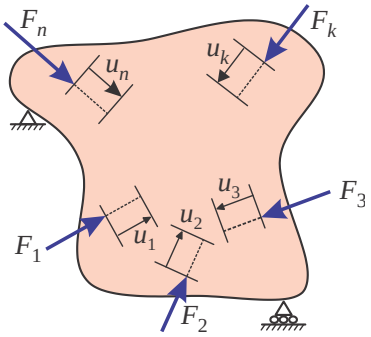


Figura 14.9: Forças aplicadas a um corpo e os deslocamentos associados.

Primeiro Teorema de Castigliano

O enunciado do primeiro teorema pode ser posto da seguinte forma: **A força aplicada num ponto de um sistema elástico linear é dada pela derivada parcial da energia de deformação em relação à componente de deslocamento sofrido pelo ponto, (sendo força e deslocamentos colineares e na mesma linha de ação), i.e.**

$$\boxed{F_k = \frac{\partial U}{\partial u_k}} \tag{14.53}$$

A força F_k obtida **é positiva na direção positiva do deslocamento** u_k. Também, F_k tem a mesma natureza de u_k, no sentido que a expressão acima é válida tanto para o par **deslocamento-força**, quanto para o par **ângulo de rotação da seção-momento**, i.e., (14.53) pode ser reescrito para o momento aplicado M_k associado ao ângulo θ_k:

$$\boxed{M_k = \frac{\partial U}{\partial \theta_k}} \tag{14.54}$$

Segundo Teorema de Castiglinano

O enunciado do segundo teorema pode ser posto da seguinte forma: **A derivada parcial da energia de deformação de um sistema elástico linear em relação a qualquer força (ou momento) que age sobre o sistema dá o deslocamento (ou ângulo) daquela força (momento) na direção de sua linha de ação**:

$$\boxed{u_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \qquad \text{e} \qquad \theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k}} \tag{14.55}$$

O deslocamento u_k obtido **é positivo na direção positiva da força** externa F_k. Também, u_k tem a mesma natureza de F_k, no sentido que a expressão acima é válida tanto para o par **deslocamento-força**, quanto para o par **ângulo de rotação da seção-momento**, i.e., (14.55) pode ser reescrito para o ângulo θ_k associado a um momento aplicado M_k.

Em cálculos manuais, como aqueles explorados na presente seção, é comum o uso do segundo teorema. Ja o primeiro teorema fornece uma das varias bases de geração do método de elementos finitos para sistemas estruturais.

14.4.1 Exemplo 4 - Deflexão em uma barra com duas forças

Resolver o Exemplo 14.2 para a viga ilustrada na Figura 14.10, usando o segundo Teorema de Castigliano.

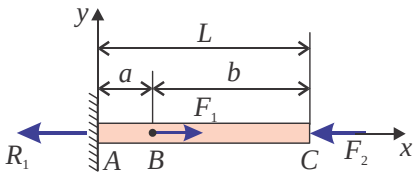


Figura 14.10: Dados do Exemplo 14.4.

Solução:

Embora o método do balanço de energia não fosse adequado para a solução do problema, agora ele terá uma solução bastante rápida pelo uso do segundo Teorema de Castigliano. Da solução do Exemplo 14.2, eq.(14.40), temos a energia de deformação em termos das cargas aplicadas:

$$U = \frac{1}{2EA}\left[F_1 \;\; (F_1 - 2F_2) \;\; a + F_2^2 \;\; L\right].$$

Aplicando o Teorema de Castigliano, eq.(14.55), tem-se os deslocamentos nas duas seções dados por:

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{a}{EA}\left[F_1 - F_2\right], \\ \delta_C &= \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{2a}{EA}\left[-aF_1 + LF_2\right]. \end{aligned}$$

Observe que um valor positivo para δ_C indica que a seção C desloca-se para a esquerda, na direção da força F_2, enquanto um valor positivo para δ_B indica que a seção B desloca-se para a direita, na direção da força F_1.

14.4.2 Exemplo 5 - Deflexão onde não ha força aplicada

Calcular a deflexão e a rotação na extremidade da viga mostrada na Figura 14.11a utilizando o segundo Teorema de Castigliano. Considerar que a viga seja longa, de forma que o efeito do esforço cortante possa ser desprezado.

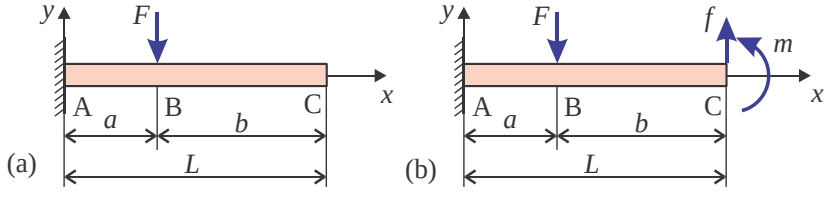


Figura 14.11: (a) Dados do Exemplo 14.5; (b) forças fictícias f e m na seção C.

Solução:

Considerando a viga longa, só é necessário calcular a energia de deformação associada ao momento fletor. Mas pode ser observado que na seção C não há nenhuma força ou momento concentrados aplicados. Aparentemente isso inviabilizaria a aplicação do teorema, uma vez que ele pressupõe que a expressão da energia de deformação seja função de uma força aplicada naquele ponto em que se deseja obter o deslocamento. Entretanto, o teorema não faz nenhuma referência aos valores das

forças aplicadas. **A expressão da energia deve ser conhecida em forma literal, em termos das forças**. Apenas após a diferenciação é que os valores serão substituidos. Isso permite que se use um artifício para obter deslocamentos em pontos da estrutura que não possuem carga aplicada. Esse artifício consiste em **aplicar uma "carga fictícia" no local onde se deseja determinar o deslocamento**. Em seguida calculam-se os esforços e a energia de deformação elástica. Uma vez isto feito, aplica-se o Teorema de Castigliano. Logo após feita a diferenciação, antes mesmo de integrar, pode-se substituir os valores das forças. Nesse ponto, as forças fictícias tomam seus valores adequados, i.e., valores nulos. Este procedimento é ilustrado neste problema, como é mostrado no que se segue.

- **Etapa 1** - Aplicar uma força f e um momento fletor m, concentrados, **fictícios**, como na Figura 14.11b.
- **Etapa 2** - Cálculo dos esforços. Para seções arbitrárias no trecho AB e no trecho BC, os esforços são ilustrados nas Figuras 14.12. Nota-se que as forças fictícias são incluidas, em forma literal. Fazendo o equilíbrio, obtém-se os esforços em cada trecho:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= f - F, & V_{BC} &= f, \\ M_{AB} &= f\,(L-x) + m - F\,(a-x)\,, & M_{BC} &= m + f\,(L-x)\,. \end{aligned} \tag{14.56}$$

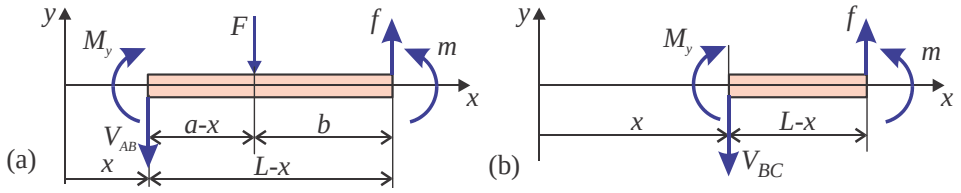


Figura 14.12: Diagramas de corpo livre para os esforços (a) no trecho AB e (b) no trecho BC.

- **Etapa 3 -** A energia de deformação elástica para flexão é:

$$U = \frac{1}{2EI_{zz}}\int_{x=0}^{L} M_z^2\ dx = \frac{1}{2EI_{zz}}\left[\int_{x=0}^{a} (M_{AB})^2\ dx + \int_{x=a}^{L} (M_{BC})^2\ dx\right]. \tag{14.57}$$

Das expressões dos esforços, (14.56) e (14.88), obtem-se

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial M_{AB}}{\partial f} = (L-x)\,, \\ \dfrac{\partial M_{AB}}{\partial m} = 1, \\ \dfrac{\partial M_{AB}}{\partial F} = -\,(a-x)\,, \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial M_{BC}}{\partial f} = (L-x)\,, \\ \dfrac{\partial M_{BC}}{\partial m} = 1, \\ \dfrac{\partial M_{BC}}{\partial F} = 0. \end{array}\right. \tag{14.58}$$

O deslocamento vertical na extremidade da viga é dado pelo segundo teorema, eq. $(14.55)_1$. Diferenciando a expressão da energia de deformação da viga, eq. (14.57), tem-se

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial f} = \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_0^a M_{AB}\,\frac{\partial M_{AB}}{\partial f}\ dx + \int_a^L M_{BC}\,\frac{\partial M_{BC}}{\partial f}\ dx\right]. \tag{14.59}$$

Assim,

$$v_C = \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_0^a \left[f\,(L-x) + m - F\,(a-x)\right](L-x)\ dx + \int_a^L \left[m + f\,(L-x)\right]\ (L-x)\ dx\right]\Bigg|_{f=m=0}. \tag{14.60}$$

Igualando as cargas fictícias a zero, integrando e simplificando, obtém-se o deslocamento na extremidade:

$$v_C = \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_0^a \left[-F\left(a-x\right)\right]\left(L-x\right)\ dx + \int_a^L \left[0\right]\ \ \left(L-x\right)\ dx\right] \quad \Longrightarrow \boxed{v_C = -\frac{FLa^2}{2EI_{zz}} + \frac{Fa^3}{6EI_{zz}}} \tag{14.61}$$

- **Etapa 4 -** A rotação na extremidade da viga é obtida também pelo segundo teorema, eq. $(14.55)_2$:

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial m}. \tag{14.62}$$

Diferenciando a expressão da energia de deformação da viga, eq. (14.57),

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_0^a \int_0^a M_{AB}\ \frac{\partial M_{AB}}{\partial m}\ dx + \int_a^L M_{BC}\ \frac{\partial M_{BC}}{\partial m}\ dx\right], \\ \theta_C &= \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_0^a \left[f\left(L-x\right)+m-F\left(a-x\right)\right]1\ dx + \int_a^L \left[m+f\left(L-x\right)\right]1\ dx\right]\Bigg|_{f=m=0}. \end{aligned} \tag{14.63}$$

Igualando as forças fictícias a zero, integrando e simplificando obtém-se a rotação na extremidade C:

$$\theta_C = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^a -F\ \ \left(a-x\right)\ dx \qquad \Longrightarrow \boxed{\theta_C = -\frac{Fa^2}{2EI_{zz}}} \tag{14.64}$$

- **Etapa 5 -** Cálculo de deflexão no ponto de aplicação da força F

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_{x=0}^a M_{AB}\ \frac{\partial M_{AB}}{\partial F}\ dx + \int_a^L M_{BC}\ \frac{\partial M_{BC}}{\partial F}\ dx\right], \\ v_B &= \frac{1}{EI_{zz}}\left[\int_{x=0}^a \left[f\left(L-x\right)+m-F\left(a-x\right)\right]\ \ \left[-\left(a-x\right)\right]\ dx + \int_a^L \left[m+f\left(L-x\right)\right]\ 0\ dx\right]\Bigg|_{f=m=0}. \end{aligned} \tag{14.65}$$

Igualando as forças fictícias a zero, integrando e simplificando obtém-se a rotação na seção B:

$$v_B = \frac{1}{EI_{zz}}\int_{x=0}^a F\left(a-x\right)^2\ dx \qquad \Longrightarrow \boxed{v_B = \frac{Fa^3}{3EI_{zz}}} \tag{14.66}$$

14.4.3 Exemplo 14.6 - Treliça simples de duas barras

A treliça mostrada na Figura 14.13a tem duas barras e está submetida a uma força horizontal no nó A, de valor $F = 30$ kN. Calcular o deslocamento vertical da rótula A. Os dados são: $b = 1,5$ m, $L = 8$ m, $E = 210.000$ MPa e a área da seção transversal das barras é $A = 2.500$ mm^2.
Solução:

Uma vez que não há força vertical no nó A, aplica-se uma **força fictícia** f ali, para baixo. Os **esforços** nas barras são obtidos com a ajuda do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 14.13b. Eles são dados por:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \Longrightarrow N_{AB}\ \text{sen}\ \theta - F = 0, \\ \sum F_y &= 0 \quad \Longrightarrow f + N_{AC} + N_{AB}\cos\theta = 0, \end{aligned}$$

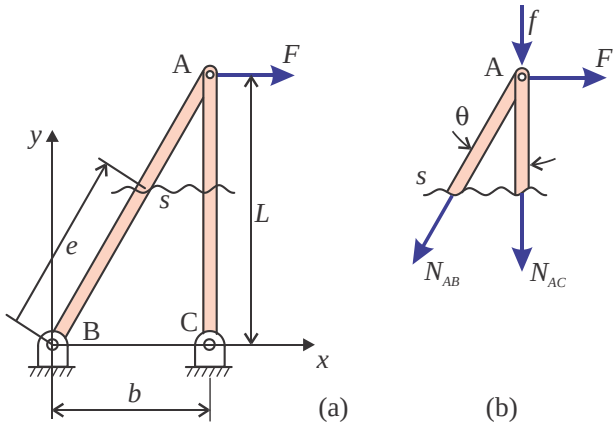


Figura 14.13: Dados do Exemplo 14.6 e indicação dos esforços.

cuja solução é:

$$N_{AB} = \frac{Fl}{b} \quad \text{e} \quad N_{AC} = -f - \frac{FL}{b}.$$

onde se definiu $l = \sqrt{b^2 + L^2} = 8{,}139$ m como o comprimento da barra AB. A **energia de deformação** da estrutura é a soma das energias de cada barra: $U = U_{AB} + U_{AC}$, i.e.:

$$U = \frac{1}{2EA}\left\{\int_{e=0}^{l} N_{AB}^2 ds + \int_{y=0}^{L} N_{AC}^2 dy\right\}.$$

A integração na barra AB é ao longo da extensão da barra, e foi feita utilizando a coordenada e, conforme a Figura 14.13a. O deslocamento vertical do ponto A é dado pelo 2° Teorema de Castigliano como:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{1}{EA}\left\{\int_{s=0}^{l} N_{AB}\frac{\partial N_{AB}}{\partial f} ds + \int_{y=0}^{L} N_{AC}\frac{\partial N_{AC}}{\partial f} dy\right\}, \\ &= \frac{1}{EA}\left\{\int_{s=0}^{l} \frac{Fl}{b} 0 \; ds + \int_{y=0}^{L} \left(-f - \frac{FL}{b}\right)(-1) \; dy\right\}_{f=0} = \frac{FL^2}{EAb}, \\ &= \frac{30.000 \times 8.000^2}{210.000 \times 2.500 \times 1.500} = 2,438 \text{ mm}. \end{aligned}$$

De forma similar, o deslocamento horizontal do ponto A é dado pelo 2° Teorema de Castigliano por:

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{EA}\left\{\int_{e=0}^{l} N_{AB}\frac{\partial N_{AB}}{\partial F} ds + \int_{y=0}^{L} N_{AC}\frac{\partial N_{AC}}{\partial F} dy\right\}, \\ &= \frac{1}{EA}\left\{\int_{e=0}^{l} \frac{Fl}{b}\left(\frac{l}{b}\right) \; ds + \int_{y=0}^{L} \left(-f - \frac{FL}{b}\right)\left(-\frac{L}{b}\right) \; dy\right\}_{f=0} = \frac{F(l^3 + L^3)}{EAb^2}, \\ &= \frac{30.000 \times (8.139^3 + 8.000^3)}{210.000 \times 2.500 \times 1.500^2} = 26,698 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Deve-se observar que a estrutura possui elementos muito longos e delgados, portanto muito propensos à falha por flambagem. Torna-se necessária uma verificação quanto a esse modo de falha, usando as formulações do Capítulo 13.

14.4.4 Exemplo 14.7 - Problema hiperestático pelo 2º Teorema de Castigliano

Determinar as reações vinculares da viga mostrada na Figura 14.14a usando o segundo Teorema de Castigliano. Em seguida, obter o deslocamento no centro da viga.

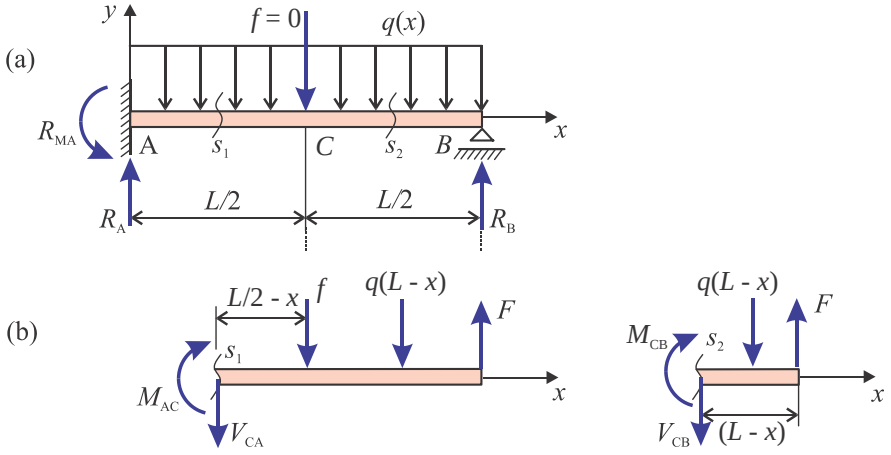


Figura 14.14: Dados do Exemplo 14.7. Diagramas de corpo livre para os esforços em (a) e (b).

Solução:

Uma vez que se deseja o deslocamento no centro da viga, aplica-se ali uma força concentrada $f = 0$. O problema apresenta três reações não triviais, R_A e R_{MA} na seção A, e R_B no apoio B. Do equílibrio no plano tem-se apenas duas equações de equilíbrio não triviais:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \Longrightarrow R_A + R_B - qL - f = 0 \\ \sum M_z^A &= 0 \quad \Longrightarrow R_B L - \frac{qL^2}{2} + R_{MA} - \frac{fL}{2} = 0 \end{aligned} \tag{14.67}$$

Uma **equação adicional** pode ser obtida com o uso do segundo Teorema de Castigliano, como segue. Para isso, **escolhe-se um dos três apoios do problema.** (Lembrar que cada reação é associada a um apoio simples, que restrige apenas um dos seis movimentos da seção) Por exemplo, remove-se o apoio em B e aplica-se uma força F na mesma direção que o apoio ali. Em seguida, obtém-se as reações nos demais apoios, que no caso é apenas o apoio A, em termos de F:

$$R_A = qL - F + f \quad \text{e} \quad R_{MA} = \frac{qL^2}{2} - FL + \frac{fL}{2}. \tag{14.68}$$

Nesse ponto temos todas as reações, embora em termos de F, que ainda é incógnito. Entretanto, é possível obter os esforços em termos de F, como no diagrama de corpo livre mostrado na Figura 14.14b. Isso resulta nos esforços de flexão em cada trecho como:

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 - f\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad \forall x \in (0, L/2) \quad \text{e} \\ M_{CB}(x) &= F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 \qquad \forall x \in (L/2, L). \end{aligned} \tag{14.69}$$

- **Observação**: O processo realizado acima, de substituir uma das reações por uma força F e representar as demais reações em termos de F, pode ser entendido como apenas um artifício. Outra maneira de entender o procedimento consiste em ver que sempre é possível separar o conjunto de reações em dois grupos, e exprimir as reações em um dos grupos em termos das reações do outro grupo. O artifício usado aqui, de substituir R_B por F, é usado para que, durante a primeira parte da dedução, possamos usar a formulação com um F de valor arbitrário, i.e., no que segue, F pode assumir qualquer valor. Apenas ao final do processo é

que se identificará o particular valor de F que satisfaz o equilíbrio global, tal que esse será o valor da reação R_B.

A energia de deformação de flexão na viga (ignorando a energia devido ao esforço cortante) é dada por

$$U = \frac{1}{2EI_{zz}}\int_0^L M_z^2 \, dx.$$

O deslocamento transversal na seção B da viga pode ser obtido pelo segundo Teorema de Castigliano:

$$v_B = \left.\frac{\partial U}{\partial F}\right| = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^{L/2} M_{AC}\frac{\partial M_{AC}}{\partial F}\, dx + \frac{1}{EI_{zz}}\int_{L/2}^{L} M_{BC}\frac{\partial M_{CB}}{\partial F}\, dx.$$

Substituindo o esforço de momento de (14.69) tem-se

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^{L/2}\left[F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 - f\left(\frac{L}{2}-x\right)\right](L-x)\, dx + \\ &\quad \frac{1}{EI_{zz}}\int_{L/2}^{L}\left[F(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2\right](L-x)\, dx. \end{aligned} \tag{14.70}$$

Integrando e simplificando o resultado se obtém

$$v_B = \frac{1}{EI_{zz}}\left[\frac{FL^3}{3} - \frac{qL^4}{8} - \frac{5fL^3}{48}\right].$$

Entretanto, a seção B encontra-se apoiada, de forma que deve-se impor $v_B = 0$. Para isso F deve tomar o valor da reação R_B:

$$\boxed{R_B = F = \frac{3qL}{8} + \frac{15fL^3}{48}} \tag{14.71}$$

Conhecida essa reação, as duas equações globais de equilíbrio, eqs. (14.67), são capazes de fornecer as reações faltantes:

$$R_A = \frac{5qL}{8} + \frac{33f}{48} \qquad \text{e} \qquad R_{MA} = \frac{qL^2}{8} + \frac{3fL}{16}. \tag{14.72}$$

A **deflexão no centro** é obtida em seguida, aplicando novamente o Teorema de Castiglano na forma

$$v_C = \left.\frac{\partial U}{\partial f}\right|_{f=0} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^{L/2} M_{AB}\frac{\partial M_{AC}}{\partial f}\, dx + \left.\frac{1}{EI_{zz}}\int_{L/2}^{L} M_{CB}\frac{\partial M_{BC}}{\partial f}\, dx\right|_{f=0}. \tag{14.73}$$

Note que os esforços precisam ser determinados incluindo o efeito de todos os carregamentos, inclusive a força fictícia f. Então as expressões das reações dos esforços precisam conter f para uso no Teorema de Castigliano. Então, levando o valor de F de (14.71) a (14.69) tem-se os esforços em termos de f:

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= \left[\frac{3qL}{8} + \frac{15f}{48}\right](L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2 - f\left(\frac{L}{2}-x\right) \quad \text{e} \\ M_{CB}(x) &= \left[\frac{3qL}{8} + \frac{15f}{48}\right](L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2. \end{aligned} \tag{14.74}$$

Derivando em relação a f e em seguida fazendo $f = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= \frac{3qL}{8}(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2\,, \qquad \frac{\partial M_{AC}}{\partial f} = \frac{15}{48}(L-x) - \left(\tfrac{L}{2}-x\right), \\ M_{CB}(x) &= \frac{3qL}{8}(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2\,, \qquad \frac{\partial M_{CB}}{\partial f} = -\frac{15}{48}\left(\frac{L}{2}-x\right). \end{aligned} \tag{14.75}$$

Então o deslocamento vem de (14.73) que se torna

$$\begin{aligned} EI_{zz}v_C \;=\; & \int_0^{L/2}\left[\frac{3qL}{8}(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2\right]\left[\frac{15}{48}(L-x) - \left(\frac{L}{2}-x\right)\right]\,dx + \\ & \int_{L/2}^{L}\left[\frac{3qL}{8}(L-x) - \frac{q}{2}(L-x)^2\right]\left[\frac{15}{48}(L-x)\right]\,dx. \end{aligned} \tag{14.76}$$

Integrando e simplificando o resultado obtém-se

$$v_C = \frac{qL^4}{192EI_{zz}}. \tag{14.77}$$

Nota-se que a solução desse problema - as reações, esforços, e a curva elástica - já haviam sido obtidos pelo método de sobreposição e de integração (ver, por exemplo, eq.(12.85), página 452).

14.4.5 Exemplo 14.8 - Estrutura plana - flexão e torção

A viga ABC mostrada na Figura 14.15 está submetida a um momento torçor T aplicado na extremidade C. A viga tem seção uniforme, circular, com valores I e J e propriedades de material E e G. Determine, usando o segundo Teorema de Castigliano, a rotação torcional φ_{cz} da seção C, na direção z.

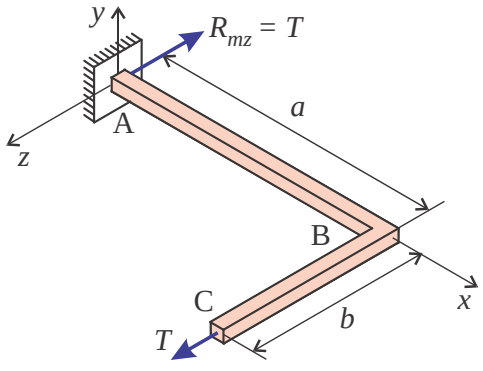


Figura 14.15: Dados e reações no Exemplo 14.8.

Solução:

O problema é isostático, de forma que se pode obter no início a **reação de torção** no apoio A, como $R_{mz} = T$. Os **esforços** em cada elemento são:

- Barra AB, esforço de momento **fletor** $M_z = T$, e
- Barra BC, esforço de momento **torçor** $M_t = T$.

A energia de deformação total é a soma das energias nas duas barras, $U = U_{AB} + U_{BC}$. Tomando as expressões para a energia de deformação de flexão e de torção, eqs.(14.27) e (14.30), e particularizando para o caso em que os integrandos sejam uniformes, tem-se

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{1}{2E}\int_{\substack{x=0\\AB}}^{a} \frac{M_z^2}{I_{zz}}\, dx + \frac{1}{2G}\int_{\substack{z=0\\BC}}^{b} \frac{M_x^2\,(x)}{J}\, dz,$$

$$U = \frac{M_z^2 a}{2EI_{zz}} + \frac{M_t^2 b}{2GJ} \qquad \Longrightarrow \boxed{U = \frac{T^2}{2}\left(\frac{a}{EI_{zz}} + \frac{b}{GJ}\right)}$$

Aplicando o segundo Teorema de Castigliano, obtém-se a rotação torcional em C:

$$\varphi_c = \frac{\partial U}{\partial T} \qquad \Longrightarrow \boxed{\varphi_c = T\left(\frac{a}{EI_{zz}} + \frac{b}{GJ}\right)}$$

Nota-se que o primeiro termo, a/EI_{zz}, é a parcela de φ_c proveniente da flexão do elemento AB, enquanto que a segunda parcela vem da torção de BC

14.4.6 Exemplo 14.9 - Estrutura plana - flexão e torção

A estrutura plana ABC da Figura 14.16 tem seção uniforme com EI constante. A força F é aplicada na seção C, na direção vertical y. Determine o deslocamento vertical ν_C usando o segundo Teorema de Castigliano. A seção transversal é circular.

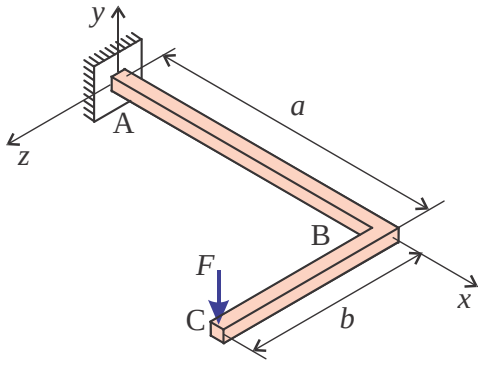


Figura 14.16: Dados do Exemplo 14.9.

Solução:

(a) As reações são indicadas na Figura 14.17a. Como é um problema em que o carregamento é transversal ao plano da estrutura, é mais seguro indicar todas as seis componentes de reação no apoio, e resolver as seis condições de equilíbrio. Com isso obtém-se

$$\begin{cases} \Sigma F_x \longrightarrow R_x = 0, \\ \Sigma F_y \longrightarrow R_y = F, \\ \Sigma Fz \longrightarrow R_z = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \Sigma M_x \longrightarrow \boxed{R_{Mx} = -Fb}, \\ \Sigma M_y \longrightarrow R_{My} = 0, \\ \Sigma M_z \longrightarrow \boxed{R_{Mz} = Fa} \end{cases}$$

As reações não nulas são indicadas na Figura 14.17b.

(b) Esforços são obtidos com auxílio dos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 14.18, a partir dos cortes s_1 e s_2 nos trechos AB e BC, como indicado na Figura 14.17a. Os valores dos esforços de momento fletor e torçor no trecho AB são $M_{fAB} = F(x-a)$ e $M_{tAB} = Fb$ e o momento fletor no trecho BC é $M_{fBC} = F(b-z)$.

(c) A Energia de deformação é a soma das energias de flexão e de torção da viga AB, com a energia de flexão da viga BC:

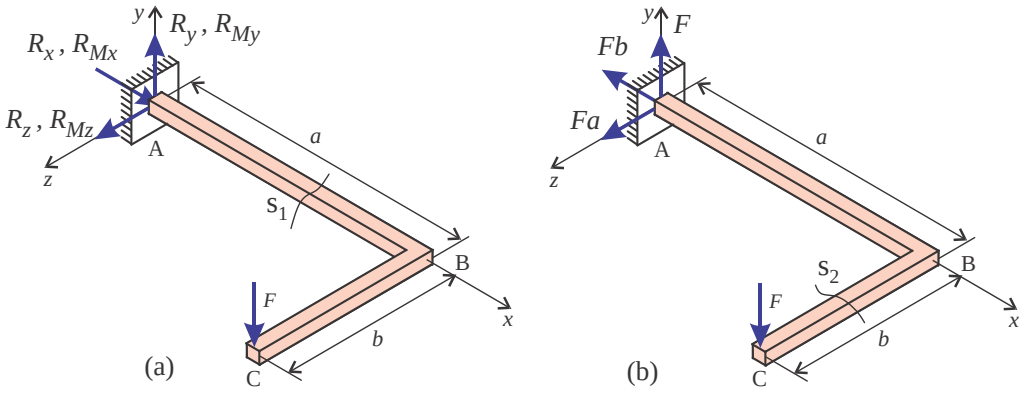


Figura 14.17: (a) Reações e esforços no Exemplo 14.9, e (b) reações não nulas.

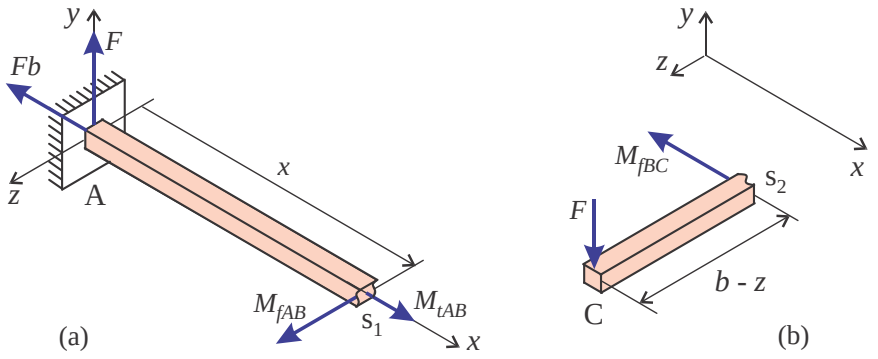


Figura 14.18: (a) Diagramas de corpo livre para esforços no trecho AB e (b) no trecho BC.

$$\begin{aligned} U &= U_{fAB} + U_{tAB} + U_{fBC}, \\ &= \frac{1}{2EI}\int_{AB} M_{fAB}^2 dx + \frac{M_{tAB}^2 a}{2GJ} + \frac{1}{2EI}\int_{BC} M_{fBC}^2 dz. \end{aligned}$$

Usando o segundo Teorema de Castigliano para o deslocamento na seção C, na direção da força, tem-se

$$\nu_c = \frac{dU}{dF} = \frac{1}{EI}\int_{x=0}^{a} M_{fAB}\,\frac{dM_{fAB}}{dF}dx + \frac{2M_{tAB}a}{2GJ}\frac{dM_{tAB}}{dF} + \frac{1}{EI}\int_{z=0}^{b} M_{fBC}\frac{dM_{fBC}}{dF}dz,$$
$$\nu_c = \frac{1}{EI}\int_{x=0}^{a} F(x-a)^2 dx + \frac{Fab^2}{GJ} + \frac{1}{EI}\int_{z=0}^{b} F(b-z)^2 dz.$$

Integrando e simplificando, obtém-se a expressão do deslocamento na seção C:

$$\boxed{\nu_c = \frac{F}{3EI}\left[a^3 + b^3\right] + \frac{Fab^2}{GJ}}$$

14.4.7 Exemplo 14.10 - Pórtico plano - flexão plana

Considere o pórtico plano ABCD mostrado na Figura 14.19. Determine o deslocamento horizontal na seção D, u_D usando o segundo Teorema de Castigliano. Dados: seção tranversal de dimensões 20×20 mm^2, a força $F = 1$ kN e módulo de elasticidade $E = 210$ GPa. $a = 2$ m, $b = c = 1$ m.

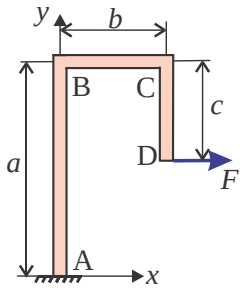


Figura 14.19: Dados do Exemplo 14.10.

Solução:
(a) Esforços. Os esforços são obtidos com o auxílio dos diagramas de corpo livre mostrados, para cortes em seções arbitrárias de cada uma das três vigas. As expressões obtidas são:

$$\begin{array}{ll} \text{Trecho AB} \longrightarrow & M_{AB} = (y + c - a)F, \\ \text{Trecho BC} \longrightarrow & M_{BC} = Fc, \\ \text{Trecho CD} \longrightarrow & M_{CD} = Fr. \end{array}$$

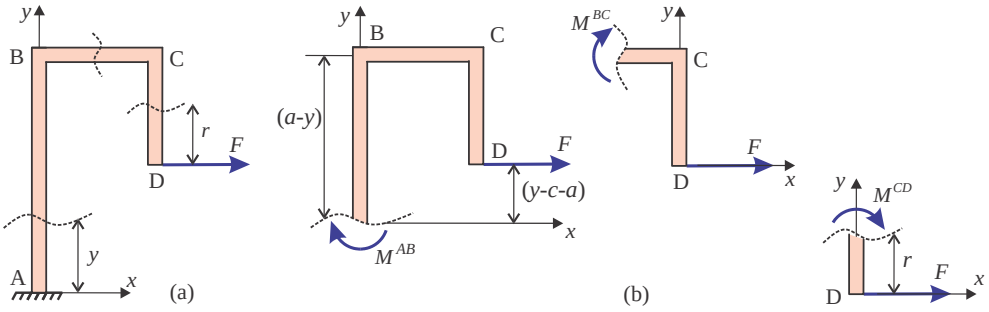


Figura 14.20: Esforços no pórtico do Exemplo 10.

(b) Energia Deformação. É a soma das energias de flexão das três vigas: $U = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$, i.e.,

$$2EIU = \int_{y=0}^{a} M_{AB}^2 dy + \int_{x=0}^{b} M_{BC}^2 dx + \int_{r=0}^{c} M_{CD}^2 dr$$

(c) O deslocamento vem da aplicação do segundo Teorema de Castigliano:

$$\begin{aligned} EIu_D &= \frac{\partial U}{\partial F} = \int_{y=0}^{a} M_{AB}\frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dy + \int_{x=0}^{b} M_{BC}\frac{\partial M_{CB}}{\partial F} dx + \int_{r=0}^{c} M_{CD}\frac{\partial M_{CD}}{\partial F}\, dr, \\ &= \int_{y=0}^{a} F(y + c - a)^2 dy + \int_{x=0}^{b} Fc^2 dx + \int_{r=0}^{c} Fr^2\, dr, \end{aligned}$$

Integrando e simplificando tem-se o deslocamento

$$u_D = \frac{F}{3EI}\left[(a-c)^3 + 3bc^2 + 2c^3\right].$$

Substituindo os dados obtém-se $u_D = 7,14$ mm.

14.4.8 Exemplo 14.11 - Viga curva delgada - Arco sob flexão plana

Considere a viga circular mostrada na Figura 14.21. O arco é circular, com raio R e altura h, tais que h/R é pequeno o suficiente para que se possa utilizar a teoria de vigas retas. A seção transversal é retangular com largura b. Determine os deslocamentos horizontal e vertical da seção A utilizando o segundo Teorema de Castigliano.

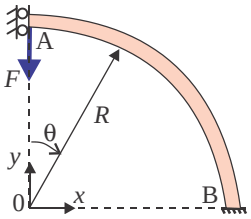


Figura 14.21: Arco sob flexão do Exemplo 11.

Solução:

Indicamos os deslocamentos horizontal e vertical por u_A e v_A, com as orientações positivas indicadas na Figura 14.22a. A orientação positiva de v_A deve ser a mesma da força vertical F. Uma vez que não há força horizontal, define-se uma força ficticia g aplicada no ponto A, com a mesma orientação de u_A.

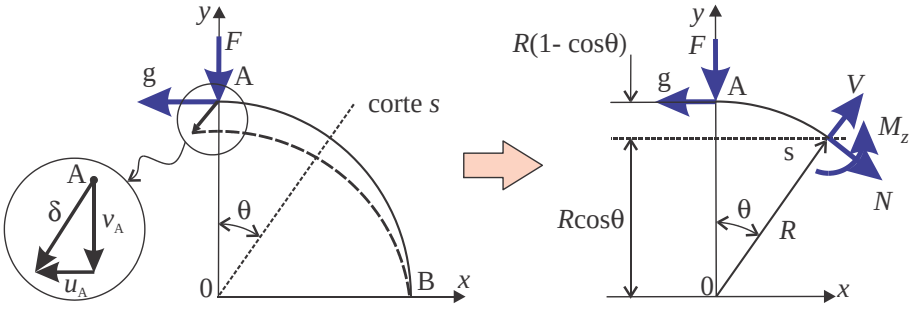


Figura 14.22: (a) Diagrama de corpo livre para o Exemplo 11, (b) equilibrio para um corte arbitrario s. É consideranda apenas a linha do perímetro médio do arco.

Tendo as forças definidas, busca-se a equação de esforços de momento fletor. Para isso, faz-se um corte numa seção arbitrária s, definida pelo ângulo θ como indicado na Figura 14.22b. O **esforço do momento** na seção s é: $M_z(\theta) = -FR \text{ sen } \theta - gR(1 - \cos\theta)$.

A expressão para a energia de deformação deve ser adaptada da eq. (14.26), $U = \int_{x=0}^{L} M_z^2/2EI_{zz}\, dx$. Agora, a integração ao longo da extensão L da viga deve ser interpretada como a integração ao longo do arco. Então, o elemento diferencial de comprimento é $Rd\theta$ em vez de dx, e a integração é feita ao longo do ângulo θ. Então, a expressão da energia de deformação flexural de um arco circular delgado é dada por

$$\boxed{U = \frac{1}{2E}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{M_z^2}{I_{zz}} R\, d\theta} \tag{14.78}$$

Do segundo Teorema de Castigliano, os deslocamentos horizontal e vertical são:

$$
\begin{aligned}
u_A &= \frac{\partial U}{\partial g} = \frac{R}{EI_{zz}}\int_{\theta=0}^{\pi/2} M_z \frac{\partial M_z}{\partial g}\bigg|_{g=0} d\theta, \\
&= \frac{R}{EI_{zz}}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[-FR\,\text{sen}\,\theta - gR(1-\cos\theta)\right]\left[-R(1-\cos\theta)\right]\bigg|_{g=0} d\theta, \\
&= \frac{R^3}{4EI_{zz}}\left[2F + g(3\pi - 8)\right]|_{g=0} \qquad \Longrightarrow \boxed{u_A = \frac{FR^3}{2EI_{zz}}}
\end{aligned} \tag{14.79}
$$

onde $I_{zz} = bh^3/12$, e

$$
\begin{aligned}
v_A &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{R}{EI_{zz}}\int_{\theta=0}^{\pi/2} M_z \frac{\partial M_z}{\partial F}\bigg|_{g=0} d\theta, \\
&= \frac{R}{EI_{zz}}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[-FR\,\text{sen}\,\theta - gR(1-\cos\theta)\right]\left[-R\,\text{sen}\,\theta\right]\bigg|_{g=0} d\theta, \\
&= \frac{R^3}{4EI_{zz}}\left[2g + \pi F\right]|_{g=0} \qquad \Longrightarrow \boxed{v_A = \frac{\pi F R^3}{4EI_{zz}}}
\end{aligned} \tag{14.80}
$$

14.4.9 Exemplo 14.12 - Viga curva delgada hiperestática

Considere o enunciado do Exemplo 11, e determine o deslocamento vertical da seção A para o arco mostrado na Figura 14.23. O apoio A impede o deslocamento horizontais e a rotação.

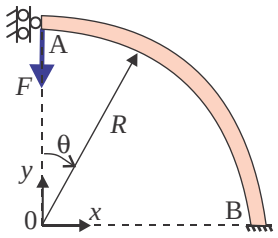


Figura 14.23: Arco sob flexão do Exemplo 12.

Solução:

O arco é hiperestático, com cinco reações. O apoio A impede o deslocamento horizonal e a rotação, i.e., $u_A = \alpha_A = 0$. Logo, existem duas reações ali, como mostrado na Figura 14.24a. No apoio B existem três reações não nulas: reações de forças horizontal R_{Bx}, vertical R_{By} e uma reação de momento R_{MB}.

O esforço de momento fletor é obtido com o auxílio do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 14.24b: $M_z(\theta) = -[m + FR\ \text{sen}\theta + gR(1-\cos\theta)]$. A energia de deformação é $U = \frac{1}{2EI}\int_{\theta=0}^{\pi/2} M_z^2 R\, d\theta$. O Teorema de Castigliano dá os deslocamentos e a rotação em A:

$$
\begin{aligned}
u_A &= \frac{\partial U}{\partial g} = -\frac{R^2}{4EI}\left[2FR + 2m(\pi - 2) - gR(8 - 3\pi)\right], \\
v_A &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{R^2}{4EI}\left[4m + 2gR + F\pi R\right], \\
\alpha_A &= \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{R}{2EI}\left[2R(F - g) + \pi\left(m + gR\right)\right].
\end{aligned} \tag{14.81}
$$

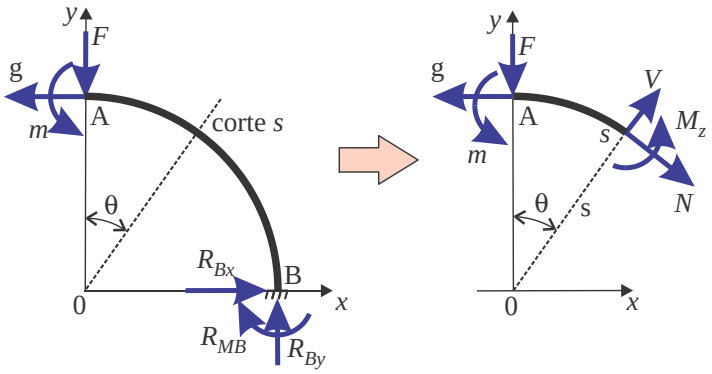


Figura 14.24: (a) Diagramas de corpo livre para o Exemplo 12 e (b) equilíbrio para o corte arbitrario s.

Impondo as condições de contorno $u_A = \alpha_A = 0$ na primeira e terceira equações obtém-se as reações g e m:

$$\boxed{g = \frac{2F(\pi - 4)}{\pi^2 - 8} \qquad \text{e} \qquad m = \frac{4FR(3 - \pi)}{\pi^2 - 8}} \tag{14.82}$$

Da segunda equação tem-se o deslocamento vertical

$$\boxed{v_A = \frac{FR^3(32 - 20\pi + \pi^3)}{4EI(\pi^2 - 8)}} \tag{14.83}$$

Observa-se que, conhecidas as duas reações no apoio A, as três reações no apoio B podem ser obtidas pelas equações globais de equilíbrio do arco:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Bx} = g, \\ \sum F_y &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{By} = F, \\ \sum M_z &= 0 \quad \longrightarrow \quad R_{MB} = -[m + (F + g)R]. \end{aligned}$$

14.4.10 Exemplo 14.13 - Viga com mola flexural

As vigas AB e BC, de comprimento L_1 e L_2, são conectadas por uma mola linear de flexão de rigidez k [Nm/rad]. O conjunto está submetido a uma força transversal em D. Determine o deslocamento na seção D. Ambas as vigas tem idênticos valores de E e I. Utilize o segundo Teorema de Castigliano. Fisicamente, a mola possui uma certa extensão L_m, mas se essa extensão for muito menor que os comprimentos das vigas L_1 e L_2, pode-se desprezar a extensão da mola, e considerar que as coordenadas x de B e de C sejam coincidentes. Adicionalmente, os deslocamentos nesses pontos são iguais. Em suma, tem-se as condições:

$$\boxed{x_B \approx x_C \qquad \text{e} \qquad v_B \approx v_C} \tag{14.84}$$

Por outro lado, as rotações não são iguais. Define-se a diferença de ângulo de flexão da mola entre suas extremidades por $\Delta\theta_m$. No presente exemplo essa é a diferença entre as rotações em C e B, i.e., $\Delta\theta_m = \theta_C - \theta_B$. Considerando que a mola seja linear, a relação entre o ângulo e o esforço de momento M_m aplicado ali é dado pela constante de mola k:

$$\boxed{\Delta\theta_m = \theta_C - \theta_B = \frac{M_m}{k}} \tag{14.85}$$

A **energia de deformação armazenada na mola** é igual ao trabalho aplicado pelo esforço de momento entre suas extremidades, i.e.,

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} M_m \Delta\theta_m} \tag{14.86}$$

Usando (14.85), pode-se eliminar o esforço de momento na mola em (14.86), de forma que a **energia de deformação armazenada na mola elástica flexural** pode ser colocada na forma

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2k} M_m^2} \tag{14.87}$$

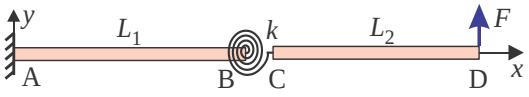


Figura 14.25: Dados do Exemplo 13.

Solução:

Fazendo diagramas de corpo livre, determinam-se os esforços de momento fletor como $M(x) = F(L - x)$, para $\forall x \in [0; L]$, onde $L = L_1 + L_2$. Nota-se que o esforço não tem descontinuidade entre as seções B e C, através da mola. De qualquer uma dessas equações se obtém o esforço na mola como $M_m = M(L_1) = FL_2$. Nota-se que a configuração deformada do conjunto é tal que existe continuidade de deslocamentos entre B e C, porém não de rotações. Entretanto, utilizando o Teorema de Castigliano para determinar o deslocamento em D, essas considerações não necessitam ser utilizadas.

A energia de deformação do conjunto é soma das energias flexurais e na mola: $U = U_{AB} + U_m + U_{CD}$:

$$U = \frac{1}{2EI}\int_{x=0}^{L_1} M^2\, dx + \frac{M_m^2}{2k} + \frac{1}{2EI}\int_{x=L_1}^{L} M^2\, dx.$$

Substituindo a expressão do momento, integrando e simplificando obtém-se

$$U = \frac{F^2 L_2^2}{2k} + \frac{F^2 L^3}{6EI}.$$

Em seguida, aplicando o segundo Teorema de Castigliano tem-se

$$\boxed{v_D = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F L_2^2}{k} + \frac{F L^3}{3EI}}$$

14.4.11 Exemplo 14.14 - Viga com apoio em mola

A viga mostrada é engastada em A e apoiada em B por uma mola extensional linear de constante k [N/m], e suporta uma força transversal F em C. Obtenha a força na mola e as deflexões v_B e v_C, no centro e na extremidade da viga, utilizando o segundo Teorema de Castigliano.

Solução:

O problema é hiperestático, uma vez que o apoio A possui duas reações não nulas (R_{Ay} e R_M), e o apoio D possui a reação R_{Dy} (que convencionamos aqui ser no sentido negativo de y). O esforço de momento fletor na viga e o esforço normal na mola são:

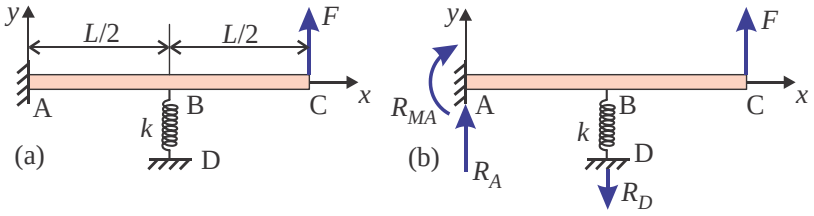


Figura 14.26: Dados do Exemplo 14 e reações nos apoios.

$$\begin{aligned}
\text{Viga AB} \quad &: \quad \longrightarrow M_{AB}(x) = F(L-x) - R_{Dy}(L/2-x), \\
\text{Viga BC} \quad &: \quad \longrightarrow M_{BC}(x) = F(L-x), \\
\text{Mola} \quad &: \quad \longrightarrow N_m = R_{Dy}.
\end{aligned}$$

Nota-se que o esforço normal na mola pode ser considerada como o de uma barra sob tração. A **energia de deformação armazenada na mola** é igual ao trabalho aplicado pelo esforço normal entre suas extremidades, i.e.,

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} N_m \delta_m} \tag{14.88}$$

onde δ_m é a variação de comprimento da mola, que no presente exemplo é a diferença entre os deslocamentos de suas extremidades, em B e D, i.e., $\delta_m = v_B - v_D$. Por definição de uma mola linear, a relação entre sua deflexão e a solicitação aplicada é dada pela sua constante de mola, i.e., $N_m = k\delta_m$. Logo, a **energia de deformação armazenada na mola** é

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2k} N_m^2} \tag{14.89}$$

A energia de deformação no sistema é a soma das energias flexurais dos dois trecho de viga e da energia de armaznada na mola: $U = U_{AB} + U_{BC} + U_m$:

$$U = \frac{1}{2EI}\int_{x=0}^{L/2} M_{AB}^2 \, dx + \frac{1}{2EI}\int_{x=L/2}^{L} M_{BC}^2 \, dx + \frac{R_{Dy}^2}{2k}.$$

Do Teorema de Castigliano tem-se os deslocamentos verticais nos pontos C e D:

$$\begin{aligned}
v_D \quad &= \quad \frac{\partial U}{\partial R_{Dy}} = \frac{R_{Dy}}{k} - \frac{5FL^3}{48EI} + \frac{R_{Dy}L^3}{24EI}. \\
&\boxed{v_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL^3}{3EI} - \frac{5R_{Dy}L^3}{48EI}}
\end{aligned}$$

A reação R_{Dy} é obtida impondo-se a condição que o ponto D é fixo, $v_D = 0$. Resolvendo a primeira equação obtém-se

$$\boxed{R_{Dy} = \frac{5FL^3k}{[48EI + 2kL^3]}}$$

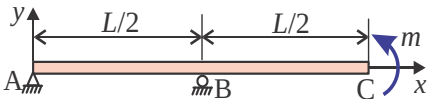
Por equilíbrio, essa também é a força normal na mola. O deslocamento vertical na seção B pode ser obtido pela relação constitutiva da mola $k = N_m/\delta_m$. A variação de comprimento da mola é dada por $\delta_m = v_B - v_D$. Como $v_D = 0$, tem-se que $\delta_m = v_B$. O esforço na mola é $N_m = R_{Dy}$. Logo,

$$v_B = \frac{R_{Dy}}{k} = \frac{5FL^3}{[48EI + 2kL^3]} \tag{14.90}$$

14.5 Exercícios

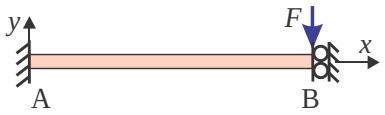
- Em todos os exercícios obtenha o deslocamento, rotação ou reação de apoio conforme indicado, usando o segundo Teorema de Castigliano.
- Onde não indicado, o comprimento da barra é L.
- Ignore os esforços cortantes. Onde possível, ignore também os esforços normais.
- Exceto se indicado diferentemente nos problemas, os dados são os seguintes: $m = 5$ kNm, $L = 1$ m, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m, $F = 25$ kN, $G = 10$ kN, $q = 25$ kN/m, $p = 10$ kN/m, $\alpha = 30°$.

14.1

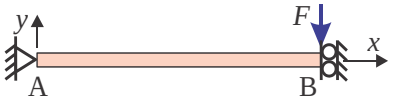


14.2 Para a viga do Exercício 1 determine o deslocamento transversal da seção C.

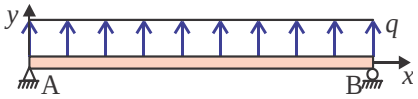
14.3 Determine as reações nos apoios e o deslocamento em B.



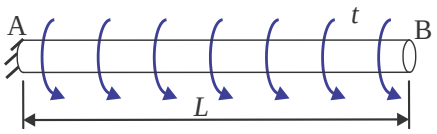
14.4 Determine as reações nos apoios e o deslocamento em B.



14.5 Obtenha a curva elástica pelo Teorema de Castigliano.



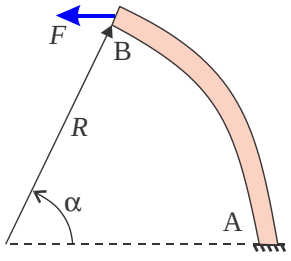
14.6 A barra tem seção circular uniforme, maciça, submetida a um torque distribído t [Nm/m]. Determine o ângulo de torção φ em B.



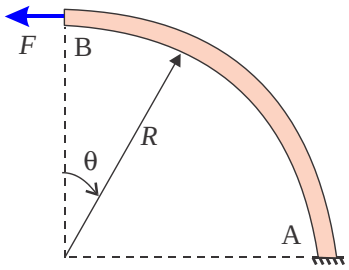
Problemas com arcos delgados.

- Ignore os esforços normais e cortantes.
- Considere todos os arcos semicirculares de raio R, delgados, i.e., com altura da parede pequena em relação ao raio.
- A menos que indicado em contrario, a seção transversal dos arcos é $b \times h$, onde h é na direção do raio, e b na direção transversal.
- A menos que indicado de forma diferente, determine as componentes de deslocamento no ponto de aplicação das cargas, por exemplo u_A e v_A nas direções x e y respectivamente.
- Como método, inicialmente considere uma seção arbitrária no arco, definida pelo ângulo θ, e determine o esforço de momento fletor M_z devido ao carregamento. Em seguida determine a energia de deformação e aplique o segundo Teorema de Castigliano.
- Diversos problemas possuem plano de simetria, de forma que é possivel obter sua solução a partir de exercícios anteriores mais simples.

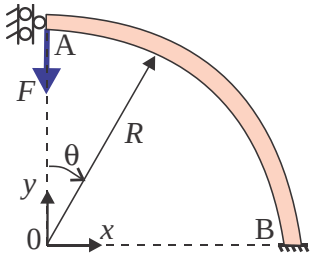
14.7 Obtenha os deslocamentos horizontal de B para $\alpha = 60$.



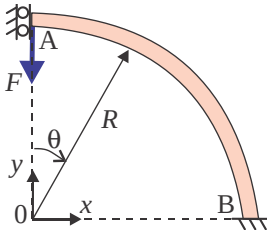
14.8 Obtenha os deslocamentos horizontal e vertical de B.



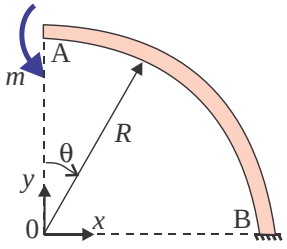
14.9 Obtenha o deslocamento vertical e a reação de momento na seção A.



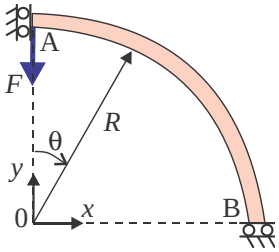
14.10 Obter v_A e a reação de momento em A.



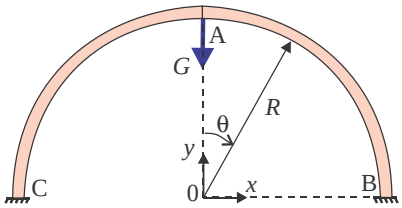
14.11 Obtenha u_A, v_A e α_A.



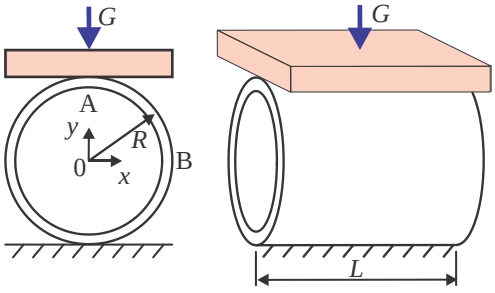
14.12 Obter v_A e a reação de momento em A.



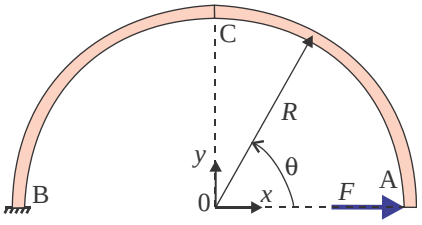
14.13



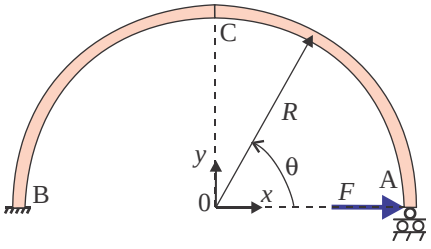
14.14 Obter o deslocamento vertical δ_A da placa horizontal.



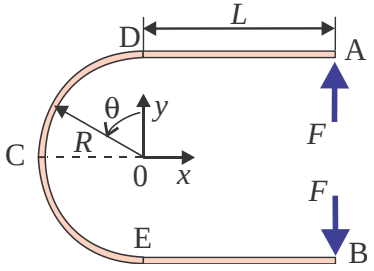
14.15 Obter u_A e v_A.



14.16

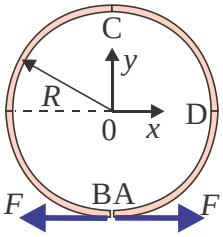


14.17 Determine a abertura total δ entre as seções A e B, e a constante de mola da peça.



14.19 O anel é de 360°, mas é aberto nos pontos A e B. Nessas seções atua um par de forças F. Determine a abertura total δ entre as seções A e B, e a constante de mola

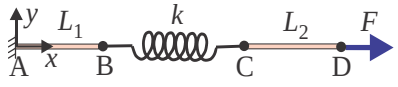
da peça.



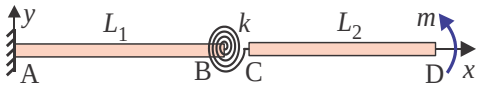
14.20 Refaça o Exercício 8 considerando que o momento de inércia I_z varia quadraticamente ao longo de θ, sendo $I_A = 1,3I_B$. Considere a variação na forma $I_z(\theta) = I_B + (I_A - I_B)\,(2\theta/\pi)^2$.

Problemas envolvendo molas.

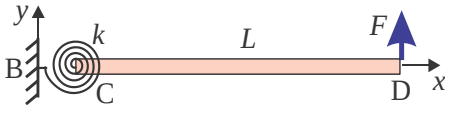
14.21 As barras AB e CD têm idênticos valores de seção transversal e material, A e E, e comprimentos L_1 e L_2. Elas são conectadas por uma mola axial de rigidez k. Determine o deslocamento axial na seção D.



14.22 As vigas AB e CD tem comprimento L_1 e L_2 são conectadas por uma mola de flexão de rigidez k [Nm/rad]. Determine o deslocamento transversal na seção D. Ambas as vigas tem idênticos valores de E e I.

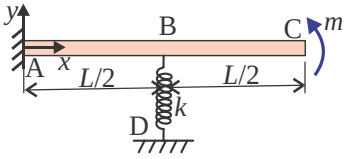


14.23 Uma mola de flexão de rigidez k [Nm/rad] faz a conexão da viga CD com um apoio. Determine o deslocamento transversal na seção D.

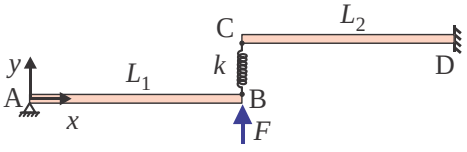


14.24 A mola linear de constante k é montada sem pré-deformação na extremidade da viga AB, de comprimento L. Em seguida uma força F é aplicada. Determine o deslocamento $v(L)$ e o esforço interno $M_z(x)$ na viga.

14.25 Use o enunciado do Exemplo 24 e obtenha a força na mola e a deflexão v_C na seção C.



14.26 A mola de rigidez k é montada indeformada entre as extremidades B e C das vigas. Essas vigas tem material e seção transversal idênticas e comprimentos L_1 e L_2. Determine os deslocamentos dos pontos B e C.



14.27 Para as vigas do Apêndice 17.1, obtenha os seguintes itens usando o 2° Teorema de Castigliano. Verifique os resultados com aqueles obtidos via método da integração.

Item	Obter
3, 4, 13, 17	$v_{\max}$ e $\theta_{\max}$
6	v_B e θ_B
7	$v_{\max}$ e v_B
8	v_C e θ_C
9, 12	v_B e θ_C
11, 15	$v_{\max}$
14, 16	$\theta_{\max}$

Problemas adicionais

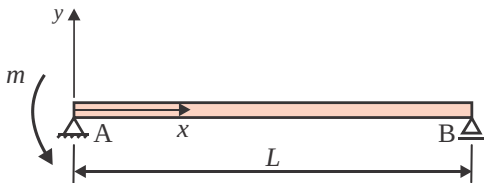
a. Determine o deslocamento ou rotação no ponto de aplicação da carga, na direção colinear a esta. Em caso de duas cargas aplicadas na estrutura, fazer a determinação na primeira das seções carregadas (A, B ou C, etc).

b. **Observação**: note que se existem duas forças F aplicadas, nos cálculos da energia de deformação do Teorema de Castigliano é necessário distinguir as duas forças, fazendo F_1 e F_2, por exemplo.

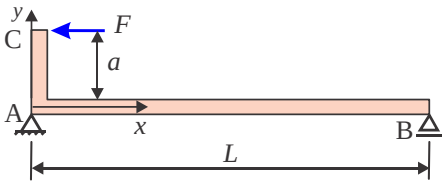
c. Os problemas abaixo estão contidos na lista de Exercícios do Capítulo 2, página 2.8. A relação com os números dos exercícios daquele capítulo é indicada aqui entre parêntesis. Assim, o aluno pode usar parte da resposta obtida naquele capítulo, para as equações de esforços, no cálculo da energia de deformação. Pode ser necessário realizar adaptações nas equações, conforme a observação do item b acima.

(a) Exceto se indicados diferentemente nos problemas, os dados são os seguintes: $m = 5$ kNm, $L = 1$ m, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m, $F = 25$ kN, $G = 10$ kN, $q = 25$ kN/m, $p = 10$ kN/m, $\alpha = 30°$.

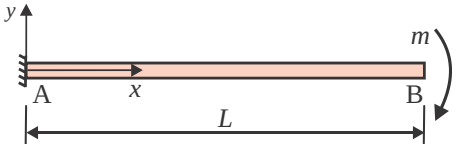
14.28 (2.1)



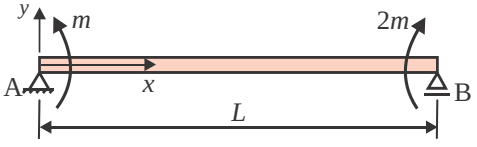
14.29 (2.2)



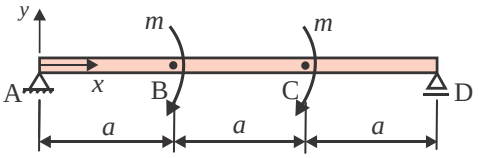
14.30 (2.3)



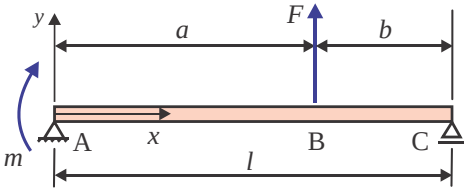
14.31 (2.4)



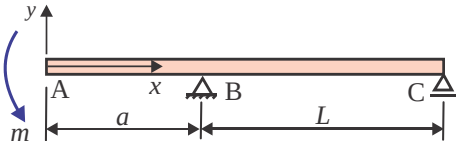
14.32 (2.6)



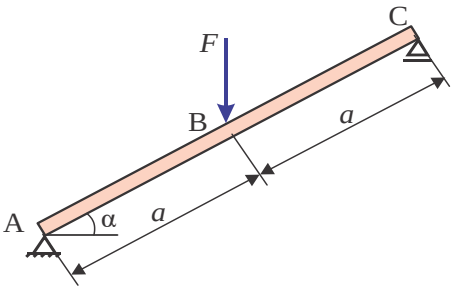
14.33 (2.8)



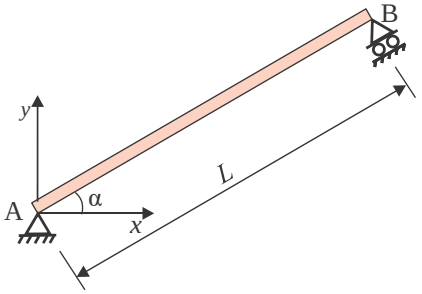
14.34 (2.8.1)



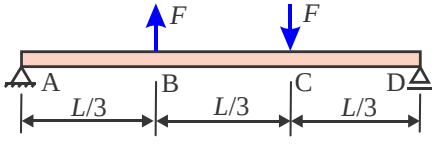
14.35 (2.12)



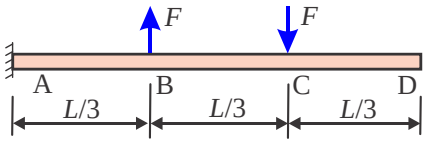
14.36 (2.17) A barra é de aço, sob a ação de seu peso próprio na direção $-y$. Seu diâmetro é $d = 10$ mm.



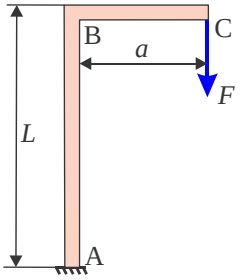
14.37 (2.21)



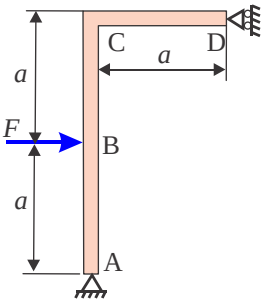
14.38 (2.22)



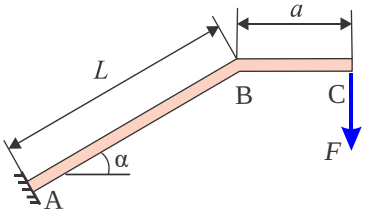
14.39 (2.27)



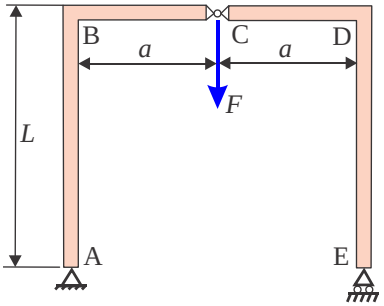
14.40 (2.28)



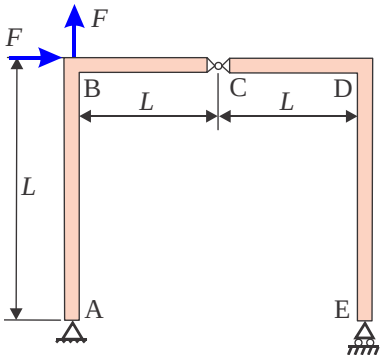
14.41 (2.29)



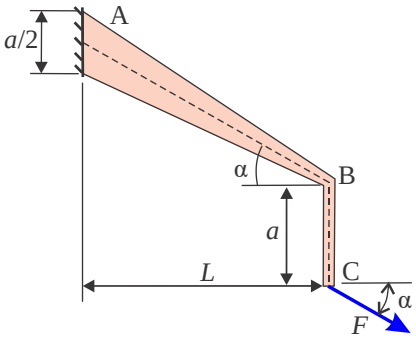
14.42 (2.31) A seção C possui uma rótula.



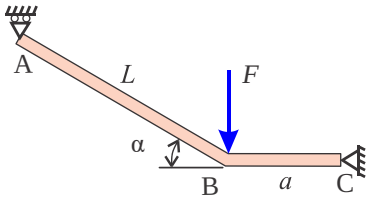
14.43 (2.33) A seção C possui uma rótula.



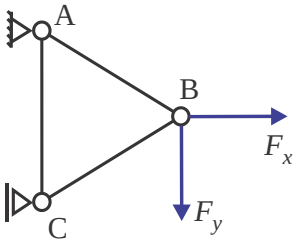
14.44 (2.34)



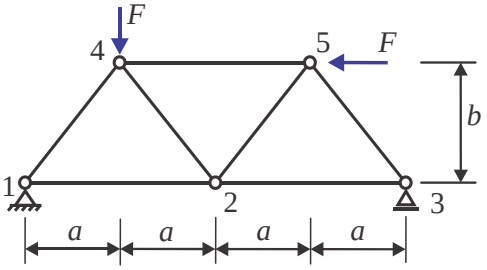
14.45 (2.37)



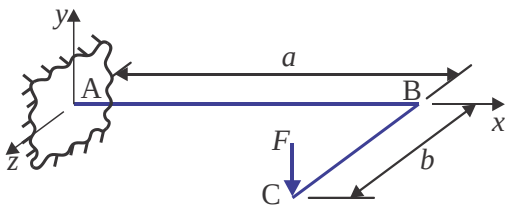
14.46 (2.39) Barras de comprimento $L = 1$ m, $F_x = F_y = F = 1$ kN.



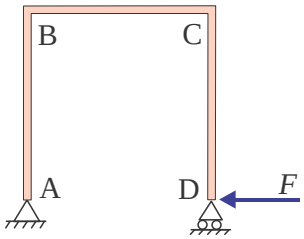
14.47 (2.40) $F = 10$ kN, $a = 1$ m, $b = 2$ m.



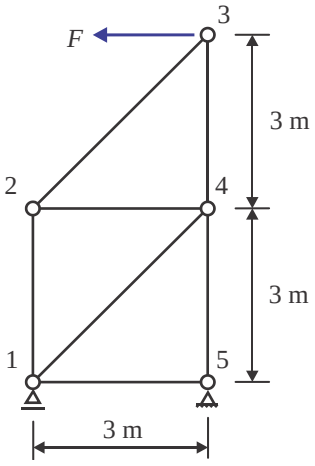
14.48 (2.41) $f = 25$ kN, $a = 0,2$ m, $b = 0,4$ m.



14.49 (2.42) Os três segmentos de viga têm comprimentos L.



14.50 (2.43) $F = 10$ kN.



Capítulo 15

Elementos finitos para barras e treliças

O presente capítulo faz a introdução ao método de elementos finitos utilizando o problema de análise estrutural de barras e treliças. Como regra geral, a solução do campo de deslocamento num problema estrutural é desconhecida, e é justamente esse campo que se deseja conhecer, pois uma vez que a solução de deslocamento tenha sido determinada, todos os demais campos de interesse no projeto estrutural podem ser obtidos diretamente (reações, deformações e tensões, por exemplo). Os problemas estruturais atuais são geralmente demasiado complexos para permitir que se obtenha sua solução exata. Isso não impede que se tenha atualmente uma grande quantidade de problemas com soluções exatas conhecidas, determinadas ao longo dos últimos dois séculos. Entretanto, essas soluções se restringem apenas a situações de geometria e carregamentos simplificados. Os problemas de engenharia atuais exigem um grande nível de detalhamento de representação de geometria, carregamento e condições de contorno que fogem do escopo de simplificações das soluções exatas. É nesse âmbito que surgem os métodos numéricos de solução, como o Método de Elementos Finitos (MEF). Uma primeira característica do MEF é que ele não visa determinar a solução exata do problema, mas apenas prover uma solução aproximada do mesmo.

Inicialmente, é interessante que se tenha algum tipo de definição do método (muitas vezes referido aqui e na literatura simplesmente como MEF).

"De forma geral, pode-se afirmar que o MEF é uma família de métodos numéricos para a determinação de soluções aproximadas de problemas que tenham sido previamente modelados matematicamente por um conjunto de equações diferenciais e condições de contorno e iniciais adequadas."

Com essa definição, o método alinha-se junto a outras grandes famílias de métodos, como o **método de diferenças finitas** (o mais antigo), e o **método de elementos de contorno** (de desenvolvimento paralelo ao do MEF, a partir dos anos 1960). O MEF se caracteriza, entre diversos outros aspectos, por sua versatilidade, sendo aplicado com sucesso na modelagem computacional de todos os tipos de modelagem matemática de qualquer tipo de fenômeno físico, como se pode citar, como exemplos dentre uma infinidade de outros fenômenos que já possuam uma modelagem matemática através de um sistema de equações diferenciais:

- Problemas de mecânica dos sólidos e de análise de estruturas. Foi exatamente nessa área que o método foi criado. Aqui ele se aplica a todos os tipos de fenômenos e problemas: problemas estáticos ou dinâmicos, materiais elásticos e não-elásticos de diversos tipos, com comportamentos materiais de tipos plásticos, de fluência, etc.

- Problemas de acústica, de vibrações, impacto, envolvendo ruptura, mudança de fase, e uma infinidade de outros.

- Problemas de mecânica dos fluidos, (laminares ou turbulentos), problemas de transferência de calor, (condução, radiação, convecção).

- Problemas envolvendo reações químicas.
- Problemas de geofísica,
- Problemas de astrofísica.

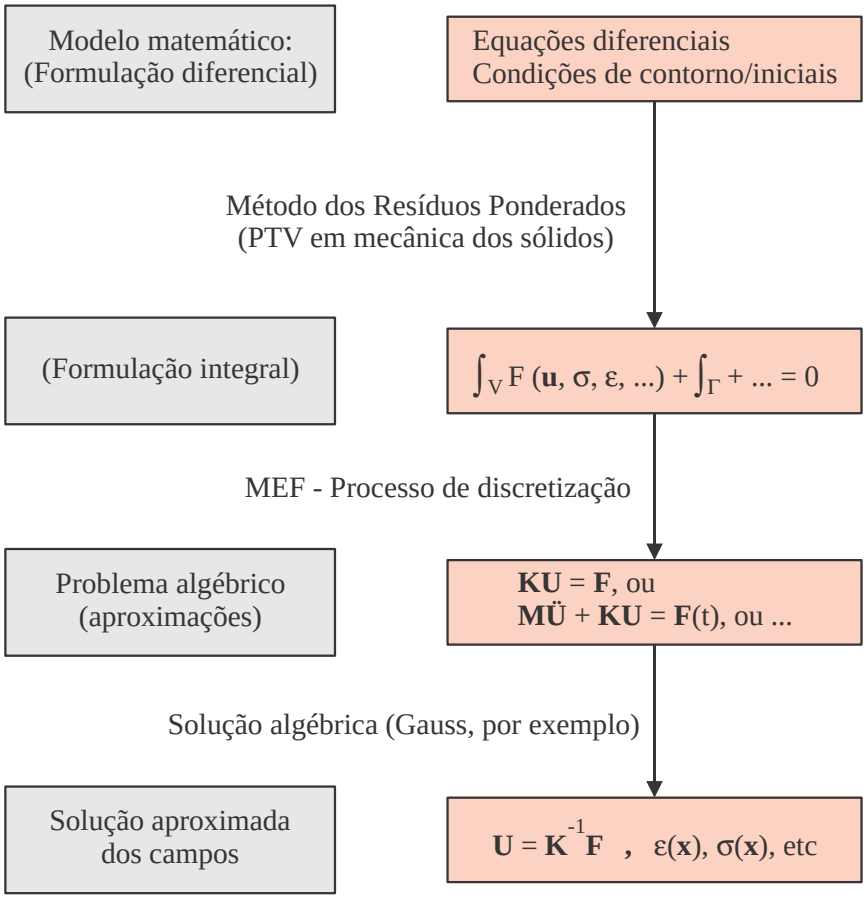


Figura 15.1: Visão geral do processo de discretização pelo Método de Elementos Finitos.

O processo geral de discretização numérica de um problema pelo MEF pode ser visualizado no fluxograma da Figura 15.1. O ponto de partida é um conjunto de equações diferenciais e algébricas com suas devidas condições de contorno que descrevem o comportamento de certo problema físico. Por exemplo, a equação diferencial da curva elástica de uma viga, com as condições de contorno de extremidades simplesmente apoiadas. Essa formulação diferencial é transformada numa formulação integral utilizando um procedimento matemático (o Método dos Resíduos Ponderados) cuja descrição foge ao escopo do presente texto. Em muitos problemas de mecânica dos sólidos e de estruturas essa transformação corresponde ao Princípio dos Trabalhos Virtuais ou a alguma de suas variantes.

Do ponto de vista do engenheiro analista, o ponto de partida consiste em tomar a geometria do problema, como aquela ilustrada na Figura 15.2, e gerar uma **malha de elementos finitos**. Isso consiste em subdividir a geometria em regiões de formato simples, os **elementos finitos**, que são determinados por **nós**. Os procedimentos do MEF são aplicados aos dados da malha para converter a forma integral numa formulação algébrica, matricial, do problema. Por exemplo, os formatos mais típicos do problema algébrico resultante em mecânica dos sólidos são:

$$\begin{aligned} \text{problema estático} &\longrightarrow \mathbf{KU} = \mathbf{F}, \\ \text{problema dinâmico linear} &\longrightarrow \mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{C\dot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}, \end{aligned}$$

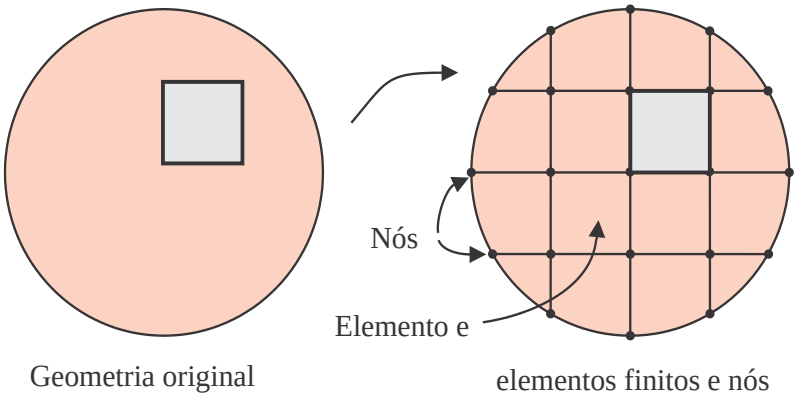


Figura 15.2: (a) Geometria original de um corpo com um furo arbitrário; (b) geometria aproximada por uma malha de elementos finitos ilustrativa.

M, **C e K** são matrizes, geradas pelo método para representar as propriedades estruturais (rigidez, amortecimento e massa, respectivamente) da estrutura, e **F** é um vetor também conhecido, determinado pelo método para representar as forças externas aplicadas. **U**, $\dot{\mathbf{U}}$ e $\ddot{\mathbf{U}}$ são vetores constituídos pelos valores de deslocamento, velocidade e aceleração nos nós da estrutura, que representam sua resposta em presença do carregamento. Esses vetores são as incógnitas, obtidos pela solução numérica do problema matricial. Essa solução é apenas uma aproximação da solução do problema integral, não sua solução exata.

Uma vez que o presente texto é introdutório, buscou-se uma forma de apresentar o material de maneira a que diversas das etapas visualizadas na Figura 15.1 pudessem ser simplificadas ou até mesmo suprimidas. Isso foi conseguido pela escolha de dois problemas bastante simples, os problemas de comportamento de barras sob tração e de vigas sob flexão plana. A vantagem da utilização desses dois problemas para introduzir o método deve-se à simplicidade da formulação básica desse tipo de problema. Isso permite que diversas etapas do método sejam expostas de forma aberta. Sem dúvida, a simplicidade excessiva do problema de barra impede que aspectos mais avançados do método possam ser demonstrados. Entretanto, as etapas do MEF, a nomenclatura e os aspectos mostrados aqui são comuns a todas as formulações mais avançadas.

Considerando agora mais particularmente o problema do comportamento estrutural de uma barra ou conjunto de barras, note-se que não há nenhum desafio na determinação da resposta em condições estáticas, elástico-linear. A equação diferencial, deduzida em (4.115), pode ser facilmente integrada. Mesmo para resolver uma treliça de meia dúzia de barras, pode-se utilizar um método manual. Entretanto, quando se tem uma estrutura de centenas ou milhares de barras, a situação é diferente, e torna-se necessário dispor de um método automatizável e programável computacionalmente. Assim, a escolha feita aqui para a apresentação do MEF via problemas de barras e vigas tem duplo propósito: primeiro o de introduzir o método numa base simples, e segundo, tem o propósito básico de fornecer um método poderoso para resolver duas classes de problemas (estruturas de barras e vigas) que tem sua própria importância na engenharia fundamental.

15.1 Interpolação dos deslocamentos

Seja um elemento finito de barra de comprimento L, definido pelos chamados **nós do elemento**, que são denominados nós locais 1 e 2, ou I e J. Define-se um **sistema local de coordenadas do elemento**, com eixos $\bar{x} - \bar{y}$, de forma que a origem seja no nó 1, e o eixo axial $\bar{x}$ seja no sentido nó 1 ao nó 2 como indicado na Figura 15.3. A seção transversal do elemento tem área A e módulo de elasticidade do material é E. O elemento é submetido a **esforços nodais** axiais $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$ aplicados em seus nós 1 e 2. Nesse ponto, a necessidade de equilíbrio entre os esforços é deixada para uma etapa posterior.

Note-se que na forma usual de formulação do MEF, os esforços nodais tem sinais positivos sempre que estiverem no sentido positivo do eixo $\bar{x}$, como indicado na figura.

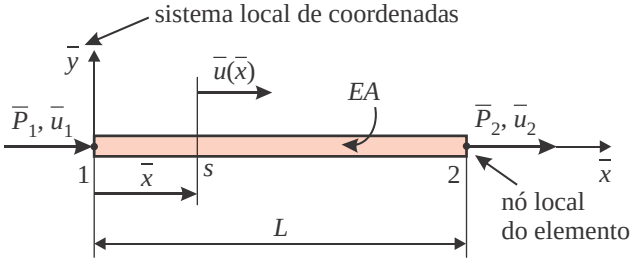


Figura 15.3: Propriedades e graus de liberdade de um elemento finito de barra.

Considere que a solução de deslocamento axial numa seção arbitraria $\bar{x}$ no elemento seja uma função $\bar{u}(\bar{x})$. Consideremos que essa solução é desconhecida, Considere por exemplo que a solução exata do deslocamento axial no elemento finito de barra seja uma função $\bar{u}(\bar{x})$, com o formato ilustrado na curva contínua da Figura 15.4. Observe que fizemos questão de apresentar uma curva de formato arbitrário, de forma que não existe nenhuma função analítica que possa representa-la (não é um seno, ou logaritmo, ou $1/x$, etc.). Assim, a única forma que existe para informar perfeitamente as características dessa curva é listar uma tabela de infinitos pares ordenados $(x, u(x))$, em todo o campo dos números reais entre 0 e L. É dito que essa curva pertence a um conjunto de funções de dimensão infinita. Por outro lado, podemos considerar aproximações simplificadas para essa curva. Por exemplo, podemos buscar a melhor aproximação por um polinômio linear ou quadrático, cúbico, etc. Agora, se buscamos uma aproximação linear para a solução, essa aproximação pode ser perfeitamente descrita por apenas dois parâmetros, enquanto uma aproximação quadrática necessita de apenas três informações. Então essas funções são de dimensão 2 e 3, respectivamente, em lugar de dimensão infinita como a solução exata. Tem-se então a base do processo conhecido por **discretização** do problema. O que o MEF faz, inicialmente, é considerar a solução aproximada, discretizada, de tal forma que a incógnita do problema deixa de ser uma função $(u(x))$, e passa a ser uma série de parâmetros escalares, os coeficientes de polinômios da aproximação. A segunda característica do MEF é que a discretização é feita de forma quase independente dentro de cada elemento, e não na estrutura completa.

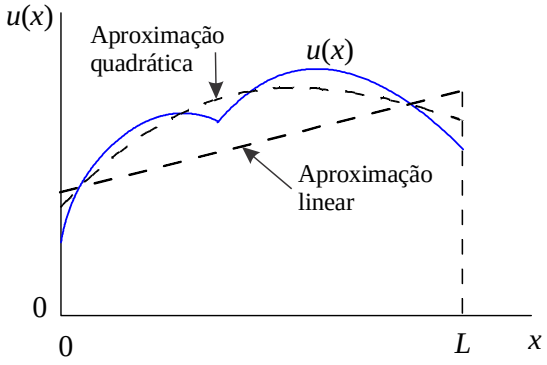


Figura 15.4: Ilustração de função arbitrária $u(x)$ e duas funções aproximadas (linear e quadrática).

Comecemos com o detalhamento, considerando que o campo de deslocamento axial exato $\bar{u}(\bar{x})$ num dado elemento possa ser aproximado por uma função linear $\bar{u}_h(\bar{x})$, isto é

$$\bar{u}(\bar{x}) \simeq \bar{u}_h(\bar{x}) \equiv a_1 + a_2\bar{x}. \tag{15.1}$$

O subscrito h é normalmente usado na literatura para indicar a aproximação obtida pelo MEF. Entretanto, ao longo do texto suprimiremos esse subscrito para manter a notação limpa, uma vez

que praticamente todo o trabalho será apenas sobre as aproximações.

Nota-se que o problema de barras é bastante simples, de forma que, se tivermos seção transversal uniforme e ausência de carga axial distribuída, a solução exata é sabida ser tal que o esforço normal N_x **é constante** ao longo da coordenada axial $\bar{x}$, e o deslocamento axial para uma seção arbitrária $\overline{x}$ da barra, $0 \leqslant \overline{x} \leqslant L$, é realmente linear, isto é, essa é uma das poucas situações em que o MEF produz soluções exatas.

Definimos $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ como os **deslocamentos nodais** axiais no elemento. Nesse ponto, em vez de usar as constantes a_1 e a_2 para representar a equação linear $\bar{u}(\bar{x})$, será mais interessante representar a equação da reta usando outros dois parâmetros escalares, os valores nodais $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$. Para isso, consideremos as seguintes condições de contorno na equação (15.1):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Para} & \overline{x} = 0 & \longrightarrow \quad u(0) = \overline{u}_1 = a_1 + a_2 0, \\ \text{Para} & \overline{x} = L & \longrightarrow \quad u(L) = \overline{u}_2 = a_1 + a_2 L. \end{array} \right. \tag{15.2}$$

Invertendo as equações temos:

$$a_1 = \overline{u}_1 \qquad \text{e} \qquad a_2 = \frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{L}. \tag{15.3}$$

Assim, a equação para o deslocamento de qualquer ponto da barra é dada por:

$$u(\overline{x}) = \overline{u}_1 + \left(\frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{L} \right) \overline{x}. \tag{15.4}$$

Essa expressão pode ser colocada numa formatação mais útil, organizando os termos conforme os valores nodais:

$$u(\overline{x}) = \overline{u}_1 \underbrace{\left(1 - \frac{\overline{x}}{L} \right)}_{\psi_1(\overline{x})} + \overline{u}_2 \underbrace{\frac{\overline{x}}{L}}_{\psi_2(\overline{x})}. \tag{15.5}$$

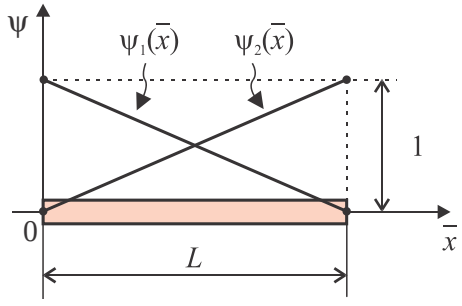


Figura 15.5: Funções de interpolação lineares num elemento.

As funções ψ_1 e ψ_2 são denominadas **funções de forma**, ou **funções de interpolação** lineares, e são definidas como segue:

$$\boxed{\psi_1(\overline{x}) = 1 - \frac{\overline{x}}{L} \qquad \text{e} \qquad \psi_2(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{L}} \tag{15.6}$$

Assim, a expressão (15.5) pode ser reescrita como:

$$\boxed{u(\overline{x}) = \overline{u}_1 \psi_1(\overline{x}) + \overline{u}_2 \psi_2(\overline{x})} \tag{15.7}$$

Nota-se que agora $u(\overline{x})$ uma função linear representada como uma combinação de duas funções lineares, sendo os dois parâmetros os valores nodais $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$. Em (15.1) a representação linear era feita em termos dos monômios 1 e x, tendo como parâmetros da reta as constantes a_1 e a_2. A mudança de formato na representação deve-se às várias propriedades das funções de interpolação

ψ_1 e ψ_2, e ao fato que os valores $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ possuem significação física que são bastante úteis na formulação do MEF.

15.1.1 Interpretação das funções de interpolação lineares

As funções de interpolação, ψ_1 e ψ_2, dadas em (15.6), são polinômios lineares, cujos gráficos são mostrados na Figura 15.5. Essas funções tem as seguintes características:

1. As funções são definidas de tal forma que são **nulas fora do intervalo** $0 \leq \overline{x} \leq L$, isto é, $\psi_j(\overline{x}) = 0$ para $\overline{x} \leq 0$ e $\overline{x} \geq L$.
2. A **soma delas sempre resulta na unidade**: de fato, mostra-se facilmente que $\psi_1(\overline{x}) + \psi_2(\overline{x}) = 1$ para qualquer $0 \leq \overline{x} \leq L$.
3. A função ψ_1 é unitária no nó 1 e nula no nó 2, enquanto que a função ψ_2 é nula no nó um e unitária no nó 2, como pode ser visto na Figura 15.5.

Nesse ponto adianta-se ao leitor os seguintes aspectos gerais sobre o MEF:

A. Para a construção de formulações de elementos finitos em cada tipo de problema, (como elemento de viga, ou de placa, ou de condução de calor, etc.), tem-se como um dos passos iniciais a escolha de uma **família de funções de interpolação**, geralmente polinômios. No presente caso partimos de um polinômio linear, o que significa que temos duas constantes incógnitas, $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$, a determinar em cada elemento. Em geral se poderia usar uma aproximação polinomial de maior grau no elemento.

B. Em geral, a solução de elementos finitos não será exata, isto é, o fato de utilizarmos um elemento em que a função de deslocamento é linear, não nos impede de modelarmos problemas cuja solução real seja algum outro tipo de função (polinômio cúbico, logaritmo, etc.). Nesses casos, o método apresenta a melhor aproximação dos valores exatos. No presente caso, como utilizamos deslocamento linear, sabemos que obteremos solução exata em todo problema cujo carregamento seja constituído apenas por cargas concentradas (**sem cargas axiais distribuídas**).

15.1.2 Determinação da matriz de rigidez do elemento finito de barra

A deformação na direção axial da barra, em termos do deslocamento $u(\overline{x})$, numa seção arbitrária de coordenada $\overline{x}$, é dada por:

$$\varepsilon_{\overline{x}\overline{x}}(\overline{x}) = \frac{du}{d\overline{x}}. \tag{15.8}$$

Substituindo a equação (15.7) na equação (15.8), pode-se escrever que:

$$\varepsilon_{\overline{x}\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}}\left(\overline{u}_1\psi_1 + \overline{u}_2\psi_2\right) = \overline{u}_1\frac{d\psi_1}{d\overline{x}} + \overline{u}_2\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}. \tag{15.9}$$

Assim se tem a função de deformação axial aproximada também pelos valores nodais do deslocamento no elemento.

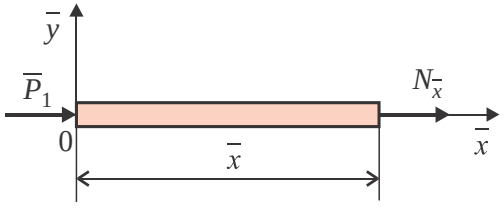


Figura 15.6: Esforço normal numa seção arbitrária de um elemento de barra.

Numa seção arbitrária de coordenada $\overline{x}$ o esforço normal é $N_x(\overline{x})$, como na Figura 15.6. Uma vez que o carregamento é axial, a **tensão normal média** numa seção arbitrária $\overline{x}$ se relaciona ao esforço normal $N_x(\overline{x})$ por:

$$\sigma_{xx}(\overline{x}) = \frac{N_x(\overline{x})}{A}. \tag{15.10}$$

Finalmente, tomamos a **Lei de Hooke** para estados uniaxiais de tensões:

$$\sigma_{xx}(\overline{x}) = E\varepsilon_{xx}(\overline{x}). \tag{15.11}$$

Assim, pode-se relacionar o esforço normal com a deformação axial por:

$$\sigma_{xx}(\overline{x}) = \frac{N_x(\overline{x})}{A} = E\varepsilon_{xx}(\overline{x}), \tag{15.12}$$

de forma que da segunda igualdade,

$$N_x(\overline{x}) = EA\varepsilon_{xx}(\overline{x}). \tag{15.13}$$

Substituindo (15.9) em (15.13) tem-se a relação do esforço normal com o deslocamento axial:

$$N_x(\overline{x}) = EA\left[\overline{u}_1\frac{d\psi_1(\overline{x})}{dx} + \overline{u}_2\frac{d\psi_2(\overline{x})}{dx}\right]. \tag{15.14}$$

Essa é a relação entre o esforço $N_x(\overline{x})$ numa seção arbitrária e os deslocamentos nodais $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$.

A expressão para a matriz de rigidez do elemento será demonstrada a seguir, conforme duas trajetórias distintas: (a) usando método de energia através do primeiro teorema de Castigliano, e (b) usando conceitos de equilíbrio nodal.

Dedução I - Rigidez obtida por energia de deformação

Uma das formas de obter a relação entre deslocamentos e esforços nodais no elemento de barra pode ser pela aplicação do **primeiro Teorema de Castigliano**, (eq.(14.53), página 521)

$$\overline{P}_k = \frac{\partial U}{\partial \overline{u}_k}, \tag{15.15}$$

ou seja, *a derivada da energia de deformação elástica em relação ao deslocamento de um ponto do corpo é igual à componente da carga aplicada neste ponto na direção do deslocamento.*

Usando a relação entre o esforço $N_x(\overline{x})$ numa seção arbitrária e os deslocamentos nodais $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$, eq.(15.14), energia de deformação para um elemento de barra é dada pela eq.(14.21), página 514:

$$U = \int_0^L \frac{N_x^2}{2EA}\,dx = \frac{EA}{2}\int_0^L \left[\overline{u}_1\,\frac{d\psi_1}{dx} + \overline{u}_2\,\frac{d\psi_2}{dx}\right]^2\,dx. \tag{15.16}$$

Logo, os esforços $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$, aplicados nos nós 1 e 2, são dados por:

$$\begin{cases} \overline{P}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \overline{u}_1}, \\ \overline{P}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \overline{u}_2}. \end{cases} \tag{15.17}$$

Note que $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ são esforços nodais do MEF. Sua convenção de sinais é distinta da convenção do esforço $N_x(\overline{x})$ numa seção arbitrária. $N_x(\overline{x})$ é positivo quando está associado a tração na seção, como na Figura 15.6, enquanto $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ são positivos quando orientados no sentido positivo do eixo local $\overline{x}$, como ilustrado na Figura 15.3.

Desenvolvendo a equação (15.17) com o uso de (15.16), tem-se:

$$\begin{cases} \overline{P}_1 = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\left[\overline{u}_1\ \frac{d\psi_1}{d\overline{x}} + \overline{u}_2\ \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\right]\ d\overline{x}, \\ \overline{P}_2 = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\left[\overline{u}_1\ \frac{d\psi_1}{d\overline{x}} + \overline{u}_2\ \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\right]\ d\overline{x}, \end{cases} \tag{15.18}$$

ou

$$\begin{cases} \overline{P}_1 = \left(EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\ d\overline{x}\right)\overline{u}_1 + \left(EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\ \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ d\overline{x}\right)\overline{u}_2 \\ \overline{P}_2 = \left(EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\ d\overline{x}\right)\overline{u}_1 + \left(EA\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ d\overline{x}\right)\overline{u}_2. \end{cases} \tag{15.19}$$

Observando essas equações nota-se que as integrais são termos conhecidos, enquanto que $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ são incógnitas. Esses termos podem ser separados e reorganizados em forma matricial:

$$\left\{\begin{array}{c}\overline{P}_1\\ \overline{P}_2\end{array}\right\} = EA\left[\begin{array}{cc} \displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\ d\overline{x} & \displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ d\overline{x} \\ \displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\ d\overline{x} & \displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\ d\overline{x} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{array}\right\}. \tag{15.20}$$

Essa equação pode ser posta em forma simbólica como:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\overline{P}_1\\ \overline{P}_2\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{array}\right\}} \tag{15.21}$$

Ou, mais sinteticamente ainda, pode ser reescrita como:

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{u}}. \tag{15.22}$$

onde:

$$\overline{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c}\overline{P}_1\\ \overline{P}_2\end{array}\right\} \text{ é o vetor esforços nodais do elemento,} \tag{15.23}$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{array}\right] \text{ é a matriz de rigidez do elemento,} \tag{15.24}$$

$$\overline{\mathbf{u}} = \left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{array}\right\} \text{ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.} \tag{15.25}$$

A relação (15.21) descreve a condição de equilíbrio do elemento, relacionando os esforços aos deslocamentos nodais através da matriz de rigidez do elemento. Essa matriz representa uma característica física do elemento, como se fosse uma constante de mola, porém incorpora as características geométricas de comprimento e seção transversal, e propriedade elástica de seu material.

Como o produto $k_{12} = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}d\overline{x} = EA\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\frac{d\psi_1}{d\overline{x}}d\overline{x} = k_{21}$, segue-se que a **matriz de rigidez do elemento é simétrica**. Essa é uma característica comum às matrizes de rigidez obtidas pelo método de elementos finitos em geral. No capítulo de elementos finitos de vigas observaremos novamente o mesmo fenômeno.

A definição dos termos da matriz de rigidez, no presente caso de elemento de barra, é bastante simples, pois podem ser facilmente integrados, gerando formas explícitas. De fato, tomemos um termo qualquer da matriz:

$$k_{ij} = EA\int_0^L \frac{d\psi_i}{d\overline{x}}\ \frac{d\psi_j}{d\overline{x}}\ d\overline{x}, \qquad i,j = 1,2. \tag{15.26}$$

Tomando as definições das funções de interpolação lineares, eq.(15.6), tem-se as derivadas $d\psi_1/d\overline{x} = -1/L$ e $d\psi_2/d\overline{x} = 1/L$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{l} k_{11} = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\,\frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\,dx = EA\int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right)\left(-\frac{1}{L}\right)\,d\overline{x} = \frac{EA}{L}, \\ k_{12} = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_1}{d\overline{x}}\,\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\,d\overline{x} = EA\int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right)\,d\overline{x} = -\frac{EA}{L}, \\ k_{22} = EA\displaystyle\int_0^L \frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\,\frac{d\psi_2}{d\overline{x}}\,dx = EA\int_0^L \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right)\,d\overline{x} = \frac{EA}{L}. \end{array}\right. \tag{15.27}$$

Assim, a **matriz de rigidez elementar** toma a forma explícita:

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{15.28}$$

E o sistema de **equações de equilíbrio de um elemento finito de barra** é dado por:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{Bmatrix}} \tag{15.29}$$

Dedução II - Obtenção da matriz de rigidez por equilíbrio

Na seção anterior obtivemos a relação esforços-deslocamentos nodais, eqs.(15.20) e (15.29), a partir de um método de energia. O problema de barra é tão simples que, excepcionalmente, um procedimento mais simples pode ser utilizado, através de considerações de equilíbrio no elemento de barra. Entretanto, o método de energia tem o mérito de poder ser aplicado a problemas estruturais mais complexos, como flexão de placas e cascas, e estados planos e triaxiais de tensões.

Consideremos um diagrama de corpo livre obtido a partir de um corte numa seção arbitrária de coordenada $\overline{x}$, como na Figura 15.6. O esforço normal $N_x(\overline{x})$ na seção arbitrária se relaciona ao esforço no nó 1 por

$$\overline{P}_1 + N_x(\overline{x}) = 0. \tag{15.30}$$

Considerando o equilíbrio do elemento como um todo, Figura 15.3, o equilíbrio entre os esforços nodais, na ausência de carga axial distribuída, é

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 0. \tag{15.31}$$

Se tomamos a relação entre o esforço numa seção e os deslocamentos nodais, eq. (15.21) e a definição das funções de forma em (15.21), se tem

$$\begin{aligned} N_x(\overline{x}) &= EA\left[\overline{u}_1\frac{d\psi_1(\overline{x})}{dx} + \overline{u}_2\frac{d\psi_2(\overline{x})}{dx}\right], \\ &= EA\left[\overline{u}_1\left(-\frac{1}{L}\right) + \overline{u}_2\left(\frac{1}{L}\right)\right] = EA\frac{(\overline{u}_2 - \overline{u}_1)}{L}. \end{aligned} \tag{15.32}$$

Nota-se então que, como consequência da hipótese de linearidade do deslocamento, o esforço normal é uniforme ao longo da extensão do elemento. De fato, a deformação também é considerada uniforme no elemento. Para isso, basta tomar (15.9)

$$\varepsilon_{xx}(\overline{x}) = \frac{d\overline{u}}{d\overline{x}} = \frac{d}{d\overline{x}}\left(\overline{u}_1\psi_1 + \overline{u}_2\psi_2\right) = \overline{u}_1\left(-\frac{1}{L}\right) + \overline{u}_2\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{(\overline{u}_2 - \overline{u}_1)}{L}, \tag{15.33}$$

e a tensão fica $\sigma_{xx}(\overline{x}) = E\varepsilon_{xx}(\overline{x}) = E\left(\overline{u}_2 - \overline{u}_1\right)/L$. Então tanto a deformação aproximada pelo MEF quanto a tensão são uniformes ao longo do elemento. A deformação uniforme corresponde

exatamente à deformação média de uma barra de seção uniforme submetida a cargas axiais nas extremidades.

Consideremos novamente a equação de equilíbrio (15.30), usando (15.32)

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= -N_x(x) \\ &= -EA\frac{(\overline{u}_2 - \overline{u}_1)}{L}. \end{aligned} \tag{15.34}$$

Consideremos também o equilíbrio global do elemento, (15.31), usando (15.34):

$$\begin{aligned} \overline{P}_2 &= -\overline{P}_1 \\ &= EA\frac{(\overline{u}_2 - \overline{u}_1)}{L}. \end{aligned} \tag{15.35}$$

As duas equações (15.34) e (15.35) podem ser reunidas e reorganizadas em forma matricial como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}, \tag{15.36}$$

que é exatamente a mesma expressão mostrada em (15.29), obtida pelo método da energia.

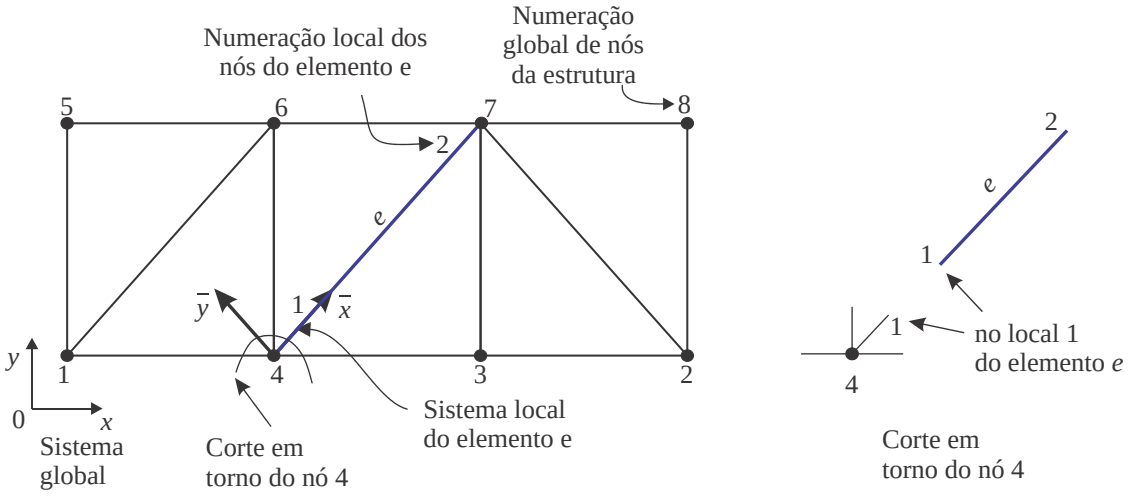


Figura 15.7: Treliça plana ilustrativa, com indicação de sistema global de coordenadas xyz e o sistema local de um elemento arbitrário e.

15.2 Matriz de rigidez de um elemento rotacionado no plano xy

A matriz de rigidez para uma barra orientada ao longo da direção do eixo local $\bar{x}$, obtida na seção anterior, é um caso particular. Numa estrutura arbitrária, como por exemplo as de uma treliça plana ou espacial, as barras são orientadas em diversas direções no espaço cartesiano. Isso é ilustrado na Figura 15.7, em que o **sistema global** xyz refere-se à estrutura como um todo, e cada elemento possui seu próprio **sistema local**, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Torna-se necessário obter uma equação matricial para o equilíbrio do elemento numa orientação arbitrária. Na presente seção apresenta-se o modelo para a matriz de rigidez de um elemento finito de barras com uma orientação arbitrária no plano xy.

Para isso, considere-se um **sistema global de coordenadas** (x, y, z) e um **sistema local de coordenadas**, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Considere-se que ambos os sistemas tenham eixos z coincidentes, isto é, os eixos $\bar{z}$ são todos paralelos ao eixo global z. Então, o sistema local orienta-se em relação ao global por uma rotação dos eixos (x, y) em torno do eixo z, através de um ângulo θ medido a partir do

eixo x, como mostrado na Figura 15.8. Deve-se enfatizar que o sinal positivo de θ é para o ângulo medido de forma anti-horária a partir do eixo global x, até o eixo local $\bar{x}$.

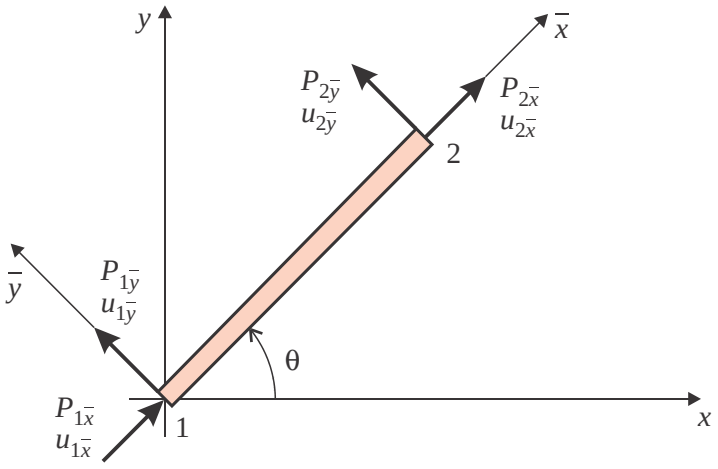


Figura 15.8: Barra com orientação arbitrária no plano xy.

Nota-se na Figura 15.7 a distinção entre os nos locais de cada elemento e os nós globais da estrutura. Por exemplo, no nó global 4 estão montados diversos elementos. Quando se aplica um corte nos elementos a uma distância infinitesimalmente próxima do nó global, as seções de corte em cada elemento são os chamados nós locais do elemento. Esses nós locais são aqueles denominados nós 1 e 2, ou I e J de cada elemento. Na figura estão indicados os nós locais 1 e 2 do elemento e, que correspondem aos nós globais 4 e 7, respectivamente. O diagrama de corpo livre para um corte em torno do nó 4 é mostrado na Figura 15.7, identificando as faces de corte do lado do nó global e na extremidade 1 do elemento e.

Seja um elemento de barra com propriedades geométricas e físicas conhecidas, orientada na direção de um eixo local $\bar{x}$. Os deslocamentos e os esforços associados aos nós 1 e 2, em relação ao sistema local de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, são ilustrados na Figura 15.9 e são representados nos seguintes arranjos:

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_{1\overline{x}} \\ P_{1\overline{y}} \\ P_{2\overline{x}} \\ P_{2\overline{y}} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{onde } P_{1\overline{y}} = P_{2\overline{y}} = 0. \tag{15.37}$$

Nota-se que cada nó pode ter componentes de deslocamentos na direção axial $u_{1\overline{x}}$ e na direção transversal, $v_{1\overline{y}}$. Entretanto, uma barra, por definição, só suporta esforços na sua direção axial, $P_{1\overline{x}}$. Em (15.37) as componentes transversais $P_{1\overline{y}}$ e $P_{2\overline{y}}$ foram incluídas apenas para permitir uma representação completa das componentes dos vetores força interna em cada nó, de forma a permitir as operações que se seguem. Entretanto, essas componentes são incluídas com o conhecimento que são nulas.

A Figura 15.9 ilustra como as componentes dos deslocamentos e dos esforços no sistema de coordenadas local $(\overline{x}, \overline{y})$ se decompõem no sistema de coordenadas global (x, y) .As relações entre as componentes nos dois sistemas de coordenadas podem ser colocadas em forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} P_{1\overline{x}} \\ P_{1\overline{y}} \\ P_{2\overline{x}} \\ P_{2\overline{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen }\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen }\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen }\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix}, \tag{15.38}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen }\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen }\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen }\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \tag{15.39}$$

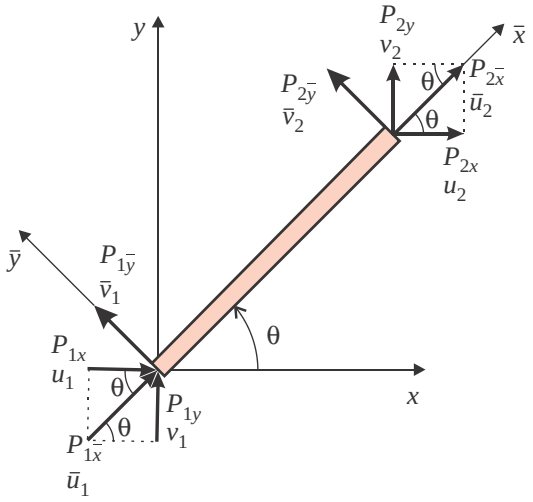


Figura 15.9: Componentes de forças e deslocamentos nodais nos dois sistemas de coordenadas.

As equações (15.38) e (15.39) podem ser representadas simbolicamente por:

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\mathbf{P}, \tag{15.40}$$

onde $\mathbf{T}$ é a **matriz de transformação** para a rotação entre os sistemas de coordenadas.

O sistema de equações de equilíbrio para o elemento de barra mostrado em (15.29) ou (15.36) é reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{1\bar{x}} \\ P_{2\bar{x}} \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{array} \right\}. \tag{15.41}$$

Esse sistema de equações pode ser adaptado para a barra no sistema de coordenadas local $(\overline{x}, \overline{y})$ de orientação arbitrária, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} = 0 \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} = 0 \end{array} \right\} = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{array} \right\}, \tag{15.42}$$

ou

$$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{u}}. \tag{15.43}$$

Essa é a equação de equilíbrio do elemento, nas direções locais. Ela pode ser transformada para as direções globais usando as relações (15.40):

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{P}} &= \overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{T}\mathbf{P} &= \overline{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{15.44}$$

Observa-se que a matriz $\mathbf{T}$ é ortogonal, i.e., $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$. Logo, sua inversa é igual a sua transposta, i.e., $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$. Então, pré-multiplicando (15.44) por $\mathbf{T}^T$ obtém-se

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}\mathbf{T}\right)\mathbf{u}, \tag{15.45}$$

ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}^{\mathbf{e}}\mathbf{u}, \quad \text{com } \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}\mathbf{T}. \tag{15.46}$$

Uma vez que as matrizes $\overline{\mathbf{K}}$ e $\mathbf{T}$ são bastante esparsas, é possível obter uma forma explícita para a rigidez do elemento e:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}\mathbf{T} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\ \text{sen}\ \theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\ \text{sen}\ \theta \\ \cos\theta\ \text{sen}\ \theta & \text{sen}^2\theta & -\cos\theta\ \text{sen}\ \theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\ \text{sen}\ \theta & \cos^2\theta & \cos\theta\ \text{sen}\ \theta \\ -\cos\theta\ \text{sen}\ \theta & -\text{sen}^2\theta & \cos\theta\ \text{sen}\ \theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}. \quad (15.47)$$

Essa é a **matriz de rigidez para um elemento finito de barra**, em relação ao sistema global de coordenadas (x, y, z), com orientação arbitrária no plano (x, y), como mostrado na Figura 15.8.

15.3 Matriz de rigidez de um sistema de barras

Nas seções anteriores obtivemos a matriz de rigidez para um elemento de barra isolado. Entretanto, as situações de interesse em engenharia são aquelas de análise de estruturas construídas por muitas barras, como na treliça ilustrada na Figura 15.7. Nesse caso, cada barra possui uma orientação distinta das demais e um sistema local de coordenadas próprio. Diferentes barras serão conectadas entre si através de um nó em comum. Tornam-se mais importantes os conceitos de **nó global da estrutura e nó local de cada barra**.

O **nó local** é aquele que define a extremidade de cada uma das barras, e é usado para identificar a matriz, os esforços e os graus de liberdade (deslocamentos nodais) do elemento. As extremidades dos diversos elementos conectam-se a um **nó global** da estrutura. Então, os nós locais das diversas barras conectadas a um ponto, sofrem deslocamentos idênticos, iguais aos deslocamentos do nó global. Esses conceitos serão melhor detalhados em conexão à Figura 15.7, onde identificam-se, por exemplo, o nó global 4, ao qual se conectam diversos elementos. Ali chega o nó local 1 do elemento e. Quanto às forças, cada barra contribuirá com uma parcela de **força interna (esforço)**, transmitida pelo seu nó local, que é aplicada sobre o nó global. Também, cada barra contribui com a rigidez do sistema como um todo.

O objetivo da presente seção é mostrar todas as etapas principais de cálculo no método de elementos finitos. Principalmente, como as contribuições da rigidez de cada elemento é combinada de forma adequada, para gerar uma estimativa da rigidez da estrutura completa. As fases gerais de cálculo são as seguintes:

1. Fase de pré-processamento, com a leitura e geração dos dados necessários e visualização gráfica;
2. Fase de processamento, que inicia-se com o cálculo das matrizes elementares;
3. A determinação da **matriz de rigidez global** da estrutura (processo que é denominada **sobreposição de matrizes**);
4. Determinação do vetor de carregamento nodal global;
5. Imposição de condições de contorno de deslocamento na matriz global e no vetor força;
6. Solução do sistema algébrico;
7. Fase de pós-processamento, para o cálculo de esforços, deformações e tensões em cada elemento, e visualização gráfica dos resultados.

15.3.1 Fase de pré-processamento de dados

Para fins de ilustração, parte-se de uma treliça simples, aquela mostrada na Figura 15.10, composta de barras com idênticas propriedades geométricas e físicas (mesmos L, E, A). Cada nó e cada elemento é numerado, de forma arbitrária, porém unívoca. Uma única força F, horizontal, é aplicada ao nó 2 como mostrado.

Antes de se poder identificar corretamente os dados, é necessário definir um sistema global de coordenadas, $0xyz$, que no presente exemplo foi ancorado no nó 1, como na Figura 15.11. Essa figura identifica também os valores de deslocamentos nodais globais. Como se tem um problema plano, cada nó *no* pode deslocar-se no plano, e possui duas componentes nas direções globais, os dois **graus de liberdade**, g.l., designados como u_{no} e v_{no}. Definindo o número total de nós do modelo como $Nnos$, tem-se que o número de graus de liberdade do modelo é $N = 2Nnos$ num problema plano (seria $3Nnos$ num problema tridimensional). No presente exemplo, $N = 6$ g.l.

Associado a cada grau de liberdade, existe uma força nodal: atuando no nó *no*, são componentes F_{nox} e F_{noy}, como ilustrado na Figura 15.11. Essas são forças aplicada na estrutura, e podem ser constituídas por duas partes:

1. Forças aplicadas, que designaremos como F^a_{nox} e F^a_{noy}, que são forças conhecidas aplicadas sobre os nós.

2. Reações nos apoios, R_{nox} e R_{noy}. São forças incógnitas aplicadas na estrutura pela sua base de sustentação.

Então, em geral, se tem que em cada nó são aplicadas as forças

$$F_{nox} = F^a_{nox} + R_{nox} \qquad \text{e} \qquad F_{noy} = F^a_{noy} + R_{noy}. \tag{15.48}$$

Uma componente de reação será nula se o nó for livre para se mover naquela direção, i.e., se o nó não possui condição de contorno de deslocamento que restrinja aquele movimento. Por exemplo, na Figura 15.10, o nó 2 é livre na direção x, o que significa $R_{2x} = 0$. Ainda no nó 2, nenhuma força conhecida foi aplicada na direção y, de forma que $F^a_{2y} = 0$, e a única força y atuante no nó é R_{noy}, incógnita. Já na direção x, existe uma força conhecida $F^a_{2x} = F$ aplicada. A Figura 15.11 indica todas as componentes de forças nodais, quer sejam nulas ou não.

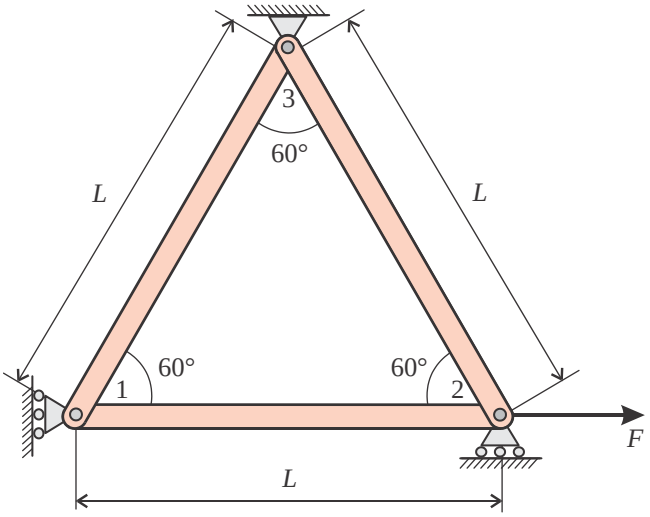


Figura 15.10: Estrutura constituída por três elementos de barra.

ETAPA 1 - Leitura de dados

Qualquer programa de elementos finitos, tanto os programas simples quanto os grandes programas comerciais, organizam seus dados em alguns grupos padrão. A seguir são indicados os principais grupos de dados usados.

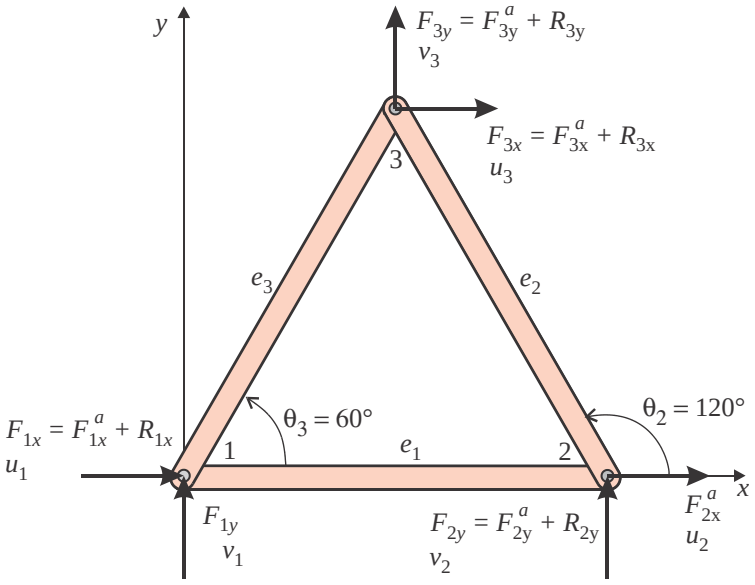


Figura 15.11: Forças e deslocamentos nodais na estrutura.

Etapa 1.1 - Dados de coordenadas nodais

Nó	x	y
1	0	0
2	L	0
3	$L/2$	$\sqrt{3}L/2$

Observação 1 - Note que, como o MEF é um método numérico, são tratados apenas dados numéricos, isto é, em vez de L, deve-se especificar, por exemplo, 200. Aqui deixamos os dados em forma literal apenas para facilitar a visualização das operações realizadas.

Observação 2 - Num programa de EF não se informa as dimensões do corpo (comprimentos, larguras, etc.), apenas os valores das coordenadas nodais são informados. Essas informações, junto aos dados de conectividade dos elementos, vistos a seguir, são suficientes para que o programa tenha a **representação de qualquer formato de geometria**, e determine qualquer dimensão que se torne necessária.

Etapa 1.2 - Dados de conectividade dos elementos

Os dados de conectividade indicam os nós globais N_I e N_J que definem cada um dos elementos. No exemplo tem-se

Elemento	Nó I	Nó J
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Observação 3 - Em cada elemento, a escolha de qual nó será o nó I e qual o nó J é arbitrária, isto é, o elemento 2 poderia ser definido com nós (I,J) = (2,3) ou por (3,2). Entretanto, embora a escolha seja arbitrária, a ordem dos valores calculados durante a solução será distinta, tanto quanto diversos detalhes como orientações de forças e deslocamentos no elemento.

Etapa 1.3 - Propriedades geométricas e de material

Essas propriedades são indicadas para cada elemento. Como o elemento finito sendo tratado é o de barra, as únicas propriedades necessárias são o módulo de elasticidade e a área da seção transversal da barra:

Elemento	E [MPa]	A [mm^2]
1	210.000	10
2	210.000	10
3	210.000	10

Observação 4 - Um programa computacional, em geral, não trata com **unidades**. Cabe ao usuário introduzir os dados em unidades coerentes.

Etapa 1.4 - Condições de contorno de deslocamento São informados ao programa os valores de deslocamentos nodais conhecidos. No presente exemplo, a Figura 15.11 indica a simbologia dos deslocamentos aplicadas nos nós, com as orientações definidas pelo sistema global de coordenadas arbitrado para o problema. Tem-se então os seguintes dados:

Nó	Componente de deslocamento	Valor prescrito
1	u_1	0
2	v_2	0
3	u_3	0
3	v_3	0

Etapa 1.5 - Dados de carregamento O MEF requer as informações dos valores das cargas externas conhecidas. Os valores das reações são obtidos pelo próprio método, ao final da sequência dos cálculos. Também, deve-se informar apenas as forças não nulas. Nós sem carga externa aplicada não precisam ser referidos, pois o método toma qualquer carga não informada como nula. Assim, os dados que devem ser informados são

Nó	Componente de força	Valor aplicado [N]
2	F^a_{2x}	$F = 300$

Todos os demais valores nodais de força são, ou nulos (como $F_{1y} = 0$), ou reações que serão determinadas pelo próprio método.

15.3.2 Fase de processamento

A fase de entrada de dados, normalmente, é feita iterativamente entre o engenheiro e o programa, numa fase denominada de **pré-processamento**. Uma vez esses dados tenham sido fornecidos ou gerados, o programa entra numa fase denominada **fase de processamento**, em que o programa trabalha de forma independente, sem interferência do engenheiro. A fase de processamento é composta de diversas etapas, que são detalhadas a seguir.

Etapa 1 - Cálculo das matrizes elementares

A matriz de rigidez para um elemento arbitrário e, no plano, é dado pela equação (15.47). Essa matriz é inteiramente determinada pelos valores de L_e, θ_e, E e A do elemento. Para um dado elemento e, o programa de elementos finitos pesquisa a matriz de **dados de conectividade** do elemento e identifica os nós globais I e J que definem o elemento. Em seguida, uma pesquisa na matriz de **dados de coordenadas** nodais identifica as coordenadas dos nós do elemento, (x_I,y_I) e (y_I,y_J). Essas coordenadas permitem o cálculo do comprimento e da inclinação do elemento em relação ao sistema de coordenadas global:

$$\begin{aligned} L_e &= \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2}, \\ \theta_e &= \arctan\left(\frac{y_J - y_I}{x_J - x_I}\right).^1 \end{aligned} \tag{15.49}$$

- **Elemento 1**. Obtém-se $L_1 = L$ e $\theta_1 = 0$. Então a eq. (15.47) torna-se

$$\begin{Bmatrix} P^1_{1x} \\ P^1_{1y} \\ P^1_{2x} \\ P^1_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \tag{15.50}$$

O sobrescrito 1 indica que os esforços são do elemento 1. (Obs.: o valor 4 foi incluído na matriz e no denominador por conveniência das próximas etapas, uma vez que, por motivos didáticos, estamos resolvendo o problema "a mão", de forma analítica.)

- **Elemento 2**. O comprimento e a orientação do eixo local $\bar{x}$ deste elemento em relação ao sistema de coordenadas global são obtidos pela eq. (15.49), o que resulta em $L_2 = L$ e $\theta_2 = 120°$.[2] Então, o sistema de equilíbrio do elemento 2 fica:

$$\begin{Bmatrix} P^2_{2x} \\ P^2_{2y} \\ P^2_{3x} \\ P^2_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \tag{15.51}$$

- **Elemento 3**. Para este elemento, $L_3 = L$ e $\theta_3 = 60°$, o que resulta na equação de equilíbrio

$$\begin{Bmatrix} P^3_{1x} \\ P^3_{1y} \\ P^3_{3x} \\ P^3_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \tag{15.52}$$

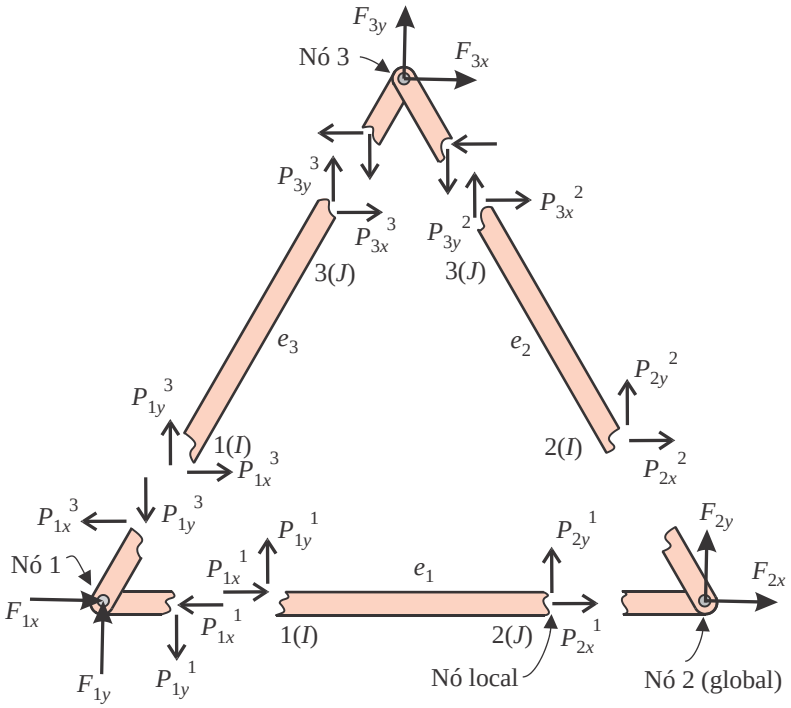


Figura 15.12: Equilíbrio nodal: esforços nodais nos elementos e forças nodais globais.

[2] Observe que a ordem dos nós globais na conectividade do elemento é essencial. Com a conectividade tendo sido definida como $(I, J) = (2, 3)$, se obteve o ângulo do sistema local do elemento igual a $\theta_2 = 120°$, como mostrado na Figura 15.11. Entretanto, se a conectividade do elemento tivesse sido gerada como $(I, J) = (3, 2)$, o ângulo a ser usado seria $\theta_2 = -60°$, e a origem do sistema local estaria no nó 3, com o eixo x apontando para o nó global 2.

Essas são as equações de equilíbrio de cada um dos elementos em termos das forças internas (os esforços) atuantes nos **nós locais** de cada elemento. Consideremos agora as forças atuantes em cada **nó global** da estrutura. Para isso, podemos construir um diagrama de corpo livre para cada nó global, como aquele ilustrado na Figura 15.12 para o nó 2. **O equilíbrio da estrutura implica o equilíbrio de cada nó**. Esse equilíbrio envolve todas as forças aplicadas sobre esse nó, isto é, tanto as forças internas associadas a cada barra concorrente no nó 2, (P^1_{2x}, P^1_{2y} do elemento 1, e P^2_{2x} e P^2_{2y} do elemento 2), quanto as forças externas, os carregamentos concentrados aplicados (F_{2x} e F_{2y}). Observando os diagramas de corpo livre na Figura 15.12, tem-se as equações de equilíbrio para o nó 2, por exemplo:

$$\text{nó 2} \qquad F_{2x} = P^1_{2x} + P^2_{2x} \qquad \text{e} \qquad F_{2y} = P^1_{2y} + P^2_{2y}. \tag{15.53}$$

E da mesma forma, para os nós globais 1 e 3, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{array}{lllll} \text{nó 1} & F_{1x} = P^1_{1x} + P^3_{1x} & \text{e} & F_{1y} = P^1_{1y} + P^3_{1y}. \\ \text{nó 3} & F_{3x} = P^2_{3x} + P^3_{3x} & \text{e} & F_{3y} = P^2_{3y} + P^3_{3y} \end{array} \tag{15.54}$$

Tem-se 6 equações de equilíbrio nodais. **De forma geral, para um sistema arbitrário** com $Nnos$ nós globais, e $Nglno$ graus de liberdade por nó (na treliça plana temos os graus de liberdade u e v, portanto $Nglno = 2$), o número de equações de equilíbrio será:

$$N = Nnos \times Nglno \tag{15.55}$$

Tem-se sempre que **o número de equações de equilíbrio é igual ao número de graus de liberdade do sistema**. No presente exemplo os graus de liberdade são: $\{u_1; v_1; u_2; v_2; u_3; v_3\}$, que são indicados na Figura 15.11.

As seis equações de equilíbrio do exemplo, eqs.(15.53) e (15.54), podem ser reorganizadas em forma matricial como:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P^1_{1x} + P^3_{1x} \\ P^1_{1y} + P^3_{1y} \\ P^1_{2x} + P^2_{2x} \\ P^1_{2y} + P^2_{2y} \\ P^2_{3x} + P^3_{3x} \\ P^2_{3y} + P^3_{3y} \end{array} \right\}. \tag{15.56}$$

Observa-se que as forças do lado direito são os esforços nodais nos elementos, e são dados em termos das matrizes de rigidez elementares e dos 6 deslocamentos nodais nas equações de equilíbrio dos elementos, eqs.(15.50)-(15.52). Então, substituindo essas equações em (15.56) teremos um sistema algébrico de equações de equilíbrio relacionando as forças externas aplicadas aos nós com os deslocamentos nodais da estrutura. Fazendo essa substituição, obtém-se o seguinte sistema.

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{array} \right\} = \frac{EA}{4L} \left[\begin{array}{cccccc} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}. \tag{15.57}$$

Este procedimento de determinação da matriz de rigidez global da treliça não é confortável, pois a manipulação das equações de equilíbrio dessa forma é inviável de ser automatizada de forma computacional. Existe outra maneira de construir a matriz de rigidez, denominada de sobreposição da matriz global. Este procedimento permite automatização do processo e é detalhado a seguir.

15.3.3 Etapa 2 - Sobreposição da matriz de rigidez global

Primeiramente, representamos as equações de equilíbrio dos elementos, eqs.(15.50)-(15.52), e o equilíbrio dos nós, eq.(15.56), em termos dos vetores força e deslocamentos de cada nó. As **equações dos elementos** tomam a forma:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_1^1 \\ \mathbf{P}_2^1 \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{11}^1 & \mathbf{k}_{12}^1 \\ \mathbf{k}_{21}^1 & \mathbf{k}_{22}^1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{array} \right\}, \\
\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_2^2 \\ \mathbf{P}_3^2 \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{22}^2 & \mathbf{k}_{23}^2 \\ \mathbf{k}_{32}^2 & \mathbf{k}_{33}^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{array} \right\}, \\
\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_1^3 \\ \mathbf{P}_3^3 \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{11}^3 & \mathbf{k}_{13}^3 \\ \mathbf{k}_{31}^3 & \mathbf{k}_{33}^3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 \end{array} \right\},
\end{aligned} \tag{15.58}$$

em forma compacta, as equações de **equilíbrio dos nós** ficam:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_1^1 + \mathbf{P}_1^3 \\ \mathbf{P}_2^1 + \mathbf{P}_2^2 \\ \mathbf{P}_3^2 + \mathbf{P}_3^3 \end{array} \right\}. \tag{15.59}$$

A notação é tal que vetores como $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{P}_2^3$, por exemplo, são definidos, de acordo com (15.50), por

$$\mathbf{u}_1 = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \end{array} \right\} \qquad \mathbf{P}_2^3 = \left\{ \begin{array}{c} P_{2x}^3 \\ P_{2y}^3 \end{array} \right\}$$

As definições dos vetores de forças nodais globais são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= \left\{ \begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{F}_2 = \left\{ \begin{array}{c} F_{2x} \\ F_{2y} \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{F}_3 = \left\{ \begin{array}{c} F_{3x} \\ F_{3y} \end{array} \right\}, \\
\mathbf{u}_1 &= \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{u}_3 = \left\{ \begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{15.60}$$

A submatriz de rigidez $\mathbf{k}_{12}^1$, por exemplo, é a submatriz de (15.50) dada por:

$$\mathbf{k}_{12}^1 = \frac{EA}{4L} \left[\begin{array}{cc} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \qquad \text{etc.,} \tag{15.61}$$

conforme comparação entre as eqs. (15.58) e (15.50)-(15.52).

Com essas definições, as equações de equilíbrio dos nós (15.59) podem ser reescritas usando as forças nos elementos, de (15.58):

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_1^1 + \mathbf{P}_1^3 \\ \mathbf{P}_2^1 + \mathbf{P}_2^2 \\ \mathbf{P}_3^2 + \mathbf{P}_3^3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_{11}^1 + \underbrace{\mathbf{k}_{11}^3} & \mathbf{k}_{12}^1 & \overbrace{\mathbf{k}_{13}^3} \\ \mathbf{k}_{21}^1 & \mathbf{k}_{22}^1 + \overbrace{\mathbf{k}_{22}^2} & \mathbf{k}_{23}^2 \\ \underbrace{\mathbf{k}_{31}^3} & \overbrace{\mathbf{k}_{32}^2} & \mathbf{k}_{33}^2 + \underbrace{\mathbf{k}_{33}^3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{array} \right\}. \tag{15.62}$$

Indicamos os termos provenientes dos elementos 2 e 3 por $\overbrace{\ }$ e $\underbrace{\ }$, respectivamente, e os termos não assinalados vem do elemento 1. A análise da matriz de rigidez global (15.62) permite identificar um procedimento automático de forma-la.

1) Inicialmente o programa define uma área para a matriz de rigidez global, inicialmente nula:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_1\\ \mathbf{F}_2\\ \mathbf{F}_3\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{array}\right\};\tag{15.63}$$

No caso, cada termo $\mathbf{0}$ é uma submatriz de dimensões 2×2.
2) Em seguida a matriz de rigidez do elemento 1 é calculada, como em (15.50), e em seguida é **sobreposta** na matriz global. Isto é feito simplesmente identificando, na matriz de conectividade dos elementos, os nós que definem o elemento 1, que nesse caso são os nós globais 1 e 2. Então, as submatrizes do elemento 1 são adicionadas aos termos da matriz global associadas aos nós 1 e 2, isto é:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_1\\ \mathbf{F}_2\\ \mathbf{F}_3\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{k}^1_{11}&\mathbf{k}^1_{12}&\mathbf{0}\\ \mathbf{k}^1_{21}&\mathbf{k}^1_{22}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{array}\right\}.\tag{15.64}$$

3) Em seguida a matriz de rigidez do elemento 2 é calculada, como em (15.51), e em seguida é **sobreposta** na matriz global. Identifica-se, na matriz de conectividade dos elementos, os nós que definem o elemento 2, que nesse caso são os nós globais 2 e 3. Então, as submatrizes do elemento 2 são adicionadas aos termos da matriz global associadas aos nós 2 e 3, isto é:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_1\\ \mathbf{F}_2\\ \mathbf{F}_3\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{k}^1_{11}&\mathbf{k}^1_{12}&\mathbf{0}\\ \mathbf{k}^1_{21}&\mathbf{k}^1_{22}+\overbrace{\mathbf{k}^2_{22}}&\overbrace{\mathbf{k}^2_{23}}\\ \mathbf{0}&\underbrace{\mathbf{k}^2_{32}}&\underbrace{\mathbf{k}^2_{33}}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{array}\right\}.$$

4) O processo segue até o último elemento. No presente exemplo, a matriz de rigidez do elemento 3 é calculada em (15.52). Identifica-se, na matriz de conectividade dos elementos, os nós que definem o elemento 3, que nesse caso são os nós globais 1 e 3. Então, as submatrizes do elemento 3 são adicionadas aos termos da matriz global associados aos nós 1 e 3. Essa operação leva a matriz de rigidez global à sua forma final, mostrada na eq.(15.62), que uma vez expandido, leva à forma explícita mostrada em (15.62), i.e., o **sistema algébrico de equações de equilíbrio** da estrutura fica:

$$\left\{\begin{array}{c}F_{1x}\\ F_{1y}\\ F_{2x}\\ F_{2y}\\ F_{3x}\\ F_{3y}\end{array}\right\}=\frac{EA}{4L}\left[\begin{array}{cccccc}5&\sqrt{3}&-4&0&-1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&3&0&0&-\sqrt{3}&-3\\ -4&0&5&-\sqrt{3}&-1&\sqrt{3}\\ 0&0&-\sqrt{3}&3&\sqrt{3}&-3\\ -1&-\sqrt{3}&-1&\sqrt{3}&2&0\\ -\sqrt{3}&-3&\sqrt{3}&-3&0&6\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{array}\right\},\tag{15.65}$$

e em forma simbólica, toma a forma

$$\left\{\begin{array}{c}F_{1x}\\ F_{1y}\\ F_{2x}\\ F_{2y}\\ F_{3x}\\ F_{3y}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccc}k_{11}&k_{12}&k_{13}&k_{14}&k_{15}&k_{16}\\ &k_{22}&k_{23}&k_{24}&k_{25}&k_{26}\\ &&k_{33}&k_{34}&k_{35}&k_{36}\\ &&&k_{44}&k_{45}&k_{46}\\ &&&&k_{55}&k_{56}\\ sim.&&&&&k_{66}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{array}\right\},\ \text{ou simplemente } \mathbf{KU}=\mathbf{F}.\tag{15.66}$$

O termo "*sim*" significa "simétrica".

15.3.4 Etapa 3- Definição do vetor de carregamento nodal

A cada nó da estrutura é possível aplicar uma força, em cada direção, mesmo nos nós que estejam vinculados. O vetor de forças nodais atuantes na estrutura pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} \tag{15.67}$$

$\mathbf{F}^a$ é o vetor que contém as forças aplicadas conhecidas. No presente exemplo, elas são as seguintes:

$$\mathbf{F}^a = \left\{ \begin{array}{c} F^a_{1x} \\ F^a_{1y} \\ F^a_{2x} \\ F^a_{2y} \\ F^a_{3x} \\ F^a_{3y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ F = 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{15.68}$$

No exemplo, a única força aplicada não nula é $F^a_{2x} = F = 300$ N, no nó 2, na direção x.

Além das forças conhecidas, atuam em alguns nós as **forças de reação R**, nos graus de liberdade com deslocamento prescrito, i.e., somente nos nós vinculados à base, naquelas direções em que o movimento tenha sido restringido. Assim, no exemplo, tem-se

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array} \right\} \tag{15.69}$$

Então o vetor forças nodais aplicado na estrutura é

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ 0 \\ F \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array} \right\} \tag{15.70}$$

15.3.5 Etapa 4 - Aplicações das condições de contorno

Prova-se que a matriz de rigidez do sistema global, $\mathbf{K}$, é singular, isto é, não pode ser invertida, e não permite determinar a solução $\mathbf{U}$ do problema algébrico $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$. De fato, $\mathbf{K}$ representa a rigidez da estrutura, como uma propriedade intrínseca dela, como se fosse sua massa. Assim, é como se ela estivesse solta no espaço. Nesse ponto dos cálculos, não foi incorporada nenhuma informação sobre a forma como a estrutura está fixada. Dessa forma ela não pode suportar forças resultantes.

Por outro lado, prova-se que se forem incorporadas ao sistema algébrico informações de condições de contorno, em quantidade e tipos suficientes para restringir todos os **movimentos de corpo rígido** da estrutura, a matriz torna-se não singular e o sistema algébrico pode ser resolvido.

O sistema do exemplo tem 6 equações e apenas 2 incógnitas de deslocamentos nodais, v_1 e u_2. Uma vez que os demais deslocamentos nodais foram prescritos como condições de contorno eles não são incógnitas, mas valores conhecidos. Por outro lado, as 4 equações (linhas) que contém reações (que são incógnitas) não podem ser usadas nesse ponto e podem ser ignoradas na etapa de determinação dos deslocamentos. O sistema tem, inicialmente, a seguinte forma:

$$\mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ 0 \\ F = 300 \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ sim. & & & & & k_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = ? \\ u_2 = ? \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\}. \tag{15.71}$$

Observação 5: Nesse ponto a única coisa com valores definidos na memória do computador é a matriz de rigidez, e o vetor de forças aplicada, $\mathbf{F}^a$, conforme (15.68). $\mathbf{R}$ e $\mathbf{U}$ são apenas áreas de memória alocadas, com dimensão 6, e zeradas. A representação que mostramos do vetor $\mathbf{U}$ em (15.71), com a notação $u_1 = 0$, $v_2 = 0$, etc., não significa que tenhamos incorporado qualquer informação de condição de contorno ao sistema: é apenas uma representação visual para o leitor humano, não tem nenhuma significação computacional. A matriz continua singular como antes, e o sistema continua não resolvível.

Observação 6: Nesse ponto o leitor pode ser tentado a observar que o sistema (15.71) tem, de fato, $N = 6$ incógnitas, sendo 2 deslocamentos e 4 reações. Isso sempre ocorrerá: a soma dos deslocamentos incógnitos mais as reações sempre é igual ao número de equações. Assim, se pode obter a solução completa, usando o processo de substituir uma equação na outra, de forma manual. Entretanto, um procedimento desse tipo é, do ponto de vista prático, impossível. Um sistema usual de modelo de elementos finitos conta com centenas de milhares de graus de liberdade, o que torna impossível o método manual. Assim, o procedimento usado é diferente, adequado à automação computacional.

De maneira reduzida, o procedimento correto consiste de duas etapas:

1. Incorporação das condições de contorno, o que gera um sistema algébrico modificado, $\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$, em que a matriz de rigidez modificada, $\bar{\mathbf{K}}$, representa a rigidez da estrutura em sua condição vinculada. Essa matriz é não singular, e o sistema pode ser resolvido para $\mathbf{U}$.

2. Em seguida, com $\mathbf{U}$ completamente determinado, as reações $\mathbf{R}$ são determinadas.

Esse procedimento é detalhado a seguir. Primeiramente, observamos em (15.71) que, para o cálculo dos deslocamentos incógnitos, precisamos apenas duas equações, a segunda e terceira do sistema, que toma a forma:

$$\begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = ? \\ u_2 = ? \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = 0 \\ F_{2x} = F \end{Bmatrix}.$$

As colunas da matriz que são multiplicadas por zero podem ser eliminadas, resultando um **sistema algébrico reduzido** na forma:

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad \text{i.e.,} \quad \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}. \tag{15.72}$$

A matriz agora é **não singular**, e o sistema algébrico pode ser resolvido para os deslocamentos incógnitos:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{4L}{EA} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad \text{i.e.,} \quad \left| \begin{array}{l} v_1 = 0, \\ u_2 = \dfrac{4}{5}\dfrac{L}{EA}F. \end{array} \right. \tag{15.73}$$

Observação 7 - Normalmente, a solução do sistema algébrico em MEF é feita por um dos métodos padrão, tipicamente o método de Gauss (ou sua adaptação a matrizes simétricas, denominado método de Choleski), ou o método dos gradientes conjugados.

Observação 8 - O detalhamento é feito aqui como se fosse executado por operações manuais. Isso é feito apenas para maior clareza de entendimento. Entretanto, deve-se ter em mente que o MEF é um método computacional, aplicável a problemas de milhares ou milhões de graus de liberdade. Assim, não são admitidos procedimentos que não sejam automatizáveis ou não sejam efetivos computacionalmente.

Etapa 5 - Etapa de imposição de condições de contorno e de carregamentos

Deve-se observar que o procedimento de imposição das condições de contorno ilustrado acima não é eficiente para ser realizado de forma automática em computação. Um dos procedimentos adequados é descrito a seguir, embora não seja, necessariamente o mais eficiente em termos de economia de memória ou de tempo de processamento. As etapas são as seguintes:

1) Geram-se áreas de memória para a nova matriz, $\bar{\mathbf{K}}$, e vetor força, $\bar{\mathbf{F}}$, de forma a gerar um sistema algébrico auxiliar $\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$. Inicializam-se essas áreas por: $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ e $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^a$:

2) Anulam-se as linhas da matriz $\bar{\mathbf{K}}$ e do vetor força $\bar{\mathbf{F}}$ que correspondam aos deslocamentos nulos, isto é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

3) Anulam-se as colunas matriz que correspondem aos deslocamentos nulos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F^a_{1y} \\ F^a_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

4) Introduz-se o valor 1 (de fato, qualquer valor é adequado) nos termos nulos da diagonal para evitar que a matriz se torne singular. Assim, o sistema algébrico auxiliar $\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$ toma a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Observe que esse sistema de equações é, de fato, idêntico ao sistema reduzido (15.72), e a solução obtida será idêntica:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4LF/(5EA) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{15.74}$$

15.3.6 Pós-processamento

Etapa 1 - Cálculo das reações nos apoios

Uma vez determinados os deslocamentos nodais incógnitos do problema, pode-se considerar novamente o sistema original $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, dado pela equação (15.71). Observe que nesse ponto da computação, o vetor de deslocamentos não mais é incógnito, como no início do problema. Assim, o sistema algébrico (15.71) pode ser reordenado como $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \mathbf{KU}$. O produto $\mathbf{KU}$ pode ser operado para gerar todas as forças nodais $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$. Então, o vetor de reações é obtido por:

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{KU} - \mathbf{F}^a} \tag{15.75}$$

No exemplo, tem-se

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4LF/(5EA) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{15.76}$$

o que resulta nas reações

$$\mathbf{R} = \frac{F}{5} \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}.$$

O produto $\mathbf{KU}$ produz o vetor força completo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$, que inclui tanto as forças aplicadas conhecidas quanto as reações nos apoios:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = R_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} = R_{2y} \\ F_{3x} = R_{3x} \\ F_{3y} = R_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{F}{5} \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}. \tag{15.77}$$

Observação 9 - Observe no sistema (15.76) que os valores das forças F_{1y} e F_{2x} são, a priori, conhecidas, uma vez que são parte do carregamento prescrito na estrutura. Os demais valores de forças nodais são reações incógnitas. Entretanto, o produto $\mathbf{KU}$ produz todas as componentes de forças, independentemente delas serem conhecidas ou não. As desconhecidas são as reações e as conhecidas devem ter valores idênticos aos valores prescritos, como se pode observar no exemplo, eq.(15.77).

Observação 10 - Observe que o procedimento acima não é computacionalmente eficiente do ponto de vista de economia de espaço de memória, uma vez que alocamos área para duas matrizes globais, $\mathbf{K}$ e $\bar{\mathbf{K}}$, ambas de mesmo tamanho. Ocorre que as matrizes típicas em elementos finitos podem ter ordens N desde 2 até algumas centenas de milhares, ou mesmo alguns milhões. Também é típico que o número N de graus de liberdade prescritos seja muito inferior à ordem N do sistema. A matriz $\mathbf{K}$, de fato, no exemplo atual, foi mantida intacta apenas para ser utilizada no cálculo das reações. Um procedimento mais eficiente consiste em utilizar área de memória para apenas uma matriz, $\mathbf{K}$, que é operada na aplicação das condições de contorno, isto é, zerando linhas e colunas, etc., até que, de fato, tenhamos na memória o conteúdo de $\bar{\mathbf{K}}$. Entretanto, antes de realizar essas operações, salvam-se, numa outra área de memória, apenas as linhas de $\mathbf{K}$ associadas aos graus de liberdade prescritos, isto é, as linhas correspondentes às reações que serão determinadas ao final do processo. Essa quantidade de linhas, N, tipicamente é pequena, tal que o dispêndio de memória não é crítico. No presente exemplo, com o uso dessas linhas, a operação de determinação das reações seria feita como em (15.76), porém sem as linhas 2 e 3.

Etapa 2 - Esforços, deformações e tensões nos elementos

O cálculo das tensões em cada elemento parte dos valores calculados dos deslocamentos em cada nó da treliça no sistema de coordenadas global. As etapas do procedimento são as seguintes.

Etapa 2.1 - Identificar no vetor global **U**, em (15.74), os termos correspondentes aos deslocamentos no elemento sendo processado. Esses deslocamentos estão nas direções globais. Para os elementos 1, 2 e 3 do exemplo, esses deslocamentos são:

$$\mathbf{u}^1 = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 4FL/(5EA) \\ 0 \end{array} \right\}, \qquad \mathbf{u}^2 = \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4FL/(5EA) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{u}^3 = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Etapa 2.2 - Para cada elemento, rotacionar as componentes dos deslocamentos nodais obtidos na Etapa 2.1, para o sistema local do elemento. Isso é feito através da equação (15.39), aplicada a cada elemento, como segue, para os elementos 1 a 3.

Elemento 1, $\theta_1 = 0°$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1^1 \\ \bar{v}_1^1 \\ \bar{u}_2^1 \\ \bar{v}_2^1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 4FL/(5EA) \\ v_2 = 0 \end{array} \right\}. \tag{15.78}$$

Cuja solução é:

$$\bar{u}_1^1 = 0, \qquad \bar{v}_1^1 = 0, \qquad \bar{u}_2^1 = \frac{4FL}{5EA}, \qquad \bar{v}_2^1 = 0.$$

Elemento 2, $\theta_2 = 120°$

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_2^2 \\ \bar{v}_2^2 \\ \bar{u}_3^2 \\ \bar{v}_3^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 4FL/5EA \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\}. \tag{15.79}$$

$$\bar{u}_2^2 = -\frac{2FL}{5EA}, \qquad \bar{v}_2^2 = -\frac{2\sqrt{3}FL}{5EA}, \qquad \bar{u}_3^2 = 0, \qquad \bar{v}_3^2 = 0.$$

Elemento 3, $\theta_3 = 60°$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_1^3 \\ \bar{v}_1^3 \\ \bar{u}_3^3 \\ \bar{v}_3^3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\}. \tag{15.80}$$

$$\bar{u}_1^3 = 0, \qquad \bar{v}_1^3 = 0, \qquad \bar{u}_3^3 = 0, \qquad \bar{u}_3^3 = 0.$$

Note que em cada elemento, as componentes $\bar{u}_{no}^e$ são axiais e $\bar{v}_{no}^e$ são transversais ao elemento. Assim, apenas as componentes axiais são importantes no cálculo da deformação e tensão em cada elemento.

Etapa 2.3 - Em cada elemento, tomar os deslocamentos axiais calculados acima, e calcular as **deformações**, **tensões** e **esforços**.

Elemento 1

Da equação (15.9), a deformação normal axial em qualquer ponto do elemento é dada por:

$$\varepsilon^1_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{u}^1_2 - \bar{u}^1_1}{L} = \frac{\frac{4FL}{5EA} - 0}{L} = \frac{4F}{5EA}. \tag{15.81}$$

Com o auxílio da Lei de Hooke, a tensão normal na direção axial dessa barra é dada por:

$$\sigma^1_{\bar{x}\bar{x}} = E\varepsilon^1_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{4F}{5A}. \tag{15.82}$$

E o esforço axial N^1_x na barra é:

$$\sigma^1_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{N^1_x}{A} = \frac{4F}{5A} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{N^1_{\bar{x}} = \frac{4}{5}F \quad \Longrightarrow \quad \text{tração.}} \tag{15.83}$$

Elemento 2

Novamente, da equação (15.9), a deformação é dada por:

$$\varepsilon^2_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{u}^2_3 - \bar{u}^2_2}{L} = \frac{0 - \left(-\frac{2}{5}\frac{FL}{EA}\right)}{L} = \frac{2}{5}\frac{F}{EA}. \tag{15.84}$$

A tensão é dada por:

$$\sigma^2_{\bar{x}\bar{x}} = E\varepsilon^2_{xx} = \frac{2}{5}\frac{F}{A}, \tag{15.85}$$

e a esforço normal, N^2_x, é dado por:

$$\sigma^2_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{N^2_x}{A} = \frac{2}{5}\frac{F}{EA} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{N^2_{\bar{x}} = \frac{2}{5}F \qquad \Longrightarrow \qquad \text{tração.}} \tag{15.86}$$

Elemento 3)

A deformação é dada por:

$$\varepsilon^1_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{u}^3_3 - \bar{u}^3_1}{L} = 0, \tag{15.87}$$

logo,

$$\sigma^3_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \qquad \text{e} \qquad N^3_{\bar{x}} = 0. \tag{15.88}$$

Observa-se que, como não há nenhuma barra submetida ao esforço normal de compressão, não há necessidade de verificar o problema de flambagem para a estrutura.

15.4 Exercícios

Para cada um dos problemas determine os seguintes itens:

A - Matriz de rigidez de cada elemento.

B - Sobreponha as matrizes elementares e obtenha a matriz de rigidez global, mostrando o procedimento da sobreposição do elemento 1.

C - Identifique e aplique no sistema as condições de contorno, de compatibilidade e as forças nodais aplicadas.

D - Obtenha os deslocamentos nodais.

E - Indique o processo de cálculo das reações nos apoios e faça sua determinação.

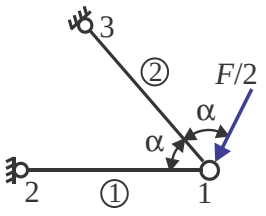
F - Determine dos esforços e tensões em cada elemento e mostre o detalhamento para o elemento 1.

G - Faça análise de falha por início de escoamento.

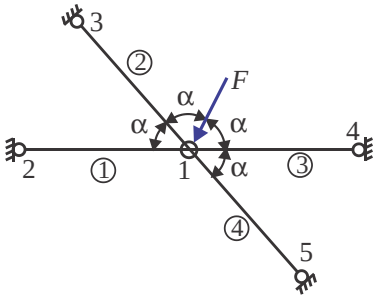
Dica - para apoios deslizantes inclinados, use uma das opções:
(a) use um sistema de coordenadas globais com origem no nó deslisante, com um dos eixos orientados na direção perpendicular ao apoio; ou
(b) imponha a condição de deslizamento aplicando na matriz de rigidez a condição: $u_y = u_x \operatorname{tg}\gamma$, onde γ é a inclinação do apoio em relação ao eixo x.

Faça todos os detalhes de forma similar aos exemplos do capítulo. Considere todas as barras com seção retangular de A =10×10 mm^2. Onde indicado, $E = 200$ GPa, $L = 1$ m, $F = 1$ kN, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$. Use condição de simetria, quando possível, para simplificar a análise. Em cada elemento enumere os nós locais em ordem crescente da numeração global.

15.1

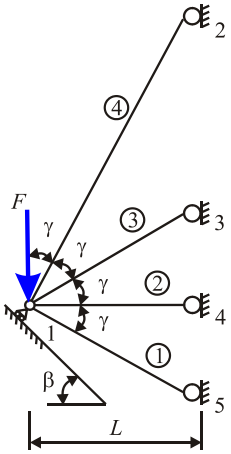


15.2 Dica: A solução pode ser simplificada utilizando uma condição de simetria e definindo os eixos cartesianos com origem no nó 1 e um dos eixos na direção da força.



15.3 Resolva o Exercício 15.1 aplicando em lugar de F, um deslocamento prescrito $\delta = 1,0$ mm na mesma direção. Além dos itens A-G, determine a força necessária no nó 1.

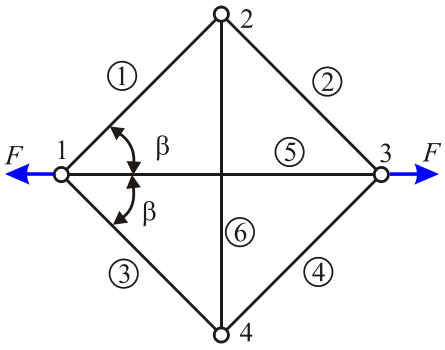
15.4 A barra 1 tem comprimento L. O apoio no nó 1 é deslizante. Calcule também a resultante normal da reação no nó 1.



15.5 Resolva o Exercício 15.4 para $\beta = 60°$.

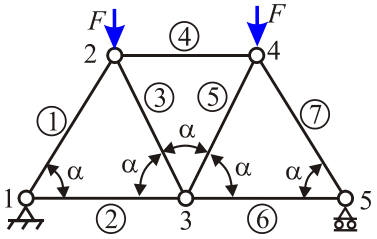
15.6 As barras 5 e 6 tem comprimento L. Observe que a estrutura está desvinculada, o que significa que condições de contorno devem ser arbitradas. Entretanto essas condições devem resultar no mesmo estado de tensões que a estrutura teria quando solta no espaço. As barras 5 e 6 não são unidas entre

si.



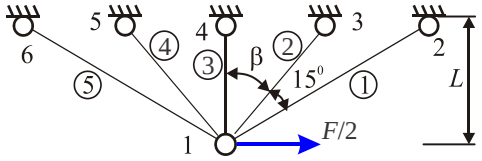
15.7 Resolva o Exercício 15.6 sem o elemento 5.

15.8



15.9 Resolva o Exercício 15.6 para o caso em que, em vez de aplicadas as forças F, é aplicado deslocamento vertical de valor $d = 1$ mm, no nó 3. Além dos itens A-G, determine a força necessária no nó 3.

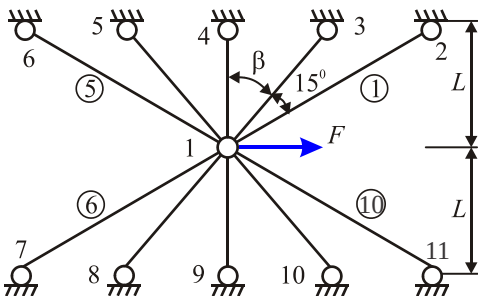
15.10



15.11 Resolva o Exercício 15.10 para o caso em que não existam as barras 1, 2 e 3.

15.12 Resolva o Exercício 15.10 para o caso em que não existam as barras 2, 3 e 4.

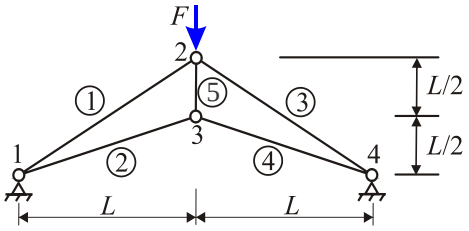
15.13 Dica: A solução pode ser simplificada aplicando uma condição de simetria.



15.14 Resolva o Exercício 15.13 para o caso em que não existam as barras 1 a 3 e 8 a 10.

15.15 Resolva o Exercício 15.13 para o caso em que não existam as barras 2 a 4 e 7 a 9.

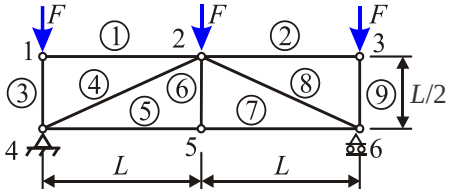
15.16



15.17 Resolva o Exercício 15.16 para o caso em que a força F seja aplicada no nó 3.

15.18 Resolva o Exercício 15.16 para o caso em que, em vez da força F, seja aplicado um deslocamento vertical de valor $d = 1$ mm no nó 2. Além dos itens A-G, determine a força necessária no nó 3.

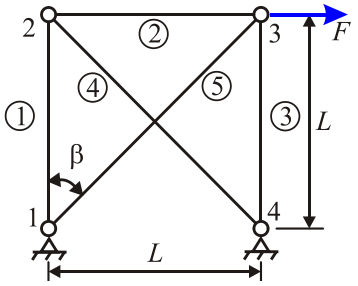
15.19



15.20 Resolva o Exercício 15.19 para o caso em que não existam as barras 1, 2, 3 e 9, com força apenas no nó 2.

15.21 Resolva o Exercício 15.19 para o caso em que existam apenas as barras 4, 5, 7 e 8. Faça as modificações necessárias nas rótulas internas para evitar singularidade da matriz.

15.22 As barras 4 e 5 não são unidas entre si.

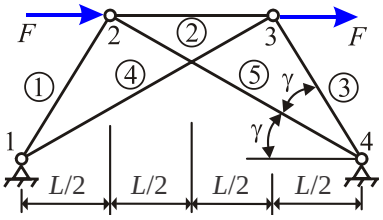


15.23 Resolva o Exercício 15.22 para o caso em que a força F seja aplicada no nó 2 em vez do nó 3.

15.24 Resolva o Exercício 15.22 para o caso em que não exista a barra 5.

15.25 No Exercício 15.22, em vez da força F, é aplicado um deslocamento de valor $d = 0,1$ mm na direção horizontal, nos nós 2 e 3. Qual a força necessária nesses nós?

15.26 As barras 4 e 5 não são conectadas entre si.

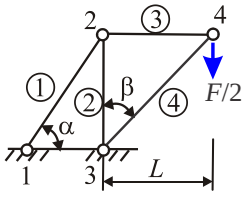


15.27 Resolva o Exercício 15.26 para o caso em que seja aplicada apenas uma força F no nó 2.

15.28 Resolva o Exercício 15.26 para o caso em que não exista a barra 5.

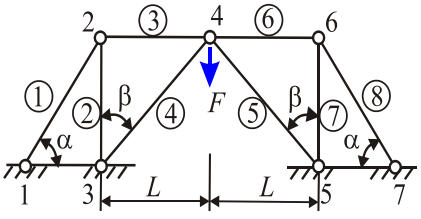
15.29 No Exercício 15.26, em vez das duas forças F, são aplicados nos nós 2 e 3 apenas deslocamentos horizontais de valor $d = 1$ mm. Qual a força necessária nesses nós?

15.30



15.31 No Exercício 15.30, em vez da força F, é aplicado um deslocamento de valor $d = 1$ mm na direção vertical, no nó 4. Qual a força necessária nesse nó?

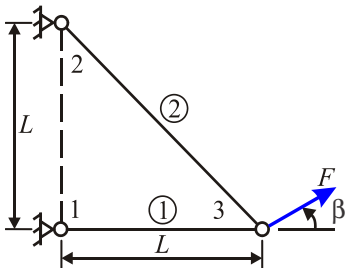
15.32 Dica: A solução pode ser simplificada aplicando uma condição de simetria.



15.33 Resolva o Exercício 15.32 para o caso em que não existam am barram 1 e 8.

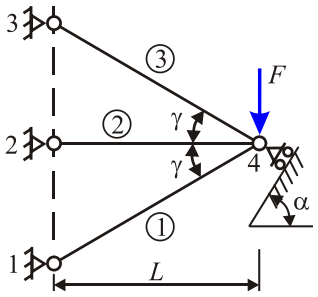
15.34 No Exercício 15.32, em vez da força F, é aplicado um deslocamento vertical de valor $d = 1$ mm no nó 4. Qual a força necessária nesse nó?

15.35 As barras 1 e 2 tem áreas de seção transversal A e $\sqrt{2}A$, respectivamente.

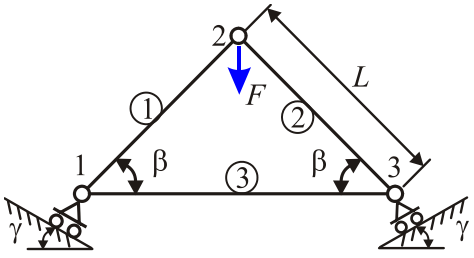


15.36 No Exercício 15.35, em vez da força F, é aplicado um deslocamento de valor $d = 1$ mm na direção horizontal, no nó 3. Qual a força necessária nesse nó?

15.37 Obtenha também a resultante da reação e do deslocamento no nó 4.



15.38 Dica: fixe o apoio 1.



15.39 Resolva o Exercício 15.38 para o caso em que $\gamma = 45°$.

Capítulo 16

Elementos finitos para vigas

A viga, tanto quanto a barra, é um dos elementos estruturais de formulação mais simples e mais utilizados em mecânica estrutural. O presente capítulo visa complementar alguns dos conceitos gerais do método de elementos finitos que não são vistos com clareza no âmbito da formulação de barras, como o conceito de funções de forma e carregamento distribuído. Utilizaremos ainda aqui o primeiro teorema de Castigliano para a dedução da equação de equilíbrio do elemento viga baseado no modelo cinemático de Euler-Bernoulli de vigas delgadas.

16.1 Funções de forma

Consideramos inicialmente uma viga reta de comprimento L, módulo de elasticidade E e de seção transversal prismática uniforme ao longo da extensão do elemento, representada pelo momento de inércia $I_{zz} = cte$, como mostrada na Figura 16.1. Consideramos o elemento definido por dois nós, 1 e 2 (ou I e J), **localizados nos centroides** das seções extremas. Definimos um sistema local de coordenadas $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ definido com origem no nó 1, com o eixo $\bar{x}$ orientado no sentido do nó 2, e os eixos transversais $\bar{y}$ e $\bar{z}$ nas **direções principais de inércia** da seção (ver seção 10.4.4, página 360 para detalhes sobre direções principais).

Consideramos que a única solicitação aplicada seja por esforços concentrados aplicados nas seções extremas, designadas como nós locais 1 e 2. Esses esforços são de momento fletor, $\bar{M}_{1z}$ e $\bar{M}_{2z}$, em cada nó, na direção $\bar{z}$, e esforços cortantes transversais $\bar{P}_{1y}$ e $\bar{P}_{2y}$. O sentido positivo desses esforços é como indicado na Figura 16.1, i.e., são positivos quando orientados no sentido positivo dos respectivos eixos, i.e., eixos $\bar{z}$ e $\bar{y}$ para momento e cortante, respectivamente. Isso se aplica para ambos os nós do elemento.

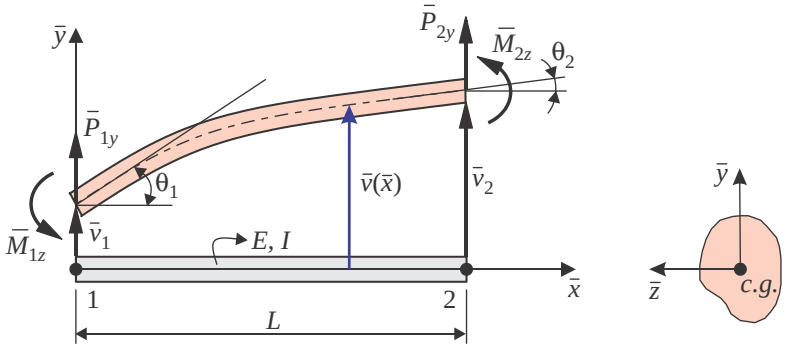


Figura 16.1: Elemento finito de viga, com deslocamentos e esforços nodais.

Como efeito desses esforços, o elemento sofre uma deflexão transversal descrita por uma função $\bar{v} = \bar{v}(\bar{x})$, i.e., o deslocamento transversal na seção de coordenada axial $\bar{x}$ é o valor $\bar{v}(\bar{x})$. Nesse ponto é necessário escolher um modelo cinemático de viga. Tomamos aqui o mesmo modelo usado nos Capítulos 8 e 12, o modelo de Euler-Bernoulli, adequado a vigas longas (delgadas). Dessa forma,

a curva elástica do elemento é a solução da equação diferencial de flexão, deduzida em (12.17), $EI_{zz}\overline{v}^{(4)} = p_y(\bar{x})$, onde $p_y(\bar{x})$ é a carga distribuída transversal, que no momento consideramos como nula no elemento. Assim, o deslocamento pode ser obtido por integração:

$$\begin{aligned} EI_{zz}\frac{d^4\overline{v}}{d\bar{x}^4} &= 0, \\ EI_{zz}\frac{d^3\overline{v}}{d\bar{x}^3} &= -V_y = C_1, \\ EI_{zz}\frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2} &= M_z = C_1\bar{x} + C_2, \\ EI_{zz}\frac{d\overline{v}}{d\bar{x}} &= EI_{zz}\theta = \frac{C_1}{2}\bar{x}^2 + C_2\bar{x} + C_3, \\ EI_{zz}\overline{v}\,(\bar{x}) &= \frac{C_1}{6}\bar{x}^3 + \frac{C_2}{2}\bar{x}^2 + C_3\bar{x} + C_4\ . \end{aligned} \tag{16.1}$$

Podemos agrupar e renomear as constantes, apresentando a equação da linha elástica na forma:

$$\overline{v}\,(\bar{x}) = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + a_3\bar{x}^3. \tag{16.2}$$

Então, a solução exata para a viga sob carga distribuída nula é um polinômio cúbico, definido por quatro constantes. Nesse ponto, buscamos representar o polinômio em termos de outro conjunto de constantes. Observamos da Figura 16.1 que se pode identificar os valores dos deslocamentos nos nós do elemento, como $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ e rotações da normal, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$. Como consequência das hipóteses do modelo de Euler-Bernoulli, o ângulo de rotação da normal numa seção é igual à tangente da curva elástica, isto é, $\overline{\theta}(\bar{x}) = d\overline{v}/d\bar{x}$.

Os valores nodais no elemento podem ser usados como condições de contorno na função cúbica (16.2)

$$\begin{aligned} \text{Nó 1} \quad &\longrightarrow \quad \begin{cases} \overline{v}\,(\bar{x}=0) = \overline{v}_1, \\ \left.\dfrac{d\overline{v}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \overline{\theta}(\bar{x}=0) = \overline{\theta}_1. \end{cases} \\ \text{Nó 2} \quad &\longrightarrow \quad \begin{cases} \overline{v}\,(\bar{x}=L) = \overline{v}_2, \\ \left.\dfrac{d\overline{v}}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=L} = \overline{\theta}\,(\bar{x}=L) = \overline{\theta}_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{16.3}$$

Aplicando essas condições a (16.2), se tem o seguinte sistema algébrico:

$$\begin{aligned} \overline{v}_1 &= a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_3 0, \\ \overline{\theta}_1 &= a_1 + 2a_2 0 + 3a_3 0, \\ \overline{v}_2 &= a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3, \\ \overline{\theta}_2 &= a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Escrevendo em forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \tag{16.5}$$

A matriz é não singular, de forma que se pode obter as constantes $a_0 - a_3$ em termos dos valores nodais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \overline{v}_1, \\ a_1 &= \overline{\theta}_1, \\ a_2 &= \frac{1}{L^2}\left(-2L\overline{\theta}_1 - L\overline{\theta}_2 - 3\overline{v}_1 + 3\overline{v}_2\right), \\ a_3 &= \frac{1}{L^3}\left(L\overline{\theta}_1 + L\overline{\theta}_2 + 2\overline{v}_1 - 2\overline{v}_2\right). \end{aligned} \tag{16.6}$$

Levando essas constantes a (16.2) se tem:

$$\overline{v}\left(\bar{x}\right) = \overline{v}_1 + \overline{\theta}_1\bar{x} + \left(-\frac{2}{L}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{L}\overline{\theta}_2 - \frac{3}{L^2}\overline{v}_1 + \frac{3}{L^2}\overline{v}_2\right)\bar{x}^2 + \left(\frac{1}{L^2}\overline{\theta}_1 + \frac{1}{L^2}\overline{\theta}_2 + \frac{2}{L^3}\overline{v}_1 - \frac{2}{L^3}\overline{v}_2\right)\bar{x}^3. \tag{16.7}$$

Em seguida reordenamos a equação, agrupando os termos para cada deslocamento nodal:

$$\overline{v}\left(\bar{x}\right) = \underbrace{\left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{L^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{L^3}\right)}_{\phi_1(\bar{x})}\overline{v}_1 + \underbrace{\frac{\bar{x}}{L}\left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L}\right)}_{\phi_2(\bar{x})}\overline{\theta}_1 + \underbrace{\left(3\frac{\bar{x}^2}{L^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{L^3}\right)}_{\phi_3(\bar{x})}\overline{v}_2 + \underbrace{\left(-\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2}\right)}_{\phi_4(\bar{x})}\overline{\theta}_2, \tag{16.8}$$

ou, em forma compacta,

$$\boxed{\overline{v}\left(\bar{x}\right) = \phi_1\left(\bar{x}\right)\overline{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\overline{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\overline{\theta}_2} \tag{16.9}$$

Observa-se que cada deslocamento nodal $\overline{v}_1$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{\theta}_2$, é multiplicado por um polinômio cúbico, definidos por:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_1(\bar{x}) &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, & \phi_3(\bar{x}) &= 3\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L}\right)^3, \\ \phi_2(\bar{x}) &= \frac{\bar{x}}{L}\left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L}\right), & \phi_4(\bar{x}) &= -\frac{\bar{x}^2}{L} + \frac{\bar{x}^3}{L^2}. \end{aligned}} \tag{16.10}$$

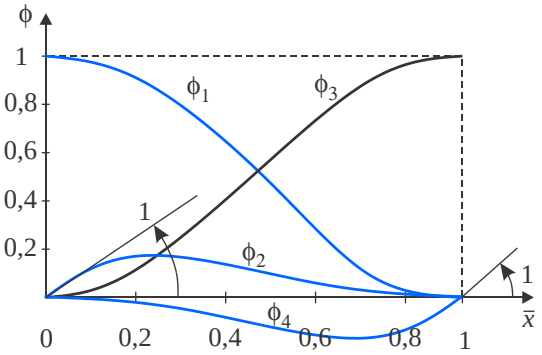


Figura 16.2: Funções de interpolação de viga no intervalo [0;1] para $L = 1$.

Essas são as chamadas **funções de interpolação** (ou **de forma**), **do elemento finito de viga**. São funções polinomiais cúbicas, definidas no intervalo $\bar{x} \in [0; L]$. **Uma combinação linear dessas quatro funções, na forma (16.9), tem a propriedade de poder representar qualquer polinômio cúbico nesse intervalo**. Os coeficientes da combinação linear são os valores dos deslocamentos transversais nos nós extremos, $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_1$, e dos ângulos de rotação nesses nós, $\overline{\theta}_1$ e $\overline{\theta}_2$, como ilustrados na Figura 16.1.

Observe que as funções de interpolação são tais que satisfazem as seguintes **propriedades**:

$$
\begin{array}{lllll}
1. & \phi_1(0)=1 & \phi_1(L)=0 & \phi_3(0)=0 & \phi_3(L)=1 \\
2. & \left.\dfrac{d\phi_2}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0}=1 & \left.\dfrac{d\phi_2}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=L}=0 & \left.\dfrac{d\phi_4}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0}=0 & \left.\dfrac{d\phi_4}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=L}=1 \\
3. & \phi_1(\bar{x})+\phi_3(\bar{x})=1, & \text{qualquer } \bar{x}\in[0;L]\,. & &
\end{array}
\tag{16.11}
$$

As propriedades 1 e 2 podem ser visualizadas na Figura 16.2. Essas propriedades têm importância fundamental para a consistência do método de elementos finitos.

Para uso posterior, as primeiras e segundas derivadas das funções de forma são listadas a seguir:

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\phi_1(\bar{x})}{\partial\bar{x}}=\dfrac{6\bar{x}^2}{L^3}-\dfrac{6\bar{x}}{L^2}, & \dfrac{\partial^2\phi_1(\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}=\dfrac{12\bar{x}}{L^3}-\dfrac{6}{L^2}, \\
\dfrac{\partial\phi_2(\bar{x})}{\partial\bar{x}}=\left(1-4\dfrac{\bar{x}}{L}+\dfrac{3\bar{x}^2}{L^2}\right), & \dfrac{\partial^2\phi_2(\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}=\left(-\dfrac{4}{L}+\dfrac{6\bar{x}}{L^2}\right), \\
\dfrac{\partial\phi_3(\bar{x})}{\partial\bar{x}}=\dfrac{6\bar{x}}{L^2}-\dfrac{6\bar{x}^2}{L^3}, & \dfrac{\partial^2\phi_3(\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}=\dfrac{6}{L^2}-\dfrac{12\bar{x}}{L^3}, \\
\dfrac{\partial\phi_4(\bar{x})}{\partial\bar{x}}=\dfrac{3\bar{x}^2}{L^2}-\dfrac{2\bar{x}}{L}. & \dfrac{\partial^2\phi_4(\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}=\dfrac{6\bar{x}}{L^2}-\dfrac{2}{L}.
\end{array}
}
\tag{16.12}
$$

Supondo que se conheçam os deslocamentos nodais $\overline{v}_1$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{\theta}_2$, a rotação e o momento de qualquer seção são obtidos de (16.1) por:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\theta(\bar{x})&=\frac{d\overline{v}}{d\bar{x}}=\overline{v}_1\left(\frac{6\bar{x}^2}{L^3}-\frac{6\bar{x}}{L^2}\right)+\overline{\theta}_1\left(1-4\frac{\bar{x}}{L}+\frac{3\bar{x}^2}{L^2}\right)+\overline{v}_2\left(\frac{6\bar{x}}{L^2}-\frac{6\bar{x}^2}{L^3}\right)+\overline{\theta}_2\left(\frac{3\bar{x}^2}{L^2}-\frac{2\bar{x}}{L}\right), \\
\frac{M_z(\bar{x})}{EI_{zz}}&=\frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2}=\overline{v}_1\left(\frac{12\bar{x}}{L^3}-\frac{6}{L^2}\right)+\overline{\theta}_1\left(-\frac{4}{L}+\frac{6\bar{x}}{L^2}\right)+\overline{v}_2\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12\bar{x}}{L^3}\right)+\overline{\theta}_2\left(\frac{6\bar{x}}{L^2}-\frac{2}{L}\right).
\end{aligned}
}
\tag{16.13}
$$

Uma vez que a formulação parte do pressuposto de que os deslocamentos são interpolados cubicamente, o momento fletor tem variação linear no elemento, como visto acima.

16.2 Equilíbrio do elemento de viga

Consideremos agora a elaboração de uma formulação de elementos finitos para viga de Euler-Bernoulli. Note que, uma vez uma formulação tenha sido construída e programada computacionalmente, ela deve ser aplicável a um amplo conjunto de condições de contorno e de carregamento, admitindo problemas com carregamento transversal aplicado, seção transversal variável, por exemplo. O procedimento geral de construção de uma formulação de MEF consiste em incluir na formulação um conjunto restrito de condições. No presente caso, teremos uma formulação baseada nas condições mostradas na Figura 16.1, isto é, **seção transversal uniforme e carregamento distribuído transversal nulo**. Dentro dessas condições, se usarmos uma aproximação de deslocamento transversal $\overline{v}$ como em (16.9), baseado nas funções de forma (16.10). Com isso, a solução obtida pelo MEF será exata. Entretanto, a formulação não será restrita a esse caso de carregamento: ela pode, igualmente, ser aplicada a problemas com **seção transversal variável e carregamento transversal distribuído não nulo**. Entretanto, nesse caso, o MEF produzirá resultados aproximativos, em vez de exatos. De qualquer forma, essa é a situação usual em qualquer análise numérica: raramente o problema será tão simples que se possa obter a solução exata.

A representação algébrica do equilíbrio do elemento, em termos da matriz de rigidez, pode ser obtida de diversas formas. No texto que segue, faremos a descrição através de duas formas: (1) via o Primeiro Teorema de Castigliano e (2) via equilíbrio direto, visto na seção 16.2.2. Ambas as deduções chegarão ao mesmo resultado, e o leitor ou professor pode optar por uma das duas subseções a seguir.

16.2.1 Dedução 1 - Rigidez do elemento via Teorema de Castigliano

A energia de deformação de uma viga prismática sob flexão plana, desprezando o efeito do esforço cortante, é dada em (14.27), página 515:

$$U = \frac{1}{2EI_{zz}} \int_0^L M_z^2 \, d\bar{x}. \tag{16.14}$$

Consideramos também a equação diferencial de flexão, deduzida em (12.17), página (431):

$$EI_{zz} \frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2} = M_z\left(\bar{x}\right), \tag{16.15}$$

para relacionar o esforço de momento fletor à função de deslocamento transversal $v(\bar{x})$. Se utilizamos a aproximação do deslocamento na forma (16.9) e fazemos as duas primeiras derivadas, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{v}}{d\bar{x}}\left(\bar{x}\right) &= \frac{d\phi_1}{d\bar{x}}\overline{v}_1 + \frac{d\phi_2}{d\bar{x}}\overline{\theta}_1 + \frac{d\phi_3}{d\bar{x}}\overline{v}_3 + \frac{d\phi_4}{d\bar{x}}\overline{\theta}_2, \qquad \text{e} \\ \frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2}\left(\bar{x}\right) &= \frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2. \end{aligned} \tag{16.16}$$

Assim, o esforço de momento é aproximado em termos dos deslocamentos nodais por:

$$M_z = EI_{zz}\left[\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2\right]. \tag{16.17}$$

Essa é uma aproximação linear do momento no elemento. (Note que a forma explícita dessa equação é vista em (16.13), mas no momento a forma acima é mais adequada às operações realizadas a seguir.)

O **Primeiro Teorema de Castigliano**, enunciado na eq. (14.53), página 521, pode ser aplicado aqui, relacionando os esforços ($\overline{P}_{1y}$, $\overline{M}_{1z}$, $\overline{P}_{2y}$ e $\overline{M}_{2z}$) aos deslocamentos nodais do elemento ($\overline{v}_1$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{\theta}_2$), através da expressão da energia de deformação (12.17). O teorema gera as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \overline{v}_1} &= \overline{P}_{1y} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L \frac{\partial M_z}{\partial \overline{v}_1} M_z \, d\bar{x}, & \frac{\partial U}{\partial \overline{v}_2} &= \overline{P}_{2y} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L \frac{\partial M_z}{\partial \overline{v}_2} M_z \, d\bar{x}, \\ \frac{\partial U}{\partial \overline{\theta}_1} &= \overline{M}_{1z} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L \frac{\partial M_z}{\partial \overline{\theta}_1} M_z \, d\bar{x}, & \frac{\partial U}{\partial \overline{\theta}_2} &= \overline{M}_{2z} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L \frac{\partial M_z}{\partial \overline{\theta}_2} M_z \, d\bar{x}. \end{aligned} \tag{16.18}$$

Usando (12.22), identificamos as derivadas do momento em relação aos deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial \overline{v}_1} &= EI_{zz}\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}, & \frac{\partial M_z}{\partial \overline{v}_2} &= EI_{zz}\frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial \overline{\theta}_1} &= EI_{zz}\frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}, & \frac{\partial M_z}{\partial \overline{\theta}_2} &= EI_{zz}\frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}. \end{aligned} \tag{16.19}$$

Assim, pode-se escrever:

$$\overline{P}_{1y} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L (EI_{zz})^2 \frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\left[\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2\right] d\bar{x},$$

$$\overline{M}_{1z} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L (EI_{zz})^2 \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\left[\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2\right] d\bar{x},$$

$$\overline{P}_{2y} = \frac{1}{EI_{zz}}\int_0^L (EI_{zz})^2 \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\left[\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2\right] d\bar{x},$$

$$\overline{M}_{2z} = \frac{1}{EI_{zz}} \int_0^L (EI_{zz})^2 \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2} \left[\frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2}\overline{v}_1 + \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_1 + \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\overline{v}_2 + \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\overline{\theta}_2 \right] d\bar{x}. \tag{16.20}$$

Simplificam-se os temos EI_{zz} e colocam-se fora das integrais os deslocamentos nodais. Além disso, define-se a notação $\phi_j^{(2)}$, tal que $\phi_j^{(2)} \equiv d^2\phi_j/d\bar{x}^2$, para $j = 1, 2, 3$ ou 4. Por exemplo, $\phi_1^{(2)} := d^2\phi_1/d\bar{x}^2$, $\phi_2^{(2)} := d^2\phi_2/d\bar{x}^2$, etc.

$$\overline{P}_{1y} = EI_{zz} \left\{ \overline{v}_1 \int_0^L \phi_1^{(2)}\phi_1^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_1 \int_0^L \phi_1^{(2)}\phi_2^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{v}_2 \int_0^L \phi_1^{(2)}\phi_3^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_2 \int_0^L \phi_1^{(2)}\phi_4^{(2)}\, d\bar{x} \right\},$$

$$\overline{M}_{1z} = EI_{zz} \left\{ \overline{v}_1 \int_0^L \phi_2^{(2)}\phi_1^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_1 \int_0^L \phi_2^{(2)}\phi_2^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{v}_2 \int_0^L \phi_2^{(2)}\phi_3^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_2 \int_0^L \phi_2^{(2)}\phi_4^{(2)}\, d\bar{x} \right\},$$

$$\overline{P}_{2y} = EI_{zz} \left\{ \overline{v}_1 \int_0^L \phi_3^{(2)}\phi_1^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_1 \int_0^L \phi_3^{(2)}\phi_2^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{v}_2 \int_0^L \phi_3^{(2)}\phi_3^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_2 \int_0^L \phi_3^{(2)}\phi_4^{(2)}\, d\bar{x} \right\},$$

$$\overline{M}_{2z} = EI_{zz} \left\{ \overline{v}_1 \int_0^L \phi_4^{(2)}\phi_1^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_1 \int_0^L \phi_4^{(2)}\phi_2^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{v}_2 \int_0^L \phi_4^{(2)}\phi_3^{(2)}\, d\bar{x} + \overline{\theta}_2 \int_0^L \phi_4^{(2)}\phi_4^{(2)}\, d\bar{x} \right\}. \tag{16.21}$$

Cada integral pode ser calculada numericamente, gerando um valor conhecido, que denominamos k_{ij}, definido por:

$$k_{ij} = EI_{zz} \int_0^L \frac{d^2\phi_i}{d\bar{x}^2} \frac{d^2\phi_j}{d\bar{x}^2}\, d\bar{x}, \qquad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } 4. \tag{16.22}$$

Por exemplo,

$$k_{13} = EI_{zz} \int_0^L \frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2} \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2}\, d\bar{x}. \tag{16.23}$$

Então, as quatro equações (16.21) podem ser escritas de forma compacta e matricial como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{P}_{1y} \\ \overline{M}_{1z} \\ \overline{P}_{2y} \\ \overline{M}_{2z} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{array} \right\}, \quad \text{i.e., } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\ \bar{\mathbf{u}}. \tag{16.24}$$

Tomando as funções de interpolação de (16.10) e efetuando suas derivadas, cada termo da matriz de rigidez do elemento pode ser facilmente integrado, resultando:

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{EI_{zz}}{L^3} \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6\,L & -12 & 6\,L \\ 6\,L & 4L^2 & -6\,L & 2L^2 \\ -12 & -6\,L & 12 & -6\,L \\ 6\,L & 2L^2 & -6\,L & 4L^2 \end{array} \right]} \tag{16.25}$$

Com isso, as equações de equilíbrio do elemento de viga sob flexão plana são representadas pelo sistema algébrico (16.24). Seguindo a regra, já vista também no caso do elemento de barra, a **matriz de rigidez do elemento é simétrica e também singular**.

16.2.2 Dedução 2 - Rigidez do elemento via método da rigidez

Deslocamentos unitários

Uma vez entendido o procedimento visto na seção anterior 16.2.1 para determinação da matriz de rigidez do elemento via Teorema de Castigliano, o leitor pode ir diretamente para a próxima seção, 16.3. A presente seção faz a determinação da rigidez do elemento usando um método mais intuitivo, baseado principalmente em conceitos de equilíbrio e cinemática, sem um teorema de energia.

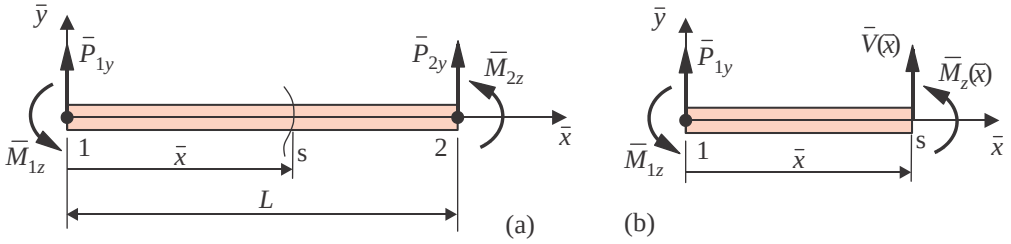


Figura 16.3: Esforços nodais e esforços numa seção arbitrária.

Consideremos a viga sob a ação apenas dos esforços nodais, como na Figura 16.3a, i.e., $\overline{P}_{1y}$, $\overline{M}_{1z}$, $\overline{P}_{2y}$ e $\overline{M}_{2z}$. O esforço numa seção arbitrária s de coordenada $\bar{x}$ pode ser obtido em termos dos esforços no nó 1, como na Figura 16.3b:

$$\bar{M}_z(\bar{x}) = \bar{P}_{1y}\bar{x} - \bar{M}_{1z} \tag{16.26}$$

Tomando esse esforço como conhecido, pode-se integrar a equação diferencial de equilíbrio da curva elástica de segunda ordem:

$$\begin{aligned} EI_{zz}\frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2} &= M_z(\bar{x}) = \bar{P}_{1y}\bar{x} - \bar{M}_{1z}, \\ EI_{zz}\frac{d\overline{v}}{d\bar{x}} &= EI_{zz}\theta = \frac{\bar{P}_{1y}}{2}\bar{x}^2 - \bar{M}_{1z}\bar{x} + C_1, \\ EI_{zz}\overline{v}\,(\bar{x}) &= \frac{\bar{P}_{1y}}{6}\bar{x}^3 - \frac{\bar{M}_{1z}}{2}\bar{x}^2 + C_1\bar{x} + C_2\ . \end{aligned} \tag{16.27}$$

Temos então quatro constantes incógnitas: $\overline{P}_{1y}$, $\overline{M}_{1z}$, C_1 e C_2. Para sua determinação, consideremos inicialmente um problema com as seguintes condições de contorno definidas por um **deslocamento unitário** aplicado no nó 1, e todos os demais deslocamentos nodais nulos:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}(0) = 1, \qquad \bar{\theta}_1 = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}(0) = 0, \\ \bar{v}_2 &= \bar{v}(L) = 0, \qquad \bar{\theta}_2 = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}(L) = 0. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Usando $(16.28)_2$ para $d\bar{v}/d\bar{x} = 0$ em $\bar{x} = 0$ obtemos $C_1 = 0$ e $d\bar{v}/d\bar{x} = 0$ em $\bar{x} = L$ temos $\bar{M}_{z1} = \bar{P}_{y1}L/2$, de forma que $(16.27)_3$ se torna

$$EI\ \bar{v}(\bar{x}) = \bar{P}_{y1}\frac{\bar{x}^3}{6} - \bar{P}_{y1}\frac{\bar{x}^2}{4}L + C_2. \tag{16.29}$$

Incorporando as condições $\bar{v}(0) = 1$ e $\bar{v}(L) = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} EI1 &= C_2, \text{ e} \\ EI0 &= -\bar{P}_{y1}\frac{L^3}{12} + C_2, \quad \Longrightarrow \quad \bar{P}_{y1} = 12\frac{EI}{L^3}. \end{aligned} \tag{16.30}$$

Em seguida podemos obter os esforços no nó 2, $\bar{P}_{y2}$ e $\bar{M}_{z2}$, aos do nó 1, usando a condição de

equilíbrio global do elemento de viga usando a Figura 16.3a:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{y1} + \bar{P}_{y2} &= 0\,, \\ \bar{M}_{z2} + \bar{M}_{z1} - \bar{P}_{y1} L &= 0\,. \end{aligned} \tag{16.31}$$

Podemos assim concluir que os esforços nodais para o caso de aplicação de um deslocamento unitário no nó 1, mantendo os demais deslocamentos nodais nulos são:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{y1} &= 12\frac{EI}{L^3}\,, \qquad \bar{M}_{z1} = 6\frac{EI}{L^2}\,, \qquad C_1 = 0, \\ \bar{P}_{y2} &= -12\frac{EI}{L^3}\,, \qquad \bar{M}_{z2} = 6\frac{EI}{L^2} \qquad C_2 = EI. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Note que esses são as forças nodais necessárias para gerar o conjunto de deslocamentos nodais mostrados em (16.28).

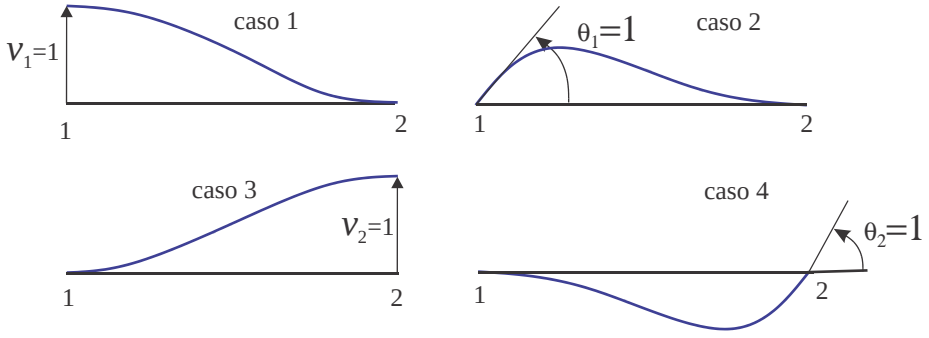


Figura 16.4: Curvas elásticas correspondentes aos quatro casos de deslocamento unitário.

A dedução entre as eqs.(16.28) e (16.32) podem ser repetidas para outros três casos de deslocamento unitário, i.e., um deslocamento unitário aplicado em um dos quatro graus de liberdade do elemento, mantendo os demais nulos. Os esforços nodais necessários para gerar esses deslocamentos são os seguintes:

$$\begin{aligned}
&\text{Caso 1} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{v}_1 = 1\,, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 0\,, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bar{P}_{y1} = 12\frac{EI}{L^3}\,, & \bar{M}_{z1} = 6\frac{EI}{L^2}\,, \\ \bar{P}_{y2} = -12\frac{EI}{L^3}\,, & \bar{M}_{z2} = 6\frac{EI}{L^2}\,. \end{array} \right. \\
&\text{Caso 2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{v}_1 = 0\,, & \bar{\theta}_1 = 1, \\ \bar{v}_2 = 0\,, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bar{P}_{y1} = 6\frac{EI}{L^2}\,, & \bar{M}_{z1} = 4\frac{EI}{L}\,, \\ \bar{P}_{y2} = -6\frac{EI}{L^2}\,, & \bar{M}_{z2} = 2\frac{EI}{L}\,. \end{array} \right. \\
&\text{Caso 3} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{v}_1 = 0\,, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 1\,, & \bar{\theta}_2 = 0, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bar{P}_{y1} = -12\frac{EI}{L^3}\,, & \bar{M}_{z1} = -6\frac{EI}{L^2}\,, \\ \bar{P}_{y2} = 12\frac{EI}{L^3}\,, & \bar{M}_{z2} = -6\frac{EI}{L^2}\,. \end{array} \right. \\
&\text{Caso 4} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{v}_1 = 0\,, & \bar{\theta}_1 = 0, \\ \bar{v}_2 = 0\,, & \bar{\theta}_2 = 1, \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bar{P}_{y1} = 6\frac{EI}{L^2}\,, & \bar{M}_{z1} = 2\frac{EI}{L}\,, \\ \bar{P}_{y2} = -6\frac{EI}{L^2}\,, & \bar{M}_{z2} = 4\frac{EI}{L}\,. \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{16.33}$$

A Figura 16.4 ilustra as configurações assumidas pela viga para cada um dos quatro casos de deslocamento unitário definidos.

Matriz de rigidez do elemento de viga

Buscamos construir uma matriz que relacione os esforços no elemento finito de viga, ($\overline{P}_{1y}$, $\overline{M}_{1z}$, $\overline{P}_{2y}$ e $\overline{M}_{2z}$), com deslocamentos nodais ($\overline{v}_1$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{\theta}_2$). O relacionamento linear mais geral tem a forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}. \tag{16.34}$$

Pode-se considerar que valores K_{ij} dependem das características geométricas do elemento e do seu material. Essas constantes podem ser calculadas de uma forma simples a partir das soluções dos quatro problemas padrão sumarizadas em (16.33), da forma como segue.

Consideremos o **primeiro caso** das condições (16.33), onde o elemento de viga se deforma devido a um deslocamento unitário no nó 1, permanecendo nulos os demais graus de liberdade. Aplicando este caso de deslocamento na equação (16.34) obtemos

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 = 1 \\ \bar{\theta}_1 = 0 \\ \bar{v}_2 = 0 \\ \bar{\theta}_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\frac{EI}{L^3} \\ 6\frac{EI}{L^2} \\ -12\frac{EI}{L^3} \\ 6\frac{EI}{L^2} \end{Bmatrix}. \tag{16.35}$$

Os termos na última igualdade foram obtidos do caso 1 de (16.33). Então, o produto da matriz $\mathbf{K}$ pelo vetor de deslocamento fornece a primeira coluna desta matriz, e o vetor de esforços torna-se conhecido em termos de EI e L, a partir da solução (16.33). Consequentemente, as componentes da primeira coluna da matriz de rigidez estão determinadas. De fato, esse procedimento mostra uma outra maneira de interpretar os termos de $\mathbf{K}$: a primeira coluna são os esforços necessários para gerar no elemento um deslocamento unitário no nó 1 e demais deslocamentos nulos.

Repetindo o procedimento para os demais três casos de (16.33) (deslocamento unitário de $\bar{\theta}_1$ para obter a segunda coluna, etc.) temos

$$\text{Caso 2:} \qquad \bar{\theta}_1 = 1$$
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 = 0 \\ \bar{\theta}_1 = 1 \\ \bar{v}_2 = 0 \\ \bar{\theta}_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ K_{32} \\ K_{42} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6\frac{EI}{L^2} \\ 4\frac{EI}{L} \\ -6\frac{EI}{L^2} \\ 2\frac{EI}{L} \end{Bmatrix},$$

$$\text{Caso 3:} \qquad \bar{v}_2 = 1$$
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 = 0 \\ \bar{\theta}_1 = 0 \\ \bar{v}_2 = 1 \\ \bar{\theta}_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \\ K_{33} \\ K_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12\frac{EI}{L^3} \\ -6\frac{EI}{L^2} \\ 12\frac{EI}{L^3} \\ -6\frac{EI}{L^2} \end{Bmatrix},$$

$$\text{Caso 4:} \qquad \bar{\theta}_2 = 1$$
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 = 0 \\ \bar{\theta}_1 = 0 \\ \bar{v}_2 = 0 \\ \bar{\theta}_2 = 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{14} \\ K_{24} \\ K_{34} \\ K_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{P}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6\frac{EI}{L^2} \\ 2\frac{EI}{L} \\ -6\frac{EI}{L^2} \\ 4\frac{EI}{L} \end{Bmatrix}.$$

Estes resultados fornecem a expressão completa das componentes da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ para

o modelo de **flexão plana**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12\dfrac{EI}{L^3} & 6\dfrac{EI}{L^2} & -12\dfrac{EI}{L^3} & 6\dfrac{EI}{L^2} \\ 6\dfrac{EI}{L^2} & 4\dfrac{EI}{L} & -6\dfrac{EI}{L^2} & 2\dfrac{EI}{L} \\ -12\dfrac{EI}{L^3} & -6\dfrac{EI}{L^2} & 12\dfrac{EI}{L^3} & -6\dfrac{EI}{L^2} \\ 6\dfrac{EI}{L^2} & 2\dfrac{EI}{L} & -6\dfrac{EI}{L^2} & 4\dfrac{EI}{L} \end{bmatrix} \tag{16.36}$$

Observemos que a matriz é simétrica, da mesma forma que a matriz de rigidez do modelo de viga já obtida pelo primeiro Teorema de Castigliano em (16.25).

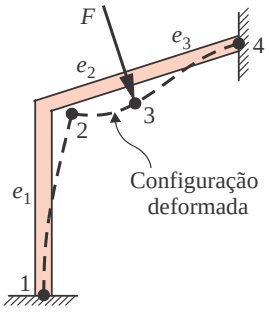


Figura 16.5: Ilustração de estrutura plana, em que cada segmento de viga possui uma orientação própria.

16.3 Análise de vigas no plano

Numa estrutura plana, em que cada segmento de viga possui uma orientação própria, como aquela ilustrada na Figura 16.5, torna-se necessário definir um elemento finito que incorpore tanto os graus de liberdade axiais, característicos de elementos de barra, quanto os graus de liberdade de flexão de viga. Para entender isso, basta observar que o deslocamento do nó 2 transversal à viga e_1 é parcialmente igual ao deslocamento axial nos elementos e_2 e e_3, e todos os elementos contribuem com a rigidez do conjunto.

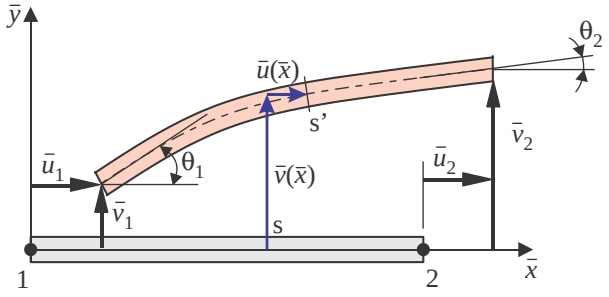


Figura 16.6: Deslocamentos axial e transversal num elemento de viga.

A Figura 16.6 ilustra um elemento finito com seu sistema local de coordenadas, incorporando simultaneamente os deslocamentos axial e de flexão. Os deslocamentos nodais são $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ axiais, característicos de comportamento de barra, e $\overline{v}_1$, $\overline{\theta}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{\theta}_2$ transversais, de comportamento de flexão. Uma seção arbitrária s, de coordenada $\bar{x}$, sofre componentes de deslocamento axial $\overline{u}(\bar{x})$ e transversal $\overline{v}(\bar{x})$. Quanto aos esforços nodais associados, eles são vistos na figura 16.7. As equações de equilíbrio de seu comportamento de barra e de viga no sistema local, que são, respectivamente:

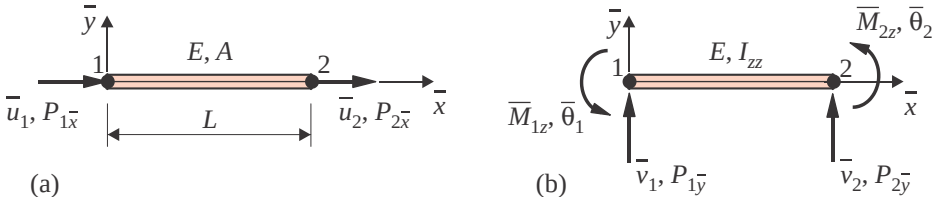


Figura 16.7: Esforços e graus de liberdade nodais no elemento de barra e de viga.

1. **Modelo de barra**: (Figura 16.7a)

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{1\bar{x}} \\ P_{2\bar{x}} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}. \tag{16.37}$$

2. **Modelo de viga**: (Figura 16.7b)

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{1\bar{y}} \\ M_{1\bar{z}} \\ P_{2\bar{y}} \\ M_{2\bar{z}} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \dfrac{12EI_{zz}}{L^3} & \dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & -\dfrac{12EI_{zz}}{L^3} & \dfrac{6EI_{zz}}{L^2} \\ \dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & \dfrac{4EI_{zz}}{L} & -\dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & \dfrac{2EI_{zz}}{L} \\ -\dfrac{12EI_{zz}}{L^3} & -\dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & \dfrac{12EI_{zz}}{L^3} & -\dfrac{6EI_{zz}}{L^2} \\ \dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & \dfrac{2EI_{zz}}{L} & -\dfrac{6EI_{zz}}{L^2} & \dfrac{4EI_{zz}}{L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{array} \right\}. \tag{16.38}$$

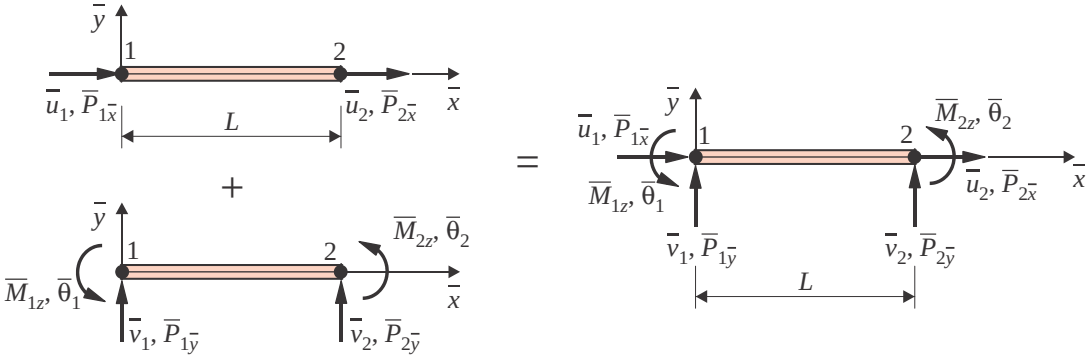


Figura 16.8: Sobreposição dos esforços de barra e viga.

É facilmente compreensível que o mesmo corpo possa estar sujeito simultaneamente a esforços axiais e transversais, de forma que sua resposta seja tanto em extensão, como barra, quanto de flexão, como uma viga. Esquematicamente, a sobreposição dos dois comportamentos é mostrada na Figura 16.8. A sobreposição dos esforços de barra e viga é feita pela composição das matrizes de

rigidez de ambas as formulações, resultando:

$$\left\{\begin{array}{c} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} \\ \overline{M}_{1z} \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} \\ \overline{M}_{2z} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{array}\right\}. \quad (16.39)$$

Essa é a equação de equilíbrio de um elemento finito orientado na direção local $\bar{x}$, envolvendo ambos os efeitos simultaneamente, axial e flexão plana. Como forma de compactar a notação, definimos os vetores e a matriz de rigidez de (16.39) como

$$\overline{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}^e \overline{\mathbf{u}}, \qquad \text{onde} \qquad \overline{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} P_{1\bar{x}} \\ P_{1\bar{y}} \\ \overline{M}_1 \\ P_{2\bar{x}} \\ P_{2\bar{y}} \\ \overline{M}_2 \end{array}\right\} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathbf{u}} = \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{array}\right\}. \quad (16.40)$$

onde $\overline{\mathbf{u}}$ e $\overline{\mathbf{P}}$ são os deslocamentos e os esforços associados aos nós 1 e 2, em relação ao sistema local de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$, e $\bar{\mathbf{K}}^e$ é a matriz de rigidez local do elemento e.

Considere-se agora um **sistema global de coordenadas**, (x, y, z) e o **sistema local de coordenadas**, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Considere-se que ambos os sistemas tenham eixos z coincidentes, isto é, $z = \bar{z}$. Então, o sistema local orienta-se em relação ao global por uma rotação dos eixos (x, y) em torno do eixo z por um ângulo θ, medido de forma anti-horária a partir do eixo x, como mostrado na Figura 15.8.

A Figura 16.8 ilustra como as componentes dos deslocamentos e dos esforços no sistema de coordenadas local $(\overline{x}, \overline{y})$ se decompõem no sistema de coordenadas global (x, y) .As relações entre as componentes nos dois sistemas de coordenadas podem ser colocadas na forma matricial como:

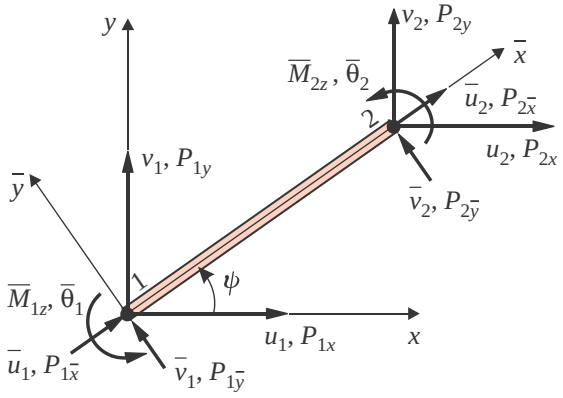


Figura 16.9: Graus de liberdade de um elemento de viga rotacionado no plano xy.

$$\left\{\begin{array}{c} P_{1\overline{x}} \\ P_{1\overline{y}} \\ \overline{M}_{1z} \\ P_{2\overline{x}} \\ P_{2\overline{y}} \\ \overline{M}_{2z} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \cos\psi & \text{sen }\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen }\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & \text{sen }\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen }\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{array}\right\}, \tag{16.41}$$

e para os deslocamentos:

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \cos\psi & \text{sen }\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen }\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & \text{sen }\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen }\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}\right\}, \tag{16.42}$$

De maneira sintética, essas relações tomam a forma:

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\mathbf{P}, \tag{16.43}$$

onde $\mathbf{T}$ é a **matriz de transformação** para a rotação entre os sistemas de coordenadas. A equação local de equilíbrio $\overline{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{u}}$, eq.(16.90), pode ser rotacionada para o sistema global de coordenadas utilizando as transformações (16.43):

$$\begin{array}{rcll} \overline{\mathbf{P}} & = & \bar{\mathbf{K}}^e\overline{\mathbf{u}}, & \text{substitui } \overline{\mathbf{P}} \text{ e } \overline{\mathbf{u}} \text{ usando (16.43);} \\ \mathbf{T}\mathbf{P} & = & \overline{\mathbf{K}}^e\mathbf{T}\mathbf{u}, & \text{pré-multiplica por } \mathbf{T}^{-1}; \\ \mathbf{P} & = & \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{K}}^e\mathbf{T}\mathbf{u}. & \end{array} \tag{16.44}$$

Observa-se que a matriz $\mathbf{T}$ é ortogonal (i.e., $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$, o que implica que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$). Isso permite que a relação (16.44) tome a forma

$$\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}^e\mathbf{T}}_{\mathbf{K}^e}\mathbf{u}, \tag{16.45}$$

onde, definindo-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global, $\mathbf{K}^e$, temos a equação matricial de equilíbrio do elemento finito:

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{K}^e\mathbf{u}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}^e\mathbf{T}.} \tag{16.46}$$

Uma vez que as matrizes $\overline{\mathbf{K}}$ e $\mathbf{T}$ são bastante esparsas, é possível obter a forma explícita de $\mathbf{K}^e$:

$$\mathbf{K}^e = \left[\begin{array}{cccccc} c^2a + s^2b & sc\,(a-b) & -s\dfrac{6EI}{L^2} & -\left(c^2a + s^2b\right) & sc\,(b-a) & -s\dfrac{6EI}{L^2} \\ sc\,(a-b) & s^2a + c^2b & c\dfrac{6EI}{L^2} & sc\,(b-a) & -\left(s^2a + c^2b\right) & c\dfrac{6EI}{L^2} \\ -s\dfrac{6EI}{L^2} & c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} & s\dfrac{6EI}{L^2} & -c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} \\ -\left(c^2a + s^2b\right) & sc\,(b-a) & s\dfrac{6EI}{L^2} & c^2a + s^2b & sc\,(a-b) & s\dfrac{6EI}{L^2} \\ sc\,(b-a) & -\left(s^2a + c^2b\right) & -c\dfrac{6EI}{L^2} & sc\,(a-b) & s^2a + c^2b & -c\dfrac{6EI}{L^2} \\ -s\dfrac{6EI}{L^2} & c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{2EI}{L} & s\dfrac{6EI}{L^2} & -c\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L} \end{array}\right] \tag{16.47}$$

onde $c = \cos\psi$ e $s = \text{sen }\psi$, $a = EA/L$ e $b = 12EI/L^3$.

Observação - Todo o desenvolvimento dessa seção segue linhas completamente similares àquela do elemento de barra orientado no plano. É recomendado que o leitor revise a seção 15.2, página 552.

16.3.1 Exemplo 16.1 - Pórtico plano

Calcular as deflexões, reações, solicitações internas em cada uma das vigas do pórtico plano mostrado na Figura 16.9. Os dados são: $E = 210.000$ MPa, a seção transversal de dimensões $b \times h = 100$ mm$\times 120$ mm, tal que a área é $A = 12.000$ mm^2 e o momento de inércia é $I_{zz} = 14,4 \cdot 10^6$ mm^4. A carga aplicada é $P = 700$ kN. Os comprimentos das barras são: $L_1 = 1.000$ mm e $L_2 = 60$ mm.

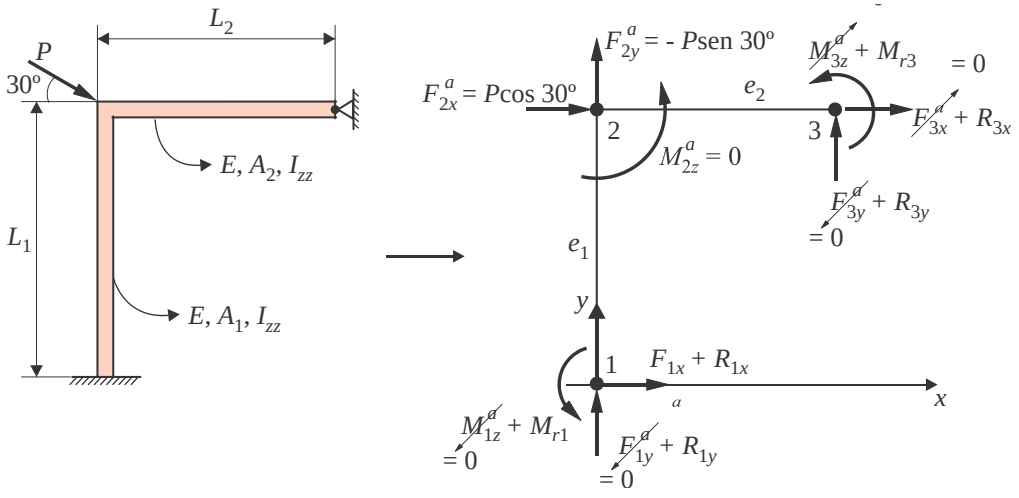


Figura 16.10: Estrutura plana do Exemplo 1 e modelo de elementos finitos, com as forças aplicadas.

As **forças e deslocamentos prescritos** são:

Nó	direção x	direção y	rotação z
1	$u_1 = 0$	$v_1 = 0$	$\theta_1 = 0$
2	$F^a_{2x} = 606.220$	$F^a_{2y} = -350.000$	$M^a_{2z} = 0$
3	$u_3 = 0$	$v_3 = 0$	$M_3 = 0$

E os dados de **conectividade** dos elementos são:

Elemento	nó I	nó J
1	1	2
2	2	3

Na **Etapa 1**, as matrizes dos elementos são calculadas usando (16.47).

- Matriz de **rigidez do elemento 1**. $\psi = 90°$: (lembrar da notação E6 $= \cdot 10^6$)

$$\begin{bmatrix} 36.288 & 0 & -1,81E7 & -36.288 & 0,0 & -1,81E7 \\ & 2,52E6 & 0 & 0 & -2,52E6 & 0 \\ & & 1,21E10 & 1,81E7 & 0 & 6,05E9 \\ & & & 36.288 & 0,0 & 1,81E7 \\ & & & & 2,52E6 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & 1,21E10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}. \tag{16.48}$$

- Matriz de **rigidez do elemento 2**. $\psi = 0°$:

$$\begin{bmatrix} 4,2 & 0 & 0 & -4,2 & 0 & 0 \\ & 16,8 & 504 & 0 & -16,8 & 504 \\ & & 2,02E4 & 0 & -504 & 1,01E4 \\ & & & 4,2 & 0 & 0 \\ & & & & 16,8 & -504 \\ \text{sim.} & & & & & 2,02E4 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}. \tag{16.49}$$

Na **etapa 2**, fazemos a **sobreposição das matrizes elementares**, na matriz de rigidez global. Os termos em negrito contêm a influência da matriz do elemento 2. O sistema algébrico de equações de equilíbrio, $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, é o seguinte:

$$\left[\begin{array}{cccccc}
36\text{E}{-3} & 0,0 & -18.1 & -36\text{E}{-3} & 0 & -18,1 \\
0,0 & 2,5 & 0 & 0 & -2,52 & 0 \\
-18.1 & 0 & 1.21\text{E}4 & 18,14 & 0 & 6.050 \\
-36\text{E}{-3} & 0 & 18,14 & \mathbf{42,03} & \mathbf{0} & \mathbf{18,14} \\
0 & -2,5 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{171} & \mathbf{5040} \\
-18.1 & 0 & 6.050 & \mathbf{18,14} & \mathbf{5040} & \mathbf{21,4}\text{E}4 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{-42} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-168} & \mathbf{-5040} \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{5040} & \mathbf{10,1}\text{E}4
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\mathbf{-42} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{-168} & \mathbf{5040} \\
\mathbf{0} & \mathbf{-0,5}\text{E}4 & \mathbf{10,1}\text{E}4 \\
\mathbf{42} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0,0} & \mathbf{168} & \mathbf{-5040} \\
\mathbf{0,0} & \mathbf{-5040} & \mathbf{20,2}\text{E}4
\end{array}\right] \times 10^6 \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = \mathbf{F}. \tag{16.50}$$

A etapa de determinação do vetor de forças nodais é feita identificando as forças aplicadas não nulas, que formarão o vetor $\mathbf{F}^a$, e o vetor de **reações** nos graus de liberdade restritos pelas condições de contorno, $\mathbf{R}$, tal que $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$. Nesse ponto todas as reações são incógnitas. Em forma explícita tem-se

$$\mathbf{F} = \left\{\begin{array}{l} F^a_{1x} = 0 \\ F^a_{1y} = 0 \\ M^a_{1z} = 0 \\ F^a_{2x} = 606.220 \\ F^a_{2y} = -350.000 \\ M^a_{2z} = 0 \\ F^a_{3x} = 0 \\ F^a_{3y} = 0 \\ M^a_{3z} = 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ 0 \end{array}\right\}$$

A **etapa** de aplicação das **condições de contorno** gera um sistema modificado de equações de equilíbrio, $\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$, obtido anulando as linhas e colunas de $\mathbf{K}$ e de $\mathbf{F}$, da forma já descrita,

resultando no seguinte sistema:

$$10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42,03 & 0 & 18,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,05 & 5040 & 0 & 0 & 5040 \\ 0 & 0 & 0 & 18,14 & 5040 & 31,4\cdot 10^4 & 0 & 0 & 10,1\cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5040 & 10,1\cdot 10^4 & 0 & 0 & 20,1\cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 606.220 \\ -350.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{16.51}$$

A **etapa de solução** resulta nos deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,401\cdot 10^{-2}\ \text{mm} \\ -6,146\cdot 10^{-2}\ \text{mm} \\ 9,469\cdot 10^{-4}\ \text{rad} \\ 0 \\ 0 \\ 1,063\cdot 10^{-3}\ \text{rad} \end{Bmatrix}. \tag{16.52}$$

A **etapa** de cálculo das **reações** nos apoios é feita usando a matriz de rigidez original $\mathbf{K}$ da equação (16.50), que gera as $\mathbf{F} = \mathbf{KU}$. Então, as reações são obtidas por $\mathbf{R} = \mathbf{KU} - \mathbf{F}^a$, que em forma explícita fica:

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,77\ \text{N} \\ 15,48\ \text{N} \\ 598\ \text{Nmm} \\ 60,6\ \text{N} \\ -35,0\ \text{N} \\ 0 \\ -58,8\ \text{N} \\ 19,5\ \text{N} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^4 - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 606.220 \\ -350.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,77\ \text{N} \\ 15,48\ \text{N} \\ 598\ \text{Nmm} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -58,8\ \text{N} \\ 19,5\ \text{N} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^4 \tag{16.53}$$

Observe que os termos em $\mathbf{F}$ satisfazem o equilíbrio de forças e momentos no pórtico, em cada direção.

O pós-processamento dos dados na **Etapa** de determinação das dos **esforços e tensões** nos elementos é detalhado na próxima seção.

16.4 Esforços e tensões nos elementos em problemas planos

Nos elementos de viga, é de interesse a determinação dos esforços e tensões máximas, além do deslocamento máximo. Essa determinação segue uma sequência de etapas, **aplicadas a cada elemento**.

Etapa 1 - Identificação dos deslocamentos nodais do elemento, nas direções globais, **u**.

Etapa 2 - Rotação dos deslocamentos nodais do elemento para as suas direções locais $\bar{x}\bar{y}$, conforme eq.(16.42):

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \tag{16.54}$$

onde **T** é a **matriz de transformação** a rotação entre o sistema de coordenadas do elemento e o global e $\overline{\mathbf{u}} = \left\{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\theta}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\theta}_2\right\}^T$ são os deslocamentos nodais nas direções locais, conforme a Figura 16.8. A expressão (16.54) pode ser expandida para a forma aberta:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \cos\psi + v_1 \text{sen}\ \psi \\ -u_1 \text{sen}\ \psi + v_1 \cos\psi \\ \theta_1 \\ u_2 \cos\psi + v_2 \text{sen}\ \psi \\ -u_2 \text{sen}\ \psi + v_1 \cos\psi \\ \theta_2 \end{Bmatrix}}. \tag{16.55}$$

Etapa 3 - O **esforço normal** na viga é calculado pela eq.(15.14)

$$N_x = EA\left[\bar{u}_1 \frac{d\psi_1}{d\bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{d\psi_2}{d\bar{x}}\right]. \tag{16.56}$$

onde $\psi_1(x) = 1 - \overline{x}/L_e$ e $\psi_2(x) = \overline{x}/L_e$, são as funções de interpolação axiais, definidas na eq.(15.6), onde L_e é o comprimento do elemento. Considerando as derivadas $d\psi_1/d\bar{x} = -1/L_e$ e $d\psi_2/d\bar{x} = 1/L_e$, a expressão fica

$$\boxed{N_x = \frac{EA}{L}\left[-\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right] = const.} \tag{16.57}$$

Etapa 4 - A relação entre o **momento fletor** e os deslocamentos é dado por $M_z = EI_{zz} d^2\bar{v}/d\bar{x}^2$. Usando a aproximação do deslocamento transversal $\bar{v}$ da eq.(16.9), tem-se

$$M_z(\bar{x}) = EI_{zz}\left[\bar{v}_1 \frac{d^2\phi_1}{d\bar{x}^2} + \bar{\theta}_1 \frac{d^2\phi_2}{d\bar{x}^2} + \bar{v}_2 \frac{d^2\phi_3}{d\bar{x}^2} + \bar{\theta}_2 \frac{d^2\phi_4}{d\bar{x}^2}\right]. \tag{16.58}$$

onde ϕ_1-ϕ_4 são as funções de forma de viga, definidas na eq.(16.10) e com as derivadas em (16.12). Substituindo as derivadas das funções de forma conforme (16.12), o momento fletor é dado por um polinômio linear ao longo do elemento, como em (16.13)

$$\frac{1}{EI_{zz}} M_z(\bar{x}) = \frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2} = \left(\frac{12\bar{x}}{L_e^3} - \frac{6}{L_e^2}\right)\overline{v}_1 + \left(-\frac{4}{L_e} + \frac{6\bar{x}}{L_e^2}\right)\overline{\theta}_1 + \left(\frac{6}{L_e^2} - \frac{12\bar{x}}{L_e^3}\right)\overline{v}_2 + \left(\frac{6\bar{x}}{L_e^2} - \frac{2}{L_e}\right)\overline{\theta}_2.$$

Como esse é um polinômio linear, o valor máximo do momento no elemento ocorre num dos dois nós, i.e., em $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = L_e$. Os **valores nodais dos momentos** no elemento são:

$$\boxed{\begin{aligned} M_z(0) &= -\frac{2EI_{zz}}{L_e^2}\left[3\overline{v}_1 + 2L_e\overline{\theta}_1 - 3\overline{v}_2 + L_e\overline{\theta}_2\right], \\ M_z(L_e) &= \frac{2EI_{zz}}{L_e^2}\left[3\overline{v}_1 + L_e\overline{\theta}_1 - 3\overline{v}_2 + 2L_e\overline{\theta}_2\right]. \end{aligned}} \tag{16.59}$$

Etapa 6 - As **tensões normais** nos nós do elemento são obtidas **sobrepondo** a tensão normal

do problema axial e do problema de flexão, atuando nas fibras extremas de cada nó, isto é, nas coordenadas $\bar{y}_{\max}$ e $\bar{y}_{\min}$ (em caso de seção simétrica, tem-se $\bar{y}_{\max} = h/2$ e $\bar{y}_{\min} = -h/2$, onde h é a altura da seção transversal da barra, ao longo da direção y). Observe que nesses dois pontos, as parcelas de tensão associadas a N_x são idênticas, mas as parcelas associadas a momento M_z são de mesmo módulo e sinais contrários. As **tensões normais** nos dois nós do elemento, nas fibras extremas de cada nó são visualizadas na Figura 16.11, e calculadas por:

$$\begin{aligned}
&\text{Nó local 1} \begin{cases} \text{fibra superior:} & \sigma^s_{xx}(0) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(0)}{I_{zz}}\bar{y}_{\max}, \\ \text{fibra inferior:} & \sigma i_{xx}(0) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(0)}{I_{zz}}\bar{y}_{\min}, \end{cases} \\
&\text{Nó local 2} \begin{cases} \text{fibra superior:} & \sigma^s_{xx}(L_e) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(L_e)}{I_{zz}}\bar{y}_{\max}, \\ \text{fibra inferior:} & \sigma^i_{xx}(L_e) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(L_e)}{I_{zz}}\bar{y}_{\min}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{16.60}$$

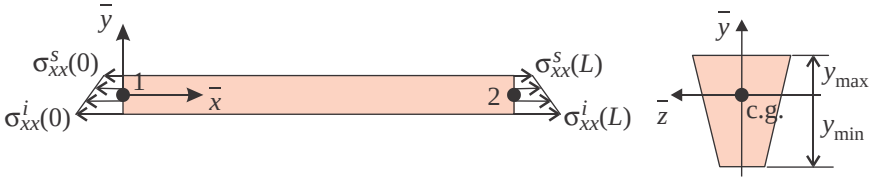


Figura 16.11: Tensões extremas num elemento devidas ao esforço normal e momento fletor.

16.4.1 Exemplo 16.2 - Esforços e tensões

Determine os deslocamentos, esforços e tensões nos elementos do Exemplo 1.

Solução:

(a) Elemento 1

Os deslocamentos nas direções locais são obtidos por (16.55) com orientação do elemento dada por $\psi = 90°$:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & \text{sen } 90° & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } 90° & \cos 90° & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 90° & \text{sen } 90° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,401 \cdot 10^{-2} \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix},$$

$$\longrightarrow \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ -1,401 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix}. \tag{16.61}$$

Esses valores nodais podem ser levados à aproximação da curva elástica de flexão, eq.(16.9):

$$\begin{aligned}\overline{v}\,(\bar{x}) &= \overline{v}_1\phi_1\,(\bar{x}) + \overline{\theta}_1\phi_2(\bar{x}) + \overline{v}_2\phi_3(\bar{x}) + \overline{\theta}_2\phi_4(\bar{x}),\\ &= 0\;\phi_1\,(\bar{x}) + 0\;\phi_2(\bar{x}) + (-1,401\cdot 10^{-2})\phi_3(\bar{x}) + (9,469\cdot 10^{-4})\phi_4(\bar{x}).\end{aligned} \tag{16.62}$$

Trazendo as expressões de $\phi_3(\bar{x})$ e $\phi_4(\bar{x})$ de (16.10) e simplificando para $L_1 = 1.000$ mm, se obtém para o deslocamento e a rotação no elemento 1:

$$\begin{aligned}\overline{v}\,(\bar{x}) &= 9,742\cdot 10^{-10}\bar{x}^3 - 9,8893\cdot 10^{-7}\bar{x}^2,\\ \theta\,(\bar{x}) &= 2,9248\cdot 10^{-9}\bar{x}^2 - 1,9779\cdot 10^{-6}\bar{x}, \qquad \forall\bar{x}\in(0;L_1).\end{aligned} \tag{16.63}$$

Dessas equações de pode determinar que em $\bar{x}_a = 676{,}3$ mm, o deslocamento transversal é máximo, com valor $\overline{v}_{\max} = -\,0{,}1508$ mm, onde $\theta = 0$, e em $\bar{x}_b = 338{,}1$ mm, o ângulo de rotação da normal é máximo, de valor $\theta_{\max} = -\,3,344\cdot 10^{-4}$.A Figura 16.12a ilustra a configuração deformada do elemento 1, com indicações dos valores nodais e dos máximos de deslocamento transversal e rotações da normal. Note que a figura é sem escala, pois a escala tornaria invisível os deslocamentos em comparação com o comprimento da viga.

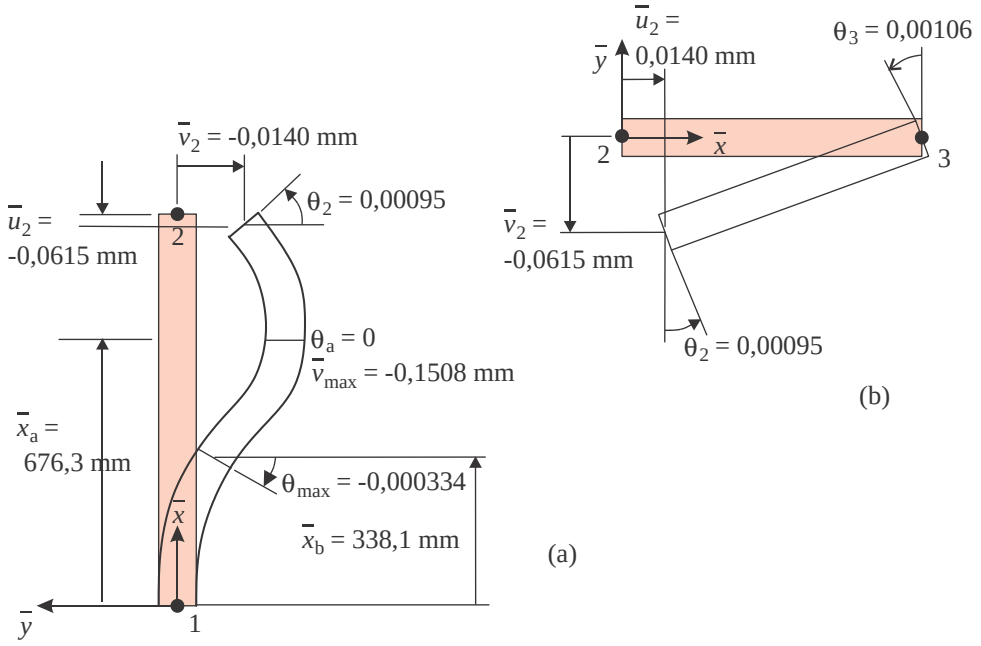


Figura 16.12: Configuração deformada do elemento 1, com indicações dos valores nodais e dos máximos de deslocamento transversal e rotações da normal. (Sem escala.)

Os esforços normais e de momento fletor vêm de (16.57) e de (16.59):

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{EA}{L_1}\left[-\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right] = \frac{EA}{L_1}\left[0 - 6,146\right]\cdot 10^{-2} = -155\text{ kN},\\ M_z(0) &= -\frac{2EI_{zz}}{L_1^2}\left[3\overline{v}_1 + 2L_1\overline{\theta}_1 - 3\overline{v}_2 + L_1\overline{\theta}_2\right]\end{aligned}$$

$$= -\frac{2EI_{zz}}{L_1^2}\left[3\times 1,401\cdot 10^{-2} + 1000\times 9,469\cdot 10^{-4}\right] = -5,98\cdot 10^6\text{ Nmm},$$

$$
\begin{aligned}
M_z(L) &= \frac{2EI_{zz}}{L_1^2}\left[3\overline{v}_1 + L_1\overline{\theta}_1 - 3\overline{v}_2 + 2L_1\overline{\theta}_2\right] \\
&= \frac{2EI_{zz}}{L_1^2}\left[3\times 1,401\cdot 10^{-2} + 2\times 1000\times 9,469\cdot 10^{-4}\right] = 1,17\cdot 10^7 \text{ Nmm} \quad (16.64)
\end{aligned}
$$

onde, dos dados do Exemplo 1, $EA/L_1 = 2,52\cdot 10^6$ N/mm e $EI_{zz}/L_1^2 = 3,02\cdot 10^6$ N. A Figura 16.13 mostra o diagrama de esforços de momento fletor em ambos os elementos.

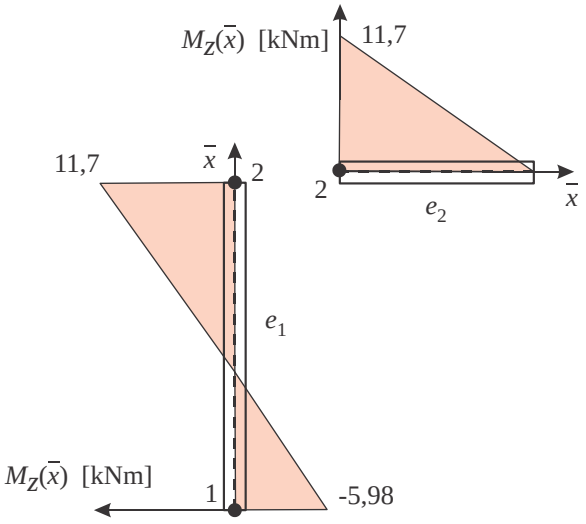


Figura 16.13: Esforços de momento nos elementos do Exemplo.

As **tensões normais** em cada nó do **elemento 1** são calculadas usando (16.60), para altura de seção $h = 120$ mm, o que resulta nas cotas $y_{\min} = -60$ mm e $y_{\max} = 60$ mm. Assim as tensões no **elemento 1** são:

$$
\text{Nó local 1}\quad\begin{cases}
\text{fibra superior:} & \sigma^s_{xx}(0) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(0)}{I_{zz}}\bar{y}_{\max} \\
& \quad = \dfrac{-154.870}{12.000} - \dfrac{-5,98\cdot 10^6}{14,4\cdot 10^6}60 = 12,0 \text{ MPa}, \\
\text{fibra inferior:} & \sigma^i_{xx}(0) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(0)}{I_{zz}}\bar{y}_{\min} \\
& \quad = \dfrac{-15.487}{12.000} - \dfrac{-5,98\cdot 10^6}{14,4\cdot 10^6}(-60) = -37,8 \text{ MPa},
\end{cases}
$$

$$
\text{Nó local 2}\quad\begin{cases}
\text{fibra superior:} & \sigma^s_{xx}(L) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(L)}{I_{zz}}\bar{y}_{\max} \\
& \quad = \dfrac{-154.870}{12.000} - \dfrac{1,17\cdot 10^7}{14,4\cdot 10^6}60 = -61,7 \text{ MPa} \\
\text{fibra inferior:} & \sigma^i_{xx}(L) = \dfrac{N_x}{A} - \dfrac{M_z(L)}{I_{zz}}\bar{y}_{\min} \\
& \quad = \dfrac{-154.870}{12.000} - \dfrac{1,17\cdot 10^7}{14,4\cdot 10^6}(-60) = 35,9 \text{ MPa}.
\end{cases} \quad (16.65)
$$

A tensão devido ao esforço normal é $N_x/A = -12,9$ MPa e a parcela de flexão nos nós 1 e 2

são, em valor absoluto, são 24,9 MPa e 48,8 MPa, respectivamente. Os valores extremos de tensão normal em cada nó do elemento são ilustradas diagramaticamente na Figura 16.11.

(b) Elemento 2

Os deslocamentos nas direções locais do elemento 2 são obtidos por (16.55), usando os deslocamentos dos nós 2 e 3 obtidos de (16.52), com orientação do elemento dada por $\psi = 0°$. Isso resulta na matriz de rotação $\mathbf{T}$ igual a uma matriz identidade de ordem 6. Assim, os deslocamentos nodais no sistema local são:

$$\left\{\begin{array}{r} \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{\theta}_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 1,401 \cdot 10^{-2} \\ -6,146 \cdot 10^{-2} \\ 9,469 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 1,063 \cdot 10^{-3} \end{array}\right\}. \tag{16.66}$$

Esses valores nodais podem ser levados à aproximação da curva elástica de flexão, eq.(16.9):

$$\begin{aligned} \overline{v}\,(\bar{x}) &= \overline{v}_1\phi_1\,(\bar{x}) + \overline{\theta}_1\phi_2(\bar{x}) + \overline{v}_2\phi_3(\bar{x}) + \overline{\theta}_2\phi_4(\bar{x}), \\ &= (-6,146 \cdot 10^{-2})\phi_1\,(\bar{x}) + (9,469 \cdot 10^{-4})\phi_2(\bar{x}) + (0)\phi_3(\bar{x}) + (1,063 \cdot 10^{-3})\phi_4(\bar{x}) \end{aligned} \tag{16.67}$$

Trazendo as expressões das funções de forma $\phi_1(\bar{x})$-$\phi_4(\bar{x})$ de (16.10) e simplificando para $L_2 = 60$ mm, se obtém para o deslocamento e a rotação da normal no elemento 2:

$$\begin{aligned} \overline{v}\,(\bar{x}) &= -1,077 \cdot 10^{-8}(\bar{x} - 374,1)(\bar{x} - 60)(\bar{x} + 254,3), \\ \theta\,(\bar{x}) &= -3,231 \cdot 10^{-8}(\bar{x} - 241,4)(\bar{x} + 121,5), \qquad \forall \bar{x} \in (0;60)\text{mm}. \end{aligned} \tag{16.68}$$

Nota-se que nenhuma das raízes dessas equações encontra-se no intervalo $(0;60)$mm. Apesar que o deslocamento é um polinômio cúbico, sua plotagem no intervalo é visualmente quase uma reta, como visto na Figura 16.12b.

16.4.2 Exemplo 16.3 - Viga escalonada

Determinar os deslocamentos e as reações vinculares e para a estrutura mostrada nas Figuras 16.14.

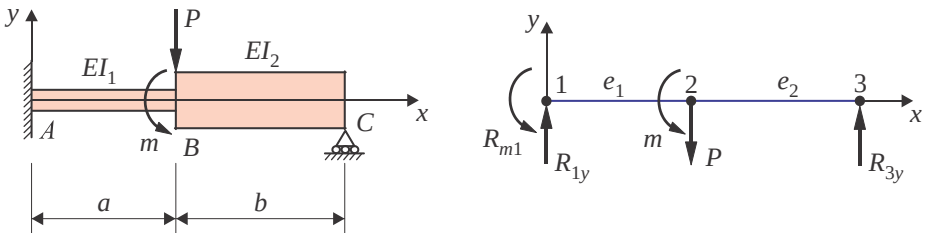


Figura 16.14: Dados do Exemplo 3 e modelo de elementos finitos de viga.

Solução:

Inicialmente, fazemos a discretização do problema, usando dois elementos de viga, como mostrado na Figura 16.14 a direita. Os dados são:

1. Coordenadas nodais:

Nó	x	y
1	0	0
2	a	0
3	$a+b$	0

.

2. Conectividade dos elementos:

Elemento	nó I	nó J
1	1	2
2	2	3

.

3. Propriedades de material e seção transversal nos elementos:

Elemento	E	I_{zz}
1	E	I_1
2	E	I_2

.

4. Forças e condições de contorno de deslocamentos:

Nó	direção y	rotação z
1	$\bar{v}_1 = 0$	$\theta_1 = 0$
2	$F_{2y} = -P$	$M_2 = m$
3	$\bar{v}_3 = 0$	$M_3 = 0$

Todas as demais forças prescritas são nulas: $F_{1y} = M_1 = F_{3y} = 0$ aplicadas nos graus de liberdades vinculados, e $R_{M3} = 0$ no grau de liberdade não vinculado (o nó 3 é livre para sofrer rotação). Esses valores nulos não precisam ser informados ao programa de MEF, pois eles são tomados nulos por default. Entretanto, o mesmo não se aplica a deslocamentos prescritos: todos eles devem ser explicitamente informados.

Observe que num modelo de elementos finitos verdadeiro, os dados devem sempre ser numéricos em vez de literais, como utilizados aqui. A forma literal utilizada em alguns exemplos do presente capítulo é usada apenas por conveniência de apresentação gráfica no texto.

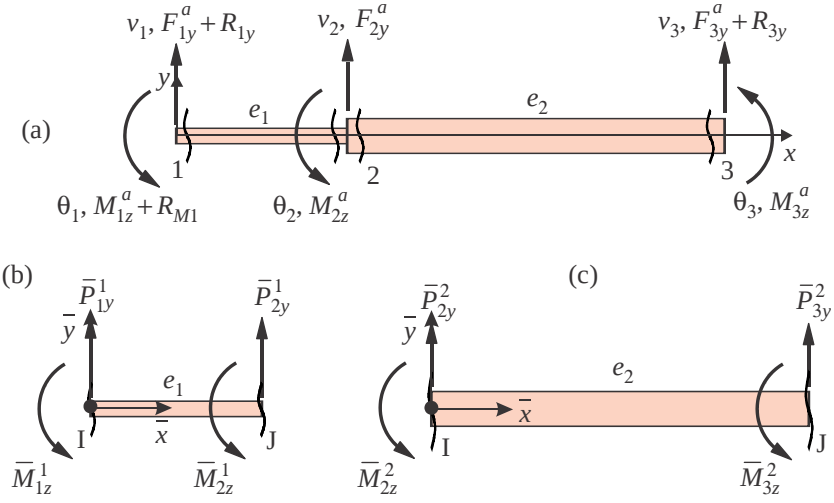


Figura 16.15: Forças nodais e graus de liberdade do modelo em (a), e esforços nos nós locais I e J dos elementos, em (b) e (c).

O modelo possui 6 graus de liberdade, v_1, θ_1, v_2, θ_2, v_3 e θ_3, associados a 6 forças nodais, F_1, M_1, F_2, M_2, F_3 e M_3 como ilustrado na Figura 16.15a, junto ao sistema global de coordenadas globais, xy. Na mesma figura temos cortes a distâncias infinitesimalmente próximos aos nós globais. A partir desses cortes temos os diagramas de corpo livre em cada elemento, como indicao nas Figuras 16.15b e (c). Nessas figuras temos os esforcos nos nós locais I e J de cada elemento. Cada um dos elementos possui seu próprio sistema local de coordenada $\bar{x}\bar{y}$, com origem no nó local I do elemento (lembrar que o nó local I de cada elemento é o primeiro dos dois nós indicados nos Dados de Conectividade). Os esforços nodais em cada elemento:

- no elemento 1, os esforços são $\overline{P}^1_{1y}$ e $\overline{M}^1_{1z}$ no nó 1, e $\overline{P}^1_{2y}$ e $\overline{M}^1_{2z}$ no nó 2;

- no elemento 2, os esforços são $\overline{P}^2_{2y}$ e $\overline{M}^2_{2z}$ no nó 2, e $\overline{P}^2_{3y}$ e $\overline{M}^2_{3z}$ no nó 3.

Observe que, como o a viga do exemplo tem todos os trechos colineares, podemos definir sistemas locais e global todos coincidentes, o que faz com que o ângulo de orientação de todos os elementos seja nulo, $\psi_e = 0°$. Uma vez que não há carregamentos axiais, todos os esforços e deslocamentos serão de flexão, sem parcela de comportamento de barra. Assim, optamos por usar apenas os graus de liberdade de flexão nas equações de equilíbrio dos elementos, eq.(16.39), o que resulta em (16.38). Poderiamos também resolver o problema incluindo todos os três graus de liberdade por nó, usando a equação completa do elemento, (16.39). Nesse caso, ao final, obteriamos no resultado valores de deslocamentos axiais nulos em todos os nós globais.

A **primeira etapa** de solução é o cálculo das matrizes de rigidez de cada elemento. Para o **elemento 1** sistema é

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{P}^1_{1y} \\ \overline{M}^1_{1z} \\ \overline{P}^1_{2y} \\ \overline{M}^1_{2z} \end{array}\right\} = \frac{EI_1}{a}\left[\begin{array}{cccc} 12/a^2 & 6/a & -12/a^2 & 6/a \\ 6/a & 4 & -6/a & 2 \\ -12/a^2 & -6/a & 12/a^2 & -6/a \\ 6/a & 2 & -6/a & 4 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}\right\}. \tag{16.69}$$

E o sistema de equilíbrio do **elemento 2** é:

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{P}_2 \\ \overline{M}_2 \\ \overline{P}_3 \\ \overline{M}_3 \end{array}\right\} = \frac{EI_2}{b}\left[\begin{array}{cccc} 12/b^2 & 6/b & -12/b^2 & 6/b \\ 6/b & 4 & -6/b & 2 \\ -12/b^2 & -6/b & 12/b^2 & -6/b \\ 6/b & 2 & -6/b & 4 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}\right\}. \tag{16.70}$$

O **processo de sobreposição** das matrizes no sistema global segue o procedimento usado no elemento de barra. Nesse caso, após a sobreposição da matriz do elemento 1 temos o sistema na forma:

$$\left\{\begin{array}{c} F^a_{1y} + R_{1y} \\ M^a_1 + R_{M1} \\ F^a_{2y} \\ M^a_{2y} \\ F^a_{3y} + R_{3y} \\ M^a_3 \end{array}\right\} = E\left[\begin{array}{cccccc} 12I_1/a^3 & 6I_1/a^2 & -12I_1/a^3 & 6I_1/a^2 & 0 & 0 \\ 6I_1/a^2 & 4I_1/a & -6I_1/a^2 & 2I_1/a & 0 & 0 \\ -12I_1/a^3 & -6I_1/a^2 & 12I_1/a^3 & -6I_1/a^2 & 0 & 0 \\ 6I_1/a^2 & 2I_1/a & -6I_1/a^2 & 4I_1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}\right\}.$$

As reações, R_1, R_{M1} e R_{3y} são incógnitas, e as demais forças, F^a_{1y}, M^a_1, etc., são valores de carregamento aplicados, conhecidos. Após a sobreposição da matriz do elemento 2 temos o sistema algébrico final de equações de equilíbrio:

$$E\begin{bmatrix} 12I_1/a^3 & 6I_1/a^2 & -12I_1/a^3 & 6I_1/a^2 & 0 & 0 \\ 6I_1/a^2 & 4I_1/a & -6I_1/a^2 & 2I_1/a & 0 & 0 \\ -12I_1/a^3 & -6I_1/a^2 & 12\left[I_1/a^3+I_2/b^3\right] & -6\left[I_1/a^2-I_2/b^2\right] & -12I_2/b^3 & 6I_2/b^2 \\ 6I_1/a^2 & 2I_1/a & -6\left[I_1/a^2-I_2/b^2\right] & 4\left[I_1/a+I_2/b\right] & -6I_2/b^2 & 2I_2/b \\ 0 & 0 & -12I_2/b^3 & -6I_2/b^2 & 12I_2/b^3 & -6I_2/b^2 \\ 0 & 0 & 6I_2/b^2 & 2I_2/b & -6I_2/b^2 & 4I_2/b \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^a_{1y}+R_{1y} \\ M^a_1+R_{M1} \\ F^a_{2y} \\ M^a_{2y} \\ F^a_{3y}+R_{3y} \\ M^a_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}. \tag{16.71}$$

Em forma compacta, esse sistema tem a forma:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}. \tag{16.72}$$

A **etapa de aplicação do carregamento** é idêntica ao procedimento mostrado na formulação de MEF de barras. O vetor de forças nodais, $\mathbf{F}$, é constituído por uma parte de forças conhecidas, $\mathbf{F}^a$, e outra de reações nos apoios, $\mathbf{R}$, tal que $\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}$. No presente exemplo tem-se

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} F^a_{1y}=0 \\ M^a_1=0 \\ F^a_{2y}=-P \\ M^a_{2y}=m \\ F^a_{3y}=0 \\ M^a_3=0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ R_{M1} \\ -P \\ m \\ R_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16.73}$$

O vetor $\mathbf{F}^a$ é inicializado, $\mathbf{F}^a = \mathbf{0}$, e em seguida os valores de força prescritas são impostos, i.e., $F_2 = -P$ e $M_2 = m$.

A **etapa de aplicação de condições de contorno** ao sistema algébrico também é idêntica ao processo utilizado nos elementos de barras. Primeiramente, gera-se um sistema auxiliar $\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$, obtido anulando as linhas do sistema e as colunas da matriz que correspondem aos graus de liberdade restritos, i.e., anulando os graus v_1, θ_1 e v_3. Em seguida impõe-se o valor 1 nas posições nulas da diagonal.

Com isso, o sistema modificado $\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$ toma a forma:

$$E\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12\left[I_1/a^3+I_2/b^3\right] & -6\left[I_1/a^2-I_2/b^2\right] & 0 & 6I_2/b^2 \\ 0 & 0 & -6\left[I_1/a^2-I_2/b^2\right] & 4\left[I_1/a+I_2/b\right] & 0 & 2I_2/b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6I_2/b^2 & 2I_2/b & 0 & 4I_2/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{16.74}$$

Uma vez que essas condições de contorno eliminam todos os movimentos de corpo rígido, **a matriz modificada $\bar{\mathbf{K}}$ é não singular**, e o sistema algébrico pode ser resolvido. Usando o método de Gauss, por exemplo, pode-se obter a solução. Uma vez que o presente exemplo foi desenvolvido em forma literal, a solução tem forma razoavelmente longa. Para simplificar a notação, consideramos

nesse ponto que os dados do problema tenham as seguintes relações,[1]

$$I = I_1, \qquad I_2 = 2I_1, \qquad b = 2a \qquad \text{e} \qquad m = Pa. \tag{16.75}$$

Com isso a solução para os deslocamentos nodais é obtida simbolicamente como

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \frac{Pa^2}{276EI_1} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -10a \\ 33 \\ 0 \\ -9 \end{array} \right\}. \tag{16.76}$$

A **etapa** de cálculo das **reações nos apoios** é realizada usando (16.72) e (16.73), i.e., tomando a decomposição do vetor força como $\mathbf{F} = \mathbf{F^a} + \mathbf{R}$, tal que o vetor de reações é obtido por:

$$\boxed{\mathbf{R} = -\mathbf{F}^a + \mathbf{K}\mathbf{U}} \tag{16.77}$$

Toma-se a rigidez original $\mathbf{K}$ e o vetor deslocamento $\mathbf{U}$, que agora totalmente é conhecido em (16.76). Assim,

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -P \\ Pa \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$+EI \left[\begin{array}{cccccc} 12/a^3 & 6/a^2 & -12/a^3 & 6/a^2 & 0 & 0 \\ 6/a^2 & 4/a & -6/a^2 & 2/a & 0 & 0 \\ -12/a^3 & -6/a^2 & 1/a^3 & -3/a^2 & -3/a^3 & 3/a^2 \\ 6/a^2 & 2/a & -3/a^2 & 4/a & -3/a^2 & 2/a \\ 0 & 0 & -3/a^3 & -3/a^2 & 12I_2/b^3 & -3/a^2 \\ 0 & 0 & 3/a^2 & 2/a & -3/a^2 & 4I_2/b \end{array} \right] \times \frac{Pa^2}{276EI} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -10a \\ 33 \\ 0 \\ -9 \end{array} \right\}, \tag{16.78}$$

Realizando as operações tem-se as reações

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} = \frac{P}{46} \left\{ \begin{array}{c} 53 \\ 21a \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{16.79}$$

A **etapa** de cálculo dos **esforços de momento e tensões normais** de flexão é realizada como segue. O cálculo é feito elemento a elemento. Primeiramente, identificamos os deslocamentos nodais no **elemento 1**, a partir do vetor global $\mathbf{U}$ de deslocamentos:

$$\mathbf{u}^{e_1} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \frac{Pa^2}{276EI_1} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -10a \\ 33 \end{array} \right\}. \tag{16.80}$$

Em seguida, identificamos a **curva elástica de cada elemento**, com o auxílio das funções de interpolação e de (16.8)

[1] Nota-se que, uma vez que o MEF é um método computacional, a solução do problema não se torna mais ou menos fácil com a inclusão ou não dessas simplificações.

$$\bar{v}\left(\bar{x}\right)=\underbrace{\left(1-3\frac{\bar{x}^2}{a^2}+2\frac{\bar{x}^3}{a^3}\right)}_{\phi_1(\bar{x})}\overline{v}_1+\underbrace{\frac{\bar{x}}{a}\left(a-2\bar{x}+\frac{\bar{x}^2}{a}\right)}_{\phi_2(\bar{x})}\overline{\theta}_1+\underbrace{\left(3\frac{\bar{x}^2}{a^2}-2\frac{\bar{x}^3}{a^3}\right)}_{\phi_3(\bar{x})}\overline{v}_2+\underbrace{\left(-\frac{\bar{x}^2}{a}+\frac{\bar{x}^3}{a^2}\right)}_{\phi_4(\bar{x})}\overline{\theta}_2 \quad (16.81)$$

e a rotação e o momento fletor em cada seção vêm de (16.13):

$$\begin{aligned}
\theta(\bar{x}) &= \frac{dv}{d\bar{x}}=\overline{v}_1\left(\frac{6\bar{x}^2}{a^3}-\frac{6\bar{x}}{a^2}\right)+\overline{\theta}_1\left(1-4\frac{\bar{x}}{a}+\frac{3\bar{x}^2}{a^2}\right)+\overline{v}_2\left(\frac{6\bar{x}}{a^2}-\frac{6\bar{x}^2}{a^3}\right)+\overline{\theta}_2\left(\frac{3\bar{x}^2}{a^2}-\frac{2\bar{x}}{a}\right),\\
\frac{M_z(\bar{x})}{EI_{zz}} &= \frac{d^2\overline{v}}{d\bar{x}^2}=\overline{v}_1\left(\frac{12\bar{x}}{a^3}-\frac{6}{a^2}\right)+\overline{\theta}_1\left(-\frac{4}{a}+\frac{6\bar{x}}{a^2}\right)+\overline{v}_2\left(\frac{6}{a^2}-\frac{12\bar{x}}{a^3}\right)+\overline{\theta}_2\left(\frac{6\bar{x}}{a^2}-\frac{2}{a}\right),\\
-\frac{V_y(\bar{x})}{EI_{zz}} &= \frac{d^3\overline{v}}{d\bar{x}^3}=\overline{v}_1\left(\frac{12}{a^3}\right)+\overline{\theta}_1\left(\frac{6}{a^2}\right)+\overline{v}_2\left(-\frac{12}{a^3}\right)+\overline{\theta}_2\left(\frac{6}{a^2}\right). \qquad (16.82)
\end{aligned}$$

Todas essas equações são válidas para $\bar{x}\in(0;L_e)$, que é o domínio de validade das funções de forma. Se usarmos (16.80), essas expressões se simplificam para o **elemento 1**:

$$\begin{aligned}
\bar{v}\left(\bar{x}\right)&=\frac{P\bar{x}^2}{276EI_1}\left(53\bar{x}-63a\right), & \theta(\bar{x})&=\frac{P\bar{x}}{92EI_1}\left(53\bar{x}-42a\right)\\
M_z(\bar{x})&=\frac{P}{46}\left(53\bar{x}-21a\right), & V_y(\bar{x})&=-\tfrac{dM_z}{d\bar{x}}=-\frac{P}{46}53.
\end{aligned} \qquad (16.83)$$

Temos então a curva elástica do elemento 1, e a função de esforços de momentos fletores. Uma vez que o **momento fletor tem variação linear no elemento**, como visto acima, o seu valor máximo ocorre num dos nós do elemento. Os dois valores nos nós do elemento são:

$$M_z(\bar{x}=0)=\frac{-21Pa}{46}, \qquad M_z(\bar{x}=a)=\frac{32Pa}{46}, \qquad (16.84)$$

o que mostra que o momento máximo no **elemento 1** ocorre no nó 2: $M^{\mathrm{e1}}_{\max}=M_2=32Pa/46$. Com isso, a tensão normal máxima no **elemento 1** é:

$$\sigma_{xx}(a)=-\frac{M^{\mathrm{e1}}_{\max}}{I_1}\bar{y}_{\max}. \qquad (16.85)$$

O procedimento para o cálculo da tensão normal e esforços no **elemento 2** é idêntico ao do elemento 1.

Valores numéricos

Consideremos o problema com os seguintes **valores**: $P=100$ N, $m=Pa$, $E=200$ GPa, $a=1.000$ mm, $b=2a$. O elemento 1 com seção transversal tubular de diâmetros interno e externo iguais a $d=45,3$ mm e $D=50$ mm respectivamente ($I_1=10^5$ mm^4) no elemento 2 com diâmetros $d=53,87$ mm e $D=59,46$ mm ($I_2=2I_1$). A solução dos deslocamentos nodais e das reações vem de (16.76) e (16.79), que produzem os seguintes valores:

$$\mathbf{U}=\left\{\begin{array}{c}v_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\\ v_3\\ \theta_3\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ -0,1812\text{ mm}\\ 5,978\cdot10^{-3}\text{ rad}\\ 0\\ -1,63\cdot10^{-3}\text{ rad}\end{array}\right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}=\left\{\begin{array}{c}R_{1y}\\ R_{M1}\\ F_{2y}\\ M_2\\ R_{3y}\\ M_3\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}115,2\\ 45.652\\ -100\\ 10^5\\ -15,22\\ 0\end{array}\right\}.$$

Os esforços de momentos fletores nos nós do **elemento 1** vem de (16.84):

$$\begin{aligned}
&\text{Nó 1} \quad \rightarrow \quad M_z^{e_1}(\bar{x}=0) = \frac{-21Pa}{46} = \frac{-21\times 100\times 1000}{276} = -45.652 \text{ Nmm},\\
&\text{Nó 2} \quad \rightarrow \quad M_z^{e_1}(\bar{x}=a) = \frac{32Pa}{46} = \frac{32\times 100\times 1000}{46} = 69.565 \text{ Nmm}
\end{aligned} \tag{16.86}$$

E as tensões normais de flexão nos nós do elemento 1, no ponto $y = y_{\min} = -D/2$, são:

$$\begin{aligned}
&\text{Nó 1} \quad \rightarrow \quad \sigma_x(0) = -\frac{M_z^{e_1}(0)}{I_1}\bar{y}_{\min} = -\frac{(-45.652)}{10^5}(-50/2) = -11,41 \text{ MPa},\\
&\text{Nó 2} \quad \rightarrow \quad \sigma_x(a) = -\frac{M_z^{e_1}(a)}{I_1}\bar{y}_{\min} = -\frac{69.565}{10^5}(-50/2) = 17,4 \text{ MPa}.
\end{aligned} \tag{16.87}$$

No **elemento 2** os esforços nos dois nós locais do elemento, isto é, o nó local 1 (que está logo à direita do nó global 2), e no nó local 2 (que está logo à esquerda no nó global 3), são:

$$\begin{aligned}
&\text{Nó 2} \quad \rightarrow \quad M_z^{e_2}(\bar{x}=0) = \frac{-14Pa}{46} = \frac{-14\times 100\times 1000}{276} = -30.435 \text{ Nmm},\\
&\text{Nó 3} \quad \rightarrow \quad M_z^{e_2}(\bar{x}=b) = 0.
\end{aligned} \tag{16.88}$$

As tensões normais de flexão nos nós do elemento 2, no ponto $\bar{y} = \bar{y}_{\min} = -D/2$, são:

$$\begin{aligned}
&\text{Nó 2} \quad \rightarrow \quad \sigma_x(0) = -\frac{M_z^{e_2}(0)}{I_2}y_{\min} = -\frac{(-30.435)}{2\cdot 10^5}(-59,46/2) = -4,52 \text{ MPa},\\
&\text{Nó 2} \quad \rightarrow \quad \sigma_x(0) = -\frac{M_z^{e_2}(b)}{I_2}y_{\min} = 0.
\end{aligned} \tag{16.89}$$

Observação - Os esforços de momento e cortantes e as tensões normais na cota $\bar{y}_{\min}$ em cada elemento são visualizados na Figura 16.16. Nota-se que os esforços mostrados seguem a convenção de esforços de teoria de vigas, mostrados na Figura 16.16a e são distintos dos esforços nodais de elementos finitos vistos na Figura 16.1. A convenção usada na teoria de vigas é aquela associada à equação diferencial da curva elástica, eq. (16.1) e às expressões de momento fletor e cortante, eqs. (16.13) e (16.82). Já a convenção de **esforços nodais** do MEF, vista na Figura 16.1 é associada às definições das matrizes de rigidez dos elementos.

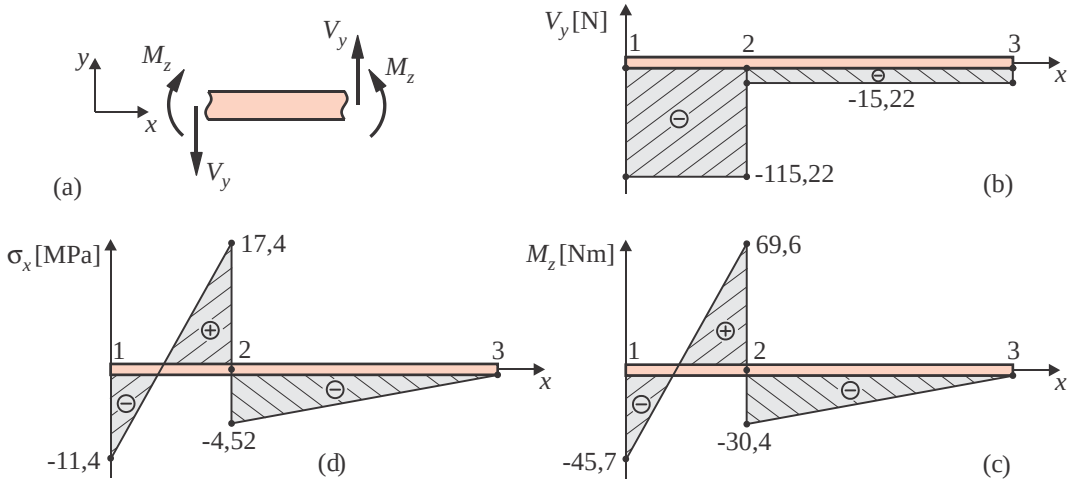


Figura 16.16: Esforços e tensões na viga escalonada do Exemplo 3.

Os **esforços cortantes** em ambos os elementos são obtidos derivando as expressões dos mo-

mentos fletores, o que produz a eq.$(16.82)_3$. Para o elemento 1, (16.83) produz o cortante $V_y(\bar{x}) = -53P/46 = -115,22$ N. No elemento 2, o cortante é $V_y(\bar{x}) = -7P/46 = -15,22$ N.

16.4.3 Exemplo 16.4 - Viga com seção uniforme

Determine a solução para o problema de flexão mostrado na Figura 16.17, usando elementos finitos, $P = 100$ N, $m = 0$, $E = 200$ GPa, $a = b = 500$ mm, seção tubular uniforme com $I_1 = 10^4$ mm^4,

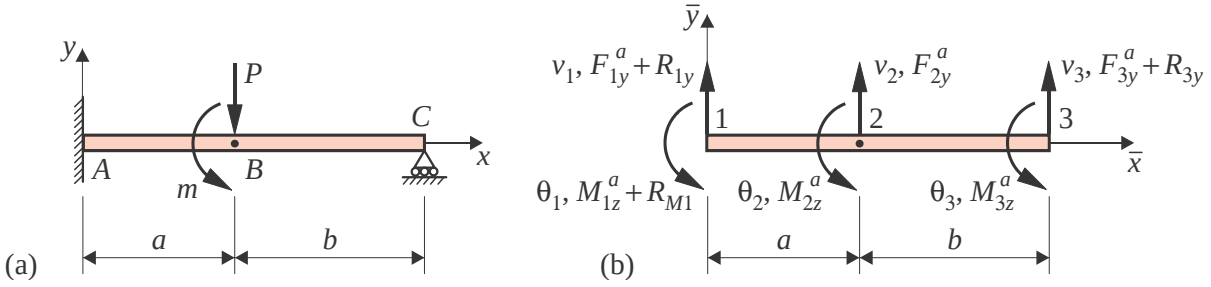


Figura 16.17: Dados do Exemplo 4 e modelo de elementos finitos de viga.

Solução

A Figura 16.17b mostra o modelo de elementos finitos utilizado, com dois elementos e três nós, e o carregamento e condições de contorno. Repetindo as operações do Exemplo 3, obtém-se o sistema algébrico de equações de equilíbrio do da viga:

$$\mathbf{F} = \frac{EI_{zz}}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a & 0 & 0 \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6a & 24 & 0 & -12 & 6a \\ 6a & 2a^2 & 0 & 8a^2 & -6a & 2a^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6a & 12 & -6a \\ 0 & 0 & 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}. \tag{16.90}$$

O vetor força é o mesmo do Exemplo 3, eq. (16.73). As condições de contorno de deslocamentos são as mesmas do Exemplo 3: $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$, e são aplicadas da mesma forma, anulando as linhas e colunas correspondentes a esses graus de liberdade. A aplicação dessas condições gera o sistema auxiliar modificado $\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$, onde $\bar{\mathbf{F}}$ é obtido aplicando os dados de carregamento:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -P & m & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T. \tag{16.91}$$

A solução é

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{a}{96EI_{zz}}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3ma - 7Pa^2 \\ 3\,(5m - Pa) \\ 0 \\ 12(Pa - m) \end{Bmatrix}. \tag{16.92}$$

Substituindo os valores numéricos do problema se obtém os deslocamentos nodais

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -0,456 \text{ mm} \\ -3,91 \cdot 10^{-4} \text{rad} \\ 0 \\ 1,56 \cdot 10^{-3} \text{rad} \end{array} \right\}. \tag{16.93}$$

As reações são obtidas por $\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^a$, onde $\mathbf{F} = \mathbf{KU} = \{68{,}73;\ 18.750;\ -100;\ 0;\ 31{,}25;\ 0\}$, de forma que as reações são $R_{1y} = 68{,}75$ N, $R_{M1} = 18.750$ Nmm e $R_{3y} = 31{,}25$ N.

16.4.4 Exemplo 16.5 - Aplicação de deslocamento prescrito

Considere a viga do Exemplo 4, na situação em que a seção C, em vez de estar vinculada pelo apoio simples, esteja submetida a um deslocamento prescrito vertical de $\bar{v} = +1,0$ mm (ver Figura 16.17). Determine os deslocamentos nodais na estrutura e identifique o valor de força transversal necessária a ser aplicada na seção C para produzir o deslocamento prescrito. Utilize os dados: $P = 100$ N, $m = 0$, $E = 200$ GPa, $a = b = 500$ mm, seção tubular com $I_1 = 10^5$ mm^4.

Solução:

Note que a forma de aplicar um deslocamento em algum ponto de uma estrutura sempre é feita pela aplicação de uma força. Entretanto, dependendo do procedimento de execução e das imposições de projeto, o que se tem como meta é a aplicação de um dado valor de deslocamento naquele ponto. O valor da força necessária é algo inicialmente desconhecido, a ser determinado posteriormente, quer na etapa de cálculos, como no presente exemplo, quer na fase de execução da montagem, utilizando instrumentação adequada para medição da força (por exemplo, uma célula de carga para a medição da força montado em série com o macaco hidráulico que efetivamente aplicará a força na estrutura).

O vetor força é o mesmo do Exemplo 3, eq. (16.73), que agora toma a forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} F_{1y} = 0 \\ M_1 = 0 \\ F_{2y} = -P \\ M_2 = m = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ M_3 = 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ -P \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} \tag{16.94}$$

O sistema algébrico equilíbrio do problema é obtido substituindo os valores numéricos na eq. (16.90):

$$\left\{ \begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ -100 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 192 & 48\text{E}3 & -192 & 48\text{E}3 & 0 & 0 \\ & 16\text{E}6 & -48\text{E}3 & 8\text{E}6 & 0 & 0 \\ & & 384 & 0 & -192 & 48.000 \\ & & & 32\text{E}6 & -48\text{E}3 & 8\text{E}6 \\ & & & & 192 & -48\text{E}3 \\ \text{sim.} & & & & & 16\text{E}6 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_2 = ? \\ v_3 = 1 \\ \theta_3 = ? \end{array} \right\}. \tag{16.95}$$

onde E3 significa $\cdot 10^3$, por exemplo. A aplicação do valor de deslocamento prescrito $u_3 = \bar{v} = 1$ no sistema corresponde a multiplicar a coluna 5 da matriz por 1, e transporta-la ao outro lado da igualdade. Essa coluna, de fato, corresponde a um novo vetor força, conhecido, que se soma ao vetor das forças aplicadas. Assim, o sistema modificado $\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$ toma a forma:

$$\left\{\begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ -100 \\ 0 \\ R_{3y} \\ M_3 \end{array}\right\} - \bar{v}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -192 \\ -48.000 \\ 192 \\ -48.000 \end{array}\right\}$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} 192 & 48E3 & -192 & 48E3 & 0 & 0 \\ 48E3 & 16E6 & -48E3 & 8E6 & 0 & 0 \\ -192 & -48E3 & 384 & 0 & 0 & 48E3 \\ 48E3 & 8E6 & 0 & 32E6 & 0 & 8E6 \\ 0 & 0 & -192 & -48E3 & 0 & -48E3 \\ 0 & 0 & 48E3 & 8E6 & 0 & 16\cdot 10^6 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_2 = ? \\ 0 \\ \theta_3 = ? \end{array}\right\}. \tag{16.96}$$

Nota-se que a coluna 5 tornou-se nula, e como conseqência, a matriz se torna não simétrica nessa etapa. O **procedimento completo para imposição de condições de contorno de deslocamento** não nulo pode ser identificado da seguinte forma:

1. Multiplicar o valor do deslocamento prescrito pela coluna associada, trocar o sinal dos termos e adiciona-los ao vetor força;
2. Zerar coluna j, isto é, fazer $K_{pj} = 0$ para $p = 1, 2, \cdots, N$;
3. Multiplicar a linha correspondente na matriz e no vetor força por zero;
4. Aplicar o valor 1 na diagonal correspondente da matriz;
5. Aplicar o valor $\bar{v}$ no termo correspondente do vetor força;
6. Esse processo incorpora a situação de deslocamento prescrito nulo. Nesse caso, tem-se simplesmente que $\bar{v} = 0$, o que não altera o vetor força.

No exemplo, o sistema modificado ($\bar{\mathbf{K}}\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}$) pelas condições $v_1 = \theta_1 = 0$ e $v_3 = \bar{v} = 1$, fica:

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -100 + 192 \\ 0 + 48.000 \\ \bar{v} \\ 0 + 48.000 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{384} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{48}\text{E3} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{32}\text{E6} & 0 & \mathbf{8}\text{E6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{48}\text{E3} & \mathbf{8}\text{E6} & 0 & \mathbf{16}\text{E6} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ \theta_2 = ? \\ v_3 \\ \theta_3 = ? \end{array}\right\}. \tag{16.97}$$

A solução do sistema produz

$$\mathbf{U} = \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0,1432 \\ 7,34\cdot 10^{-4} \\ 1 \\ 3,063\cdot 10^{-3} \end{array}\right\}. \tag{16.98}$$

Note que o procedimento produz a solução tanto as incógnitas quanto o valor prescrito $v_3 = 1$.
As **reações** são obtidas pela matriz $\mathbf{K}$ original, da eq.(16.95), por $\mathbf{R} = \mathbf{KU} - \mathbf{F}^a$, isto é:

$$\left\{\begin{array}{c} R_{1y} \\ R_{M1} \\ 0 \\ 0 \\ R_{3y} \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 62,75\ \text{N} \\ 12.750\ \text{Nmm} \\ -100\ \text{N} \\ 0 \\ 37,37\ \text{N} \\ 0 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} 62,75\ \text{N} \\ 12.750\ \text{Nmm} \\ -100\ \text{N} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 62,75\ \text{N} \\ 12.750\ \text{Nmm} \\ 0 \\ 0 \\ 37,37\ \text{N} \\ 0 \end{array}\right\}. \tag{16.99}$$

Nota-se que a força necessária de ser aplicada na seção C para gerar o deslocamento $v_3 = \bar{v} = 1$ mm é $R_{3y} = 37,37$ N, em conjunto com a força $P = -100$ N no nó 2.

16.5 Carga distribuída no elemento

Quando se tem apenas cargas concentradas, sua incorporação às equações de equilíbrio é feita por simples adição aos graus de liberdade adequados no vetor força aplicada conhecida $\mathbf{F}^a$. No caso de cargas transversais distribuídas aplicadas sobre o elemento, o procedimento consiste em determinar cum conjunto de valores nodais de forças concentradas a serem incorporados a $\mathbf{F}^a$. Essas forças concentradas são determinadas de forma a produzirem na viga um efeito similar àquele da carga distribuída. Apresentaremos aqui apenas os resultados, e deixamos sua dedução, que é baseada no princípio dos trabalhos virtuais, para literatura adequada, por exemplo, Mendonça e Fancello [7].

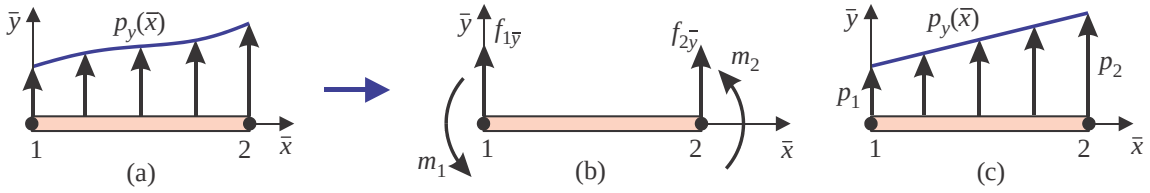


Figura 16.18: (a) Carga transversal distribuída arbitrária sobre um elemento de viga; (b) forças nodais equivalentes; (c) carga com variação linear.

Considere um elemento de viga submetido a uma **carga transversal arbitrária** $p_y(\bar{x})$ como na Figura 16.18a, definido em termos do sistema local de coordenadas do elemento. O vetor de cargas nodais equivalentes a essa carga distribuída é obtida a partir das funções de forma $\boldsymbol{\phi}(\bar{x})$ (dadas em (16.10)), por

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}}^e = \left\{\begin{array}{c} f_{1\bar{y}} \\ m_1 \\ f_{2\bar{y}} \\ m_2 \end{array}\right\} = \int_{\bar{x}=0}^{L_e} p_y(\bar{x}) \left\{\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{array}\right\} d\bar{x}} \tag{16.100}$$

onde f_{y1}, m_1, f_{y2} e m_2 são as forças nodais equivalentes, como ilustradas na Figura 16.18b. Esse vetor deve ser sobreposto aos vetores força equivalentes de carga distribuída nos demais elementos e às forças concentradas aplicadas sobre a estrutura, somando todas as forças aplicadas a cada nó global.

Consideremos o caso particular de uma **carga** $p_y(\bar{x})$ **variando linearmente** ao longo do elemento, como na Figura 16.18c, definida pelos valores p_1 e p_2, de forma que a carga é definida pelo polinômio linear $p_y(\bar{x}) = p_1(L_e - \bar{x})/L_e + p_2(\bar{x}/L_e)$. As forças concentradas equivalentes são obtidas efetuando as operações (16.100):

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}}^e = \left\{ \begin{array}{c} f_{1\bar{y}} \\ m_1 \\ f_{2\bar{y}} \\ m_2 \end{array} \right\} = \frac{L_e}{60} \left\{ \begin{array}{c} 3\,(7p_1 + 3p_2) \\ L\,(3p_1 + 2p_2) \\ 3\,(3p_1 + 7p_2) \\ -L\,(2p_1 + 3p_2) \end{array} \right\}} \tag{16.101}$$

No caso final de **carga uniforme**, $p_y(x) = p_o$, se tem

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}}^e = \left\{ \begin{array}{c} f_{1\bar{y}} \\ m_1 \\ f_{2\bar{y}} \\ m_2 \end{array} \right\} = \frac{p_o L_e}{12} \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{array} \right\}} \tag{16.102}$$

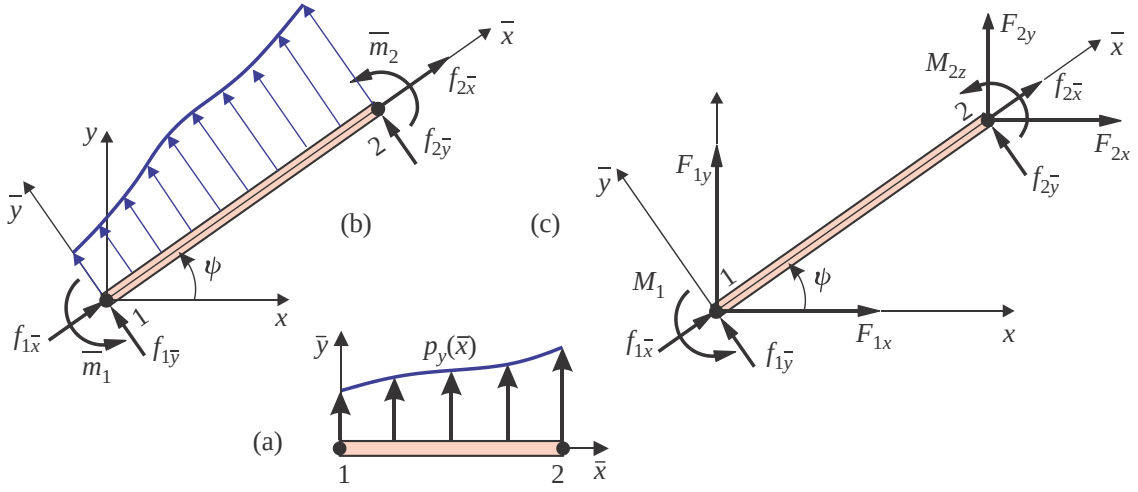


Figura 16.19: (a) Carga distribuída no sistema local de coordenadas, (b) carga com forças equivalentes no sistema local, (c) forças equivalentes no sistema global de coordenadas.

16.5.1 Rotação do vetor força para uso em elementos inclinados

Todo o desenvolvimento acima é restrito ao sistema local de coordenadas do elemento, como na Figura 16.19a. Se o elemento estiver rotacionado em relação ao sistema global, como na Figura 16.19b, o vetor força equivalente no sistema local do elemento, eqs. (16.100)-(16.102), precisa ser rotacionados ao sistema global. Isso é feito usando a eq. (16.41). Primeiro, o vetor (16.100) precisa ser expandido de forma a incluir as forças axiais. No caso de ausência de forças axiais distribuídas, tem-se o vetor local como:

$$\bar{\mathbf{F}}^e \equiv \left\{ \begin{array}{c} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ m_{1z} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \\ m_{2z} \end{array} \right\}^e = \int_{x=0}^{L} p_y(\bar{x}) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \phi_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ \phi_2 \\ \phi_2 \end{array} \right\} d\bar{x}. \tag{16.103}$$

Em seguida, o sistema local é rotacionado às direções globais por $\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{eT}\bar{\mathbf{F}}^e$ usando a matriz de rotação plana (16.41). Em forma aberta, no **caso particular de rotação plana**, essa relação fica

$$\left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{array}\right\}^e = \left[\begin{array}{cccccc} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ m_{1z} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \\ m_{2z} \end{array}\right\}^e \quad \text{isto é, } \mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{eT}\bar{\mathbf{F}}^e \tag{16.104}$$

onde $c = \cos\psi$, s =sen ψ, $\mathbf{T}$ é a matriz de rotação, ψ é o ângulo que o eixo local $\bar{x}$ faz como o global x. $\mathbf{F}^e$ e $\bar{\mathbf{F}}^e$ são o vetor de força consistente do elemento no sistema global e no sistema local, respectivamente. Observe que a matriz de rotação é a mesma usada para rotacionar a matriz de rigidez do elemento.

No caso particular de **carga variando linearmente** ao longo do elemento, como na Figura 16.18c, os termos não nulos do vetor de forças equivalentes $\bar{\mathbf{F}}^e$ podem ser tomados de (16.101). No sistema global (16.104) produz:

$$\left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{array}\right\}^e = \mathbf{T}^{eT}\frac{L_e}{60}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 3\,(7p_1+3p_2) \\ L\,(3p_1+2p_2) \\ 0 \\ 3\,(3p_1+7p_2) \\ -L\,(2p_1+3p_2) \end{array}\right\} = \frac{L_e}{60}\left\{\begin{array}{c} -3\,(7p_1+3p_2)\,s \\ 3\,(7p_1+3p_2)\,c \\ L\,(3p_1+2p_2) \\ -3\,(3p_1+7p_2)\,s \\ 3\,(3p_1+7p_2)\,c \\ -L\,(2p_1+3p_2) \end{array}\right\} \tag{16.105}$$

No caso de **carga uniforme**, $p_y(x) = p_o$, os termos não nulos do vetor de forças equivalentes $\bar{\mathbf{F}}^e$ podem ser tomados de (16.102). No sistema global (16.104) produz:

$$\left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{array}\right\}^e = \mathbf{T}^{eT}\frac{p_o L_e}{12}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 6 \\ -L \end{array}\right\} = \frac{p_o L_e}{12}\left\{\begin{array}{c} 6s \\ 6c \\ L \\ 6s \\ 6c \\ -L \end{array}\right\}. \tag{16.106}$$

Observação: A dedução da matriz de rigidez do elemento de viga foi feita usando as funções de forma cúbicas, (16.10). Da equação diferencial da curva elástica, $EI_{zz}\overline{v}^{(4)} = p_y(\bar{x})$, nota-se que se $p_y(\bar{x}) = 0$, a solução exata é um polinômio cúbico, de forma que a solução obtida por EF's é exata na ausência de carga distribuída. Da mesma forma, com carga distribuída aplicada, $p_y(\bar{x}) \neq 0$, a equação diferencial mostra que a solução exata será um polinômio de grau maior que 3, ou não será um polinômio, dependendo da função $p_y(\bar{x})$. Assim, uma vez que a matriz de rigidez foi obtida com funções de forma cúbicas, a solução de EF obtida será apenas a melhor aproximação cúbica do campo exato de deslocamento. Essa característica aproximativa se mantém, mesmo usando-se o vetor força nodal equivalente como em (16.103). De fato, o uso do vetor obtido dessa maneira é essencial para que a aproximação obtida seja a melhor possível.

16.5.2 Exemplo 16.6 - Viga sob carga distribuída

Considere o problema simples de uma viga biapoiada sob carga distribuída uniforme, como na Figura 16.20a. Determine a deflexão transversal nas seções $x = L/2$ e $L/4$ para modelagem com um e dois EF de viga. Determine os erros relativos comparando com a solução exata. Use os dados: $L = 1$ m, $q = 100$ kN/m, $I = 10^4\text{mm}^4$, $E = 200$ GPa.

Solução:

(a) Um elemento.

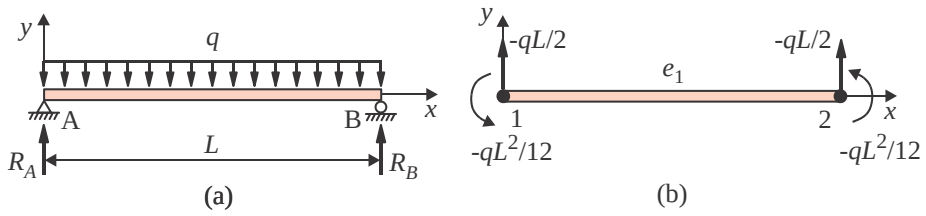


Figura 16.20: (a) Viga bi-apoiada do Exemplo 16.6; (b) modelo de um EF de viga com as cargas equivalentes.

Para um único elemento, a eq.(16.47) produz a matriz de rigidez no sistema global de coordenadas, que coincide com o sistema local do elemento, com $\psi = 0°$. O vetor força nodal equivalente ao carregamento distribuído uniforme é obtido de (16.106), e são visualizados na Figura 16.20b. Logo, a equação de equilíbrio é

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{qL}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16.107}$$

As condições de contorno de deslocamento são: $u_1 = v_1 = v_2 = 0$, de forma que se tem as reações R_{1x}, R_{1y} e R_{2y}. Impondo as condições de contorno no sistema, se obtém o sistema modificado

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = -\frac{qL^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \tag{16.108}$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{24EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{16.109}$$

A deflexão transversal no elemento é dada pelas funções de forma conforme (16.9):

$$\begin{aligned} \overline{v}(\bar{x}) &= \phi_1(\bar{x})\,\overline{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\overline{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\overline{\theta}_2, \\ &= \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_4(\bar{x})\overline{\theta}_2, \\ &= \frac{qL^3}{24EI}\left[-\frac{\bar{x}}{L}\left(L - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L}\right) + \left(\frac{\bar{x}^3}{L^2} - \frac{\bar{x}^2}{L}\right)\right] = -\frac{qL^3}{24EI}\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right). \end{aligned} \tag{16.110}$$

Em $\bar{x} = L/2$ e em $\bar{x} = L/4$ se tem:

$$\overline{v}(L/2) = -\frac{qL^4}{96EI}, \qquad \text{e} \qquad \overline{v}(L/4) = -\frac{qL^4}{384EI}, \tag{16.111}$$

A **solução exata** obtida pela integração da equação diferencial da curva elástica foi obtida em

(12.27) como $v = q\left[2Lx^3 - x^4 - L^3x\right]/24EI_z$. Assim, a solução exata nas duas seções é:

$$v = -\frac{5qL^4}{384EI} \quad \text{em } \bar{x} = L/2, \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{19qL^4}{2.048EI} \quad \text{em } \bar{x} = L/4. \tag{16.112}$$

(a) Dois elementos

Caso se use dois elementos de comprimentos idênticos, $L_1 = L_2 = L_e = L/2$, a matriz de rigidez de cada um pode ser obtida de (16.47). Entretanto, que apresentamos a matriz já eliminada dos graus de liberdade axiais u_1 e u_2:

$$\mathbf{K}^{e_1} = \mathbf{K}^{e_2} = \frac{EI}{L_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{16.113}$$

O vetor força nodal equivalente para cada elemento nas direções globais são coincidentes com os vetores nas direções locais, pois a orientação de cada elemento é dada por $\psi = 0°$. Assim os vetores vêm diretamente de (16.102):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{e_1} &= \begin{Bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \end{Bmatrix}^{e_1} = \frac{-qL_e}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ L_e \\ 6 \\ -L_e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \\ \mathbf{F}^{e_2} &= \begin{Bmatrix} f_{y2} \\ m_2 \\ f_{y3} \\ m_3 \end{Bmatrix}^{e_2} = \frac{-qL_e}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ L_e \\ 6 \\ -L_e \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{16.114}$$

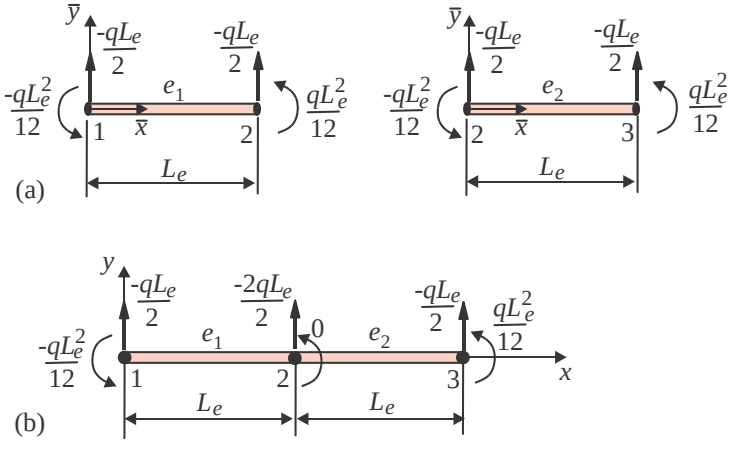


Figura 16.21: (a) Forças nodais equivalentes nos elementos 1 e 2; (b) Forças nodais equivalentes sobrepostas no modelo global.

Os vetores força equivalentes em cada elemento são visualizados na Figura 16.21a. O **vetor força nodal global** é obtido **sobrepondo os vetores de cada elemento**, usando o mesmo procedimento usado para sobrepor as matrizes de rigidez elementares. Então o vetor fica:

$$\mathbf{F}^a = \left\{ \begin{array}{c} f_{y1}^{e_1} \\ m_1^{e_1} \\ f_{y2}^{e_1} + f_{y2}^{e_2} \\ m_2^{e_1} + m_2^{e_2} \\ f_{y3}^{e_2} \\ m_3^{e_2} \end{array} \right\} = \frac{-qL_e}{12} \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ L_e \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ -L_e \end{array} \right\}. \tag{16.115}$$

onde $L_e = L/2$. Essas forças são ilustradas na visualizados na Figura 16.21b.

Observação: Nota-se um efeito inesperado nos valores dessas forças. A carga distribuída q gera uma força resultante qL, que deve ser distribuída nos três nós. Entretanto, o processo usado para gerar as forças equivalentes gerou forças $qL_e/2$ $(= qL/4)$ nos nós 1 e 3, e qL_e $(= qL/2)$ no nó 2, resultando $2qL_e/2 = qL$, que é igual à resultante da carga distribuída. Assim, o nó central suporta o dobro de força que cada um dos nós extremos. Entretanto, a intuição simples diria que uma força qL seria dividida igualmente entre os três nós, que estão igualmente espaçados, isto é, se teria $qL/3$ para cada nó. Por outro lado, a intuição simples não produziria momentos concentrados nos nós com o procedimento consistente indicado.

A matriz de rigidez global sobreposta e o sistema global de equilíbrio ficam:

$$\frac{EI}{L_e^3} \left[\begin{array}{cccccc} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e & & \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & & \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ & & 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \mathbf{F}^a + \mathbf{R}. \tag{16.116}$$

Aplicando as condições de contorno $v_1 = v_3 = 0$, se obtém um sistema modificado de 4 equações, cuja solução é:

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = -\frac{qL_e^3}{3EI} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 5L_e/8 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\}. \tag{16.117}$$

A solução do MEF no centro da viga, é o valor nodal no nó 2, isto é,

$$\overline{v} = v_2 = -\frac{5qL_e^4}{24EI} = -\frac{5qL^4}{384EI} \quad \text{em } \bar{x} = L/2. \tag{16.118}$$

Nota-se que esse é o valor exato de deslocamento, obtido em (16.112). Entretanto, a solução de EF não é exata. Consideremos a curva elástica de MEF do elemento 1, dada por (16.9). Os valores nodais são obtidos de (16.117) como:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = -\frac{qL_e^3}{3EI} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 5L_e/8 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{16.119}$$

Então a curva elástica fica:

$$\begin{aligned} \overline{v}\,(\bar{x}) &= \phi_1\,(\bar{x})\,\overline{v}_1 + \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\overline{v}_2 + \phi_4(\bar{x})\overline{\theta}_2, \\ &= \phi_2(\bar{x})\overline{\theta}_1 + \phi_3(\bar{x})\overline{v}_2, \\ &= -\frac{qL_e^3}{3EI}\left[\frac{\bar{x}}{L_e}\left(L_e - 2\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{L_e}\right) + \frac{5L_e}{8}\left(3\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^3\right)\right] \\ &= \frac{qL_e}{24EI}\bar{x}\left(2\bar{x}^2 + L_e\bar{x} - 8L_e^2\right) = \frac{qL}{96EI}\bar{x}\left(4\bar{x}^2 + L\bar{x} - 4L^2\right), \qquad \forall \bar{x} \in [0, L/2]. \end{aligned} \tag{16.120}$$

Por exemplo, no meio do elemento 1, isto é, em $\bar{x} = L_e/2$, (i.e., em $L/4$), se tem

$$\overline{v}\,(\bar{x}) = -\frac{9qL_e^4}{32EI} = -\frac{9qL^4}{512EI} \quad \text{em } \bar{x} = L_e/2, \tag{16.121}$$

A tabela mostra um resumo dos resultados exatos e de EF para o deslocamento no centro da viga e a 1/4 do apoio. Os valores entre parênteses são os valores de erro relativo. Nota-se que em $x = L/4$, o erro cai de 72 % para um EF para 1,75 % com dois elementos. As propriedades matemáticas do MEF fazem com que esse erro tenda a zero conforme se aumente o número de elementos no modelo.

EIv/qL^4	$x = L/2$	$x = L/4$
Exato	$5/384 = 0,01302$	$19/2.048 = 0,009277$
MEF 1 elemento	$1/96 = 0,0104$ (-20%)	$1/384 = 0,002604$ (-72%)
MEF 2 elementos	$5/384 = 0,01302$ (0%)	$7/768 = 0,009115$ $(-1,75\%)$

16.5.3 Exemplo 16.7 - Pórtico sob carga distribuída

Considere o problema do pórtico ilustrado na Figura 16.22, em que o elemento 1 esteja sujeito a uma carga distribuída normal q, e que seja aplicada uma força concentrada F no nó 2. Determine os deslocamentos nodais. Use os dados: $B = 1$ m, $H = 2$ m, $q = 0,2$ N/mm, $F = 50$ N, $I = 10^4$mm^4, $E = 200$ GPa.

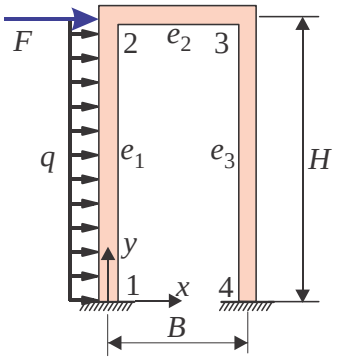


Figura 16.22: Pórtico do Exermplo 7.

Solução:

Os dados de conectividade dos elementos são:

Elemento	nó I	nó J
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Os comprimentos dos elementos 1 e 3 são $L_1 = L_3 = H = 2.000$ mm e do elemento 2 é $L_2 = 1.000$ mm. Os ângulos de orientação dos sistemas locais de coordenada em relação ao sistema global são $\psi_1 = 90°$, $\psi_2 = 0°$, $\psi_3 = -90°$, respectivamente. As matrizes de rigidez de cada elemento são obtidas substituindo esses valores na eq. (16.47), o que produz as seguintes equações de equilíbrio dos elementos:

- Matriz de **rigidez do elemento 1**. $\psi_1 = 90°$: (lembrar da notação D6 $= \cdot 10^6$)

$$\begin{bmatrix} 8,29 & 0,0 & -8,29\text{D}3 & -8,29 & 0,0 & -8,29\text{D}3 \\ & 5,76\text{D}4 & 0,0 & 0,0 & -5,76\text{D}4 & 0,0 \\ & & 1,11\text{D}7 & 8,29\text{D}3 & 0,0 & 5,53\text{D}6 \\ & & & 8,29 & 0,0 & 8,29\text{D}3 \\ & & & & 5,76\text{D}4 & 0,0 \\ \textit{sim.} & & & & & 1,11\text{D}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}, \tag{16.122}$$

- Matriz de **rigidez do elemento 2**. $\psi_2 = 0°$:

$$\begin{bmatrix} 1,15\text{D}5 & 0,0 & 0,0 & -1,15\text{D}5 & 0,0 & 0,0 \\ & 66,4 & 3,32\text{D}4 & 0,0 & -66,4 & 3,32\text{D}4 \\ & & 2,21\text{D}7 & 0,0 & -3,32\text{D}4 & 1,11\text{D}7 \\ & & & 1,15\text{D}5 & 0 & 0,0 \\ & & & & 66,4 & -3,32\text{D}4 \\ \textit{sim.} & & & & & 2,21\text{D}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_{2z} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}, \tag{16.123}$$

- Matriz de **rigidez do elemento 1**. $\psi_3 = -90°$:

$$\begin{bmatrix} 8,29 & 0,0 & 8,29\text{D}3 & -8,29 & 0,0 & 8,29\text{D}3 \\ & 5,76\text{D}4 & 0,0 & 0,0 & -5,76\text{D}4 & 0,0 \\ & & 1,11\text{D}7 & -8,29\text{D}3 & 0,0 & 5,53\text{D}6 \\ & & & 8,29 & 0,0 & -8,29\text{D}3 \\ & & & & 5,76\text{D}4 & 0,0 \\ \textit{sim.} & & & & & 1,11\text{D}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ M_{3z} \\ P_{4x} \\ P_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix}. \tag{16.124}$$

Vetor força nodal equivalente

O elemento 1 está submetido à carga transversal uniforme. O vetor força nodal equivalente nas **direções locais do elemento** é dado por é dado na (16.103) para $p_y(\bar{x}) = -q$ (em N e Nmm):

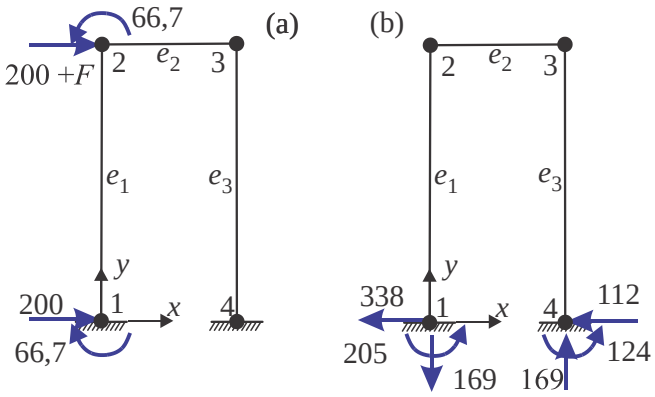
$$\bar{\mathbf{F}}^{e_1} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{M}_{1z} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{M}_{2z} \end{Bmatrix}^{e_1} = -\frac{qL_1}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200,0 \\ -6,67\text{D}+04 \\ 0 \\ -200,0 \\ 6,67\text{D}+04 \end{Bmatrix}. \tag{16.125}$$

e nas **direções globais** de coordenadas é dado na eq.(16.106)

$$\mathbf{F}^{e_1} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}^{e_1} = -\frac{qL_1}{12} \begin{Bmatrix} 6s \\ 6c \\ L \\ 6s \\ 6c \\ -L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200,0 \\ 0,0 \\ -6,67\text{D}+04 \\ 200,0 \\ 0,0 \\ 6,67\text{D}+04 \end{Bmatrix}. \tag{16.126}$$

onde $c = \cos\psi_1$, $s =$sen ψ_1. A sobreposição do vetor força nodal equivalente à carga distribuída no elemento 1 gera o vetor força global das cargas aplicadas conhecidas (em N e Nmm):

$$\mathbf{F}^a = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} 200,0 \\ 0,0 \\ -6,67\text{D}+04 \\ 200,0 \\ 0,0 \\ 6,67\text{D}+04 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$$



(a) Forças concentradas equivalentes ao carregamento distribudo, e $F = 50$ N; (b) Reaçes nos apoios. Valores em N e Nm.

A aplicação da força concentrada F no nó 2 é feita simplesmente adicionando na posição F_{2x}, o que gera (em N e Nmm):

$$\mathbf{F}^a = \left\{ \begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 200,0 \\ 0,0 \\ -66.667,0 \\ 200,0 \boxed{+50,0} \\ 0,0 \\ 66.667,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{array} \right\}$$

A Figura 16.5.3a mostra o conjunto de forças concentradas equivalentes à carga distribuída q, além da força $F = 50$ N aplicada no nó 2.

Após a imposição das **condições de contorno**, a solução do sistema algébrico gera os **deslocamentos nodais U**, cujos valores não nulos são (em mm e rad):

$$\left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 17,63 \\ 2,94\text{D-}3 \\ -1,049\text{D-}3 \\ 17,63 \\ -2,94\text{D-}3 \\ -4,063\text{D-}3 \end{array} \right\}.$$

As reações nos apoios são obtidas da forma usual, tomando a matriz de rigidez global original, de antes da imposição das condições de contorno, $\mathbf{K}$, e fazendo $\mathbf{R} = \mathbf{KU} - \mathbf{KF}^a$, o que produz (em N e Nm)

$$\left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{M1} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{M4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -338 \\ -169 \\ 207 \\ -113 \\ 169 \\ 124 \end{array} \right\}.$$

A Figura 16.5.3b mostra as reações nos apoios. Observando as figuras (a) e (b), nota-se que, no apoio A, as forças atuantes são devidas à carga distribuída e às reações. Por exemplo, $F_{1x} = F^a_{1x} + R_{1x} = 200 + (-338) = -138$ N.

- **Observação 1**: Finalmente, devemos ter claro que os valores obtidos acima, pelo MEF, são aproximativos, uma vez que parte da estrutura encontra-se sob carga distribuída, e a formulação usada é suficiente para determinar **soluções exatas** apenas no caso de carregamento concentrado.
- **Observação 2**: Adicionalmente, deve-se observar que a expressão usada acima, "solução exata", se refere apenas a ser a solução exata da equação diferencial do modelo usado, i.e, o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Assim, mesmo que não hovesse a carga distribuída, a solução obtida não seria exata para o modelo de viga de Timoshenko, por exemplo, ou qualquer outro modelo que não o de Euler-Bernoulli.

16.6 Exercícios

16.6.1 Exercícios conceituais

1. Determine as expressões dos esforços necessários mostrados em (16.33) para cada um dos casos de deslocamentos unitários mostrados.
2. Integre (16.22) e determine os termos da matriz de rigidez (16.25). Use um manipulador simbólico.
3. Determine a matriz de rigidez (16.47) efetuando as operações $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\overline{\mathbf{K}}^e\mathbf{T}$. Use um manipulador simbólico.
4. Porque um modelo de EF de um pórtico em que não há cargas distribuídas produz solução exata? E porque a solução é aproximada se algum elemento possui carga distribuída?
5. Na questão anterior, do pórtico sob carga distribuída, porque o uso de diversos EF's de viga para modelar cada segmento de viga reduz o erro da aproximação?
6. Num modelo de EF de uma viga de seção escalonada, qual o significado das tensões obtidas em regiões de transição entre escalonamentos contíguos? Como esses valores podem ser corrigidos?
7. Considere os resultados obtidos no modelo de EF de viga.
   (a) Qual o limite aproximado nos valores dos deslocamentos obtidos para que os resultados sejam compativeis com as hipóteses cinemáticas usadas?
   (b) E quais os valores limites de tensão para que a hipótese de modelo tensão-deformação usada seja satisfeita?
   (c) Qual o limite de espessura que a viga deve satisfazer para que o modelo de EF de viga mostrado nesse capítulo, baseado nas hipóteses de Euler-Bernoulli, produza resultados aceitaveis.

16.6.2 Exercícios numéricos

Para cada um dos problemas a seguir resolva os seguintes itens:

A Determine os blocos de dados padrão de EF para descrever o modelo. Determine a matriz de rigidez de cada elemento.

B Para cada elemento, identifique o sistema local de coordenadas, comprimento, material, momento de inércia e ângulo de orientação do elemento a ser usado no cálculo de sua matriz de rigidez.

C Sobreponha as matrizes elementares e obtenha a matriz de rigidez global.

D Identifique e aplique no sistema algébrico as condições de contorno e as forças nodais conhecidas.

E Obtenha os deslocamentos nodais e as rotações.

F Obtenha as reações nos apoios.

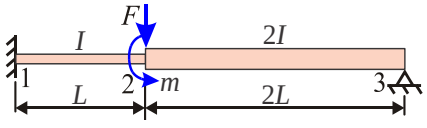
G Determine os esforços normais e de momento fletor nos nós. No caso de eixos, esboçe os diagramas.

H Obtenha as tensões normais σ_x nas fibras inferior e superior das seções dos nós de cada elemento. Em problemas com viga simples, compare a solução de EF com as soluções analíticas de deslocamento, esforços e tensões.

(a) Faça todos os detalhes de forma similar aos exemplos do capítulo.

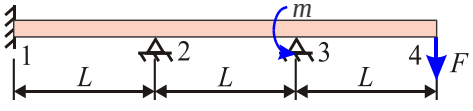
(b) Considere todos os elementos com seção tubular com diâmetro externo $D = 30$ mm e espessura $t = 6$ mm. $E = 200$ GPa, $L = 1$ m, $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$, $\gamma = 30^o$. Quando possível, use **condições de simetria** para simplificar a análise. Em cada elemento enumere os nós locais em ordem crescente da numeração global dos nós. Em vigas simples, numere os elementos a partir da esquerda. $F = 100$ N, $q = 0,1$ N/mm, $m = 10^6$ Nmm, $\sigma_E = 200$ MPa.

16.1 No elemento 2 usar $D = 45$ mm para o cálculo das tensões.



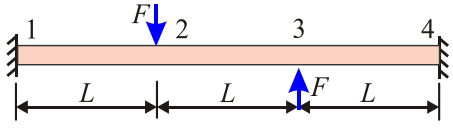
16.2 Resolva o Exercício 16.1 para $m = 0$, com seção uniforme igual a do elemento 1.

16.3



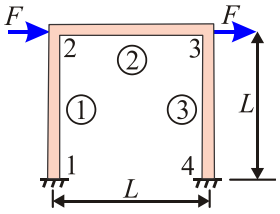
16.4 Resolva o Exercício 16.3 para $m = 0$.

16.5



16.6 Considere o Exercício 16.5 em que, em vez das cargas concentradas, é aplicado apenas um deslocamento vertical de valor $d = 1$ mm no nó 2. Determine também a força necessária no nó 2.

16.7

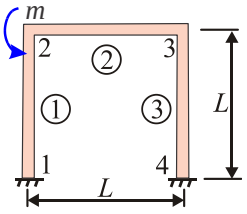


16.8 Resolva o Exercício 16.7 para apenas uma força F aplicada no nó 2.

16.9 Resolva o Exercício 16.7 substituindo as forças F por um deslocamento horizontal prescrito aplicado no nó 2, de valor $d = 1$ mm.

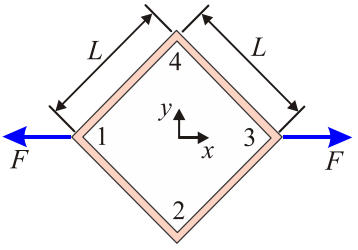
16.10 Resolva o Exercício 16.7 substituindo as forças F por dois deslocamentos horizontais prescritos aplicados nos nós 2 e 3, de valor $d = 1$ mm.

16.11



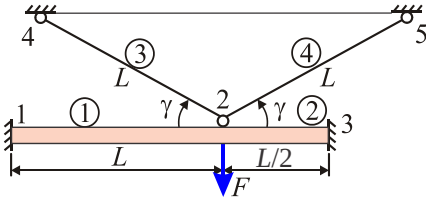
16.12 Resolva o Exercício 16.11 substituindo o momento m por uma rotação prescrita aplicada no nó 2, de valor $\delta = 1°$.

16.13 O quadro mostrado encontra-se solto no espaço, sob ação das duas forças. Obtenha a constante de mola do quadro. **Dica 1**: para simplificar a solução, aplique duas condições de simetria, modelando com apenas um elemento. **Dica 2**: a estrutura está desvinculada, o que significa que condições de contorno devem ser arbitradas. Entretanto, essas condições devem resultar no mesmo estado de tensões que a estrutura teria quando solta no espaço.



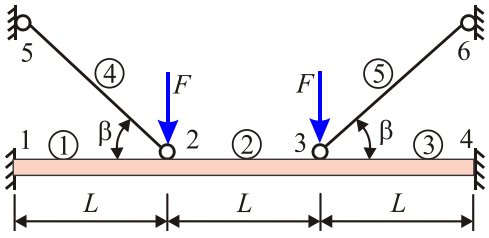
16.14 Os elementos 3 e 4 são cabos, com seção transversal de área $A = 100$ mm^2. (Dica: modele os cabos com elementos de viga

com momento de inércia bastante pequeno, como $I/10.000$ onde I é o momento da viga, e $D = 6$ mm. Ou use elementos de barra, fazendo a sobreposição de seus graus de liberdade nas posições correspondentes dos graus de viga do nó 2.)



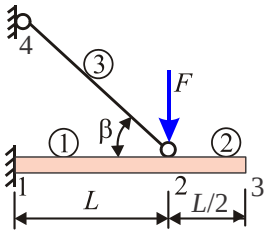
16.15 Resolva o Exercício 16.14 com o elemento 2 com comprimento L.

16.16 Os elementos 4 e 5 são de barra com $I/10.000$ onde I é o momento da viga, e $D = 6$ mm. Use as dicas do Exercício 16.14.

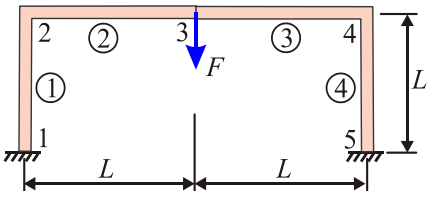


16.17 Resolva o Exercício 16.16 usando condição de simetria.

16.18 O elemento 3 é de barra com $I/10.000$ onde I é o momento da viga, e $D = 6$ mm. Use as dicas do Exercício 16.14.

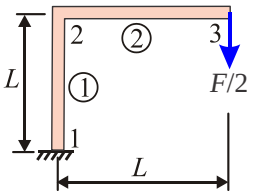


16.19



16.20 Resolva o Exercício 16.19 usando condição de simetria.

16.21 Use $F = 100$ N.

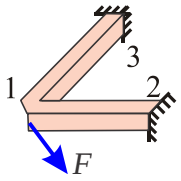


16.22 No Exercício 16.19 substitua a força por um deslocamento vertical $d = 1$ mm no nó 3. Quais são as forças necessárias?

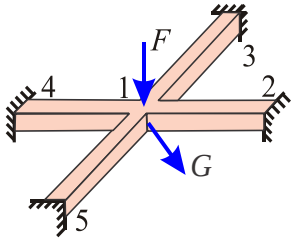
16.23 No Exercício 16.21 substitua a força por um deslocamento vertical $d = 1$ mm no nó 3. Quais são as forças necessárias?

16.24 No Exercício 16.21 substitua a força por um momento horário m no nó 3.

16.25 As duas vigas tem comprimento L e são perpendiculares entre si, unidas pelo nó 1. F é coplanar às vigas, formando um ângulo de 45°.



16.26 As quatro vigas tem comprimento L e são coplanares e perpendiculares entre si, unidas pelo nó 1. F é transversal ao plano formado pelas vigas e G é coplanar às vigas, formando um ângulo de 45°. Resolva para $G = 0$. Dica: use dois planos de simetria, de forma a ter apenas uma vigas.

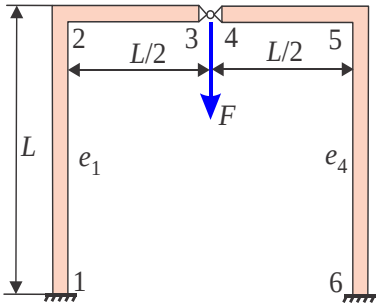


16.27 Resolva o Exercício 16.26 com $F = 0$ e $G = 10$ kN.

16.28 Resolva o Exercício 16.27 usando um plano de simetria.

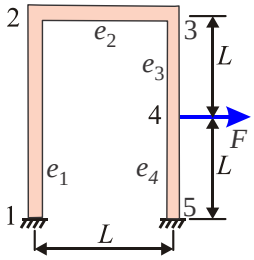
16.29 A seção C possui uma rótula. $F = 100$ N.

Use condição de simetria.

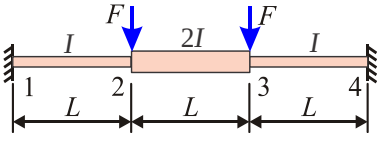


16.30 Resolva o Exercício 16.29 com $F = 0$ e uma carga distribuída $q = 0,1$ N/mm devido ao peso, aplicada nos elementos 2 e 3.

16.31 Use $F = 500$ N.

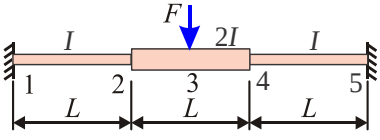


16.32 No elemento 2 usar $D = 45$ mm para as tensões. Use $F = 500$ N.



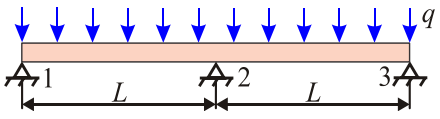
16.33 Resolva o Exercício 16.32 usando um plano de simetria.

16.34



16.35 Resolva o Exercício 16.34 usando um plano de simetria.

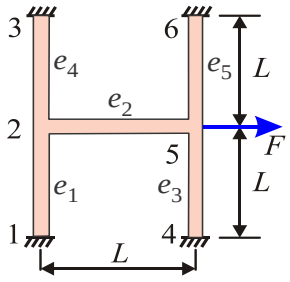
16.36



16.37 Resolva o Exercício 16.36 usando um plano de simetria.

16.38 Resolva o Exercício 16.31 com $F = 0$ e uma carga distribuída horizontal $q = 0,1$ N/mm devido ao vento, aplicada no elemento 1.

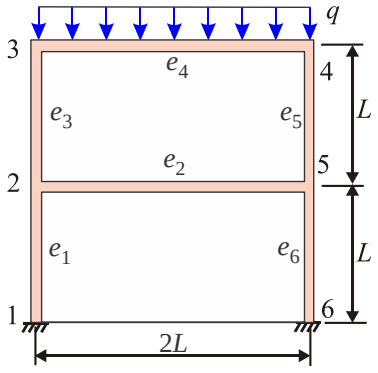
16.39 Obtenha também a rigidez de mola do conjunto.



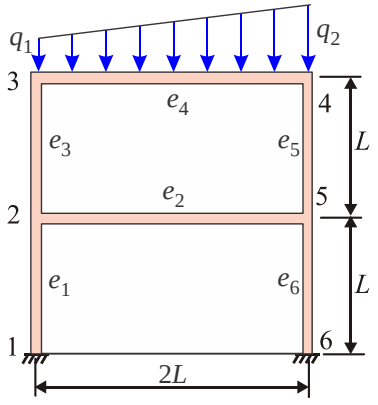
16.40 Resolva o Exercício 16.32 para uma carga transversal $q = 1$ N/mm uniformemente distribuída no elemento 2 e $F = 0$.

16.41 Resolva o Exercício 16.19 para uma carga transversal $q = 1$ N/mm uniformemente distribuída nos elementos 2 e 3.

16.42 A seção transversal dos elementos 2 e 4 tem diâmetro externo $D = 45$ mm, momento de inércia 69.216 mm^4 e área $A = 425,4$ mm^2.



16.43 A carga transversal é definida por $q_1 = 1$ N/mm e $q_2 = 2$ N/mm.



16.44 Resolva o Exercício 16.42 com o carregamento do Exercício 16.43.

Capítulo 17

Apêndices

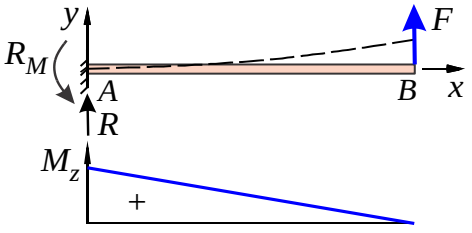
17.1 Fórmulas para vigas

A seguir há uma pequena coletânea de casos de vigas, resolvidos pela teoria de Euler-Bernoulli, denotados por $v(x)$.

Nos casos apresentados usa-se a seguinte notação:

$v(x)$	= deslocamento transversal pela teoria de Euler-Bernoulli.
$v_{\max}$	= deslocamento máximo.
L	= comprimento total da viga.
q	= força distribuída por unidade de comprimento.
θ	= $dv(x)/dx$, inclinação da superfície de referência.
E	= módulo de elasticidade do material.
$\overline{x}$	= posição do deslocamento máximo.
M_z, V_y	= esforços de momento fletor e cortante na viga. A convenção de sinais de esforços é aquela vista na Figura 2.16, pg. 23.

1.

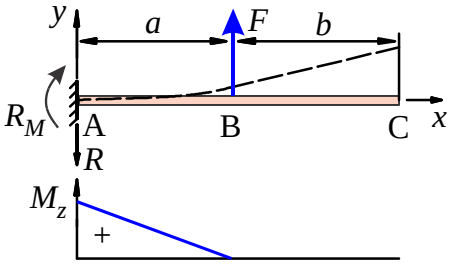


$$M_z(x) = -F(x-L), \qquad V_{\max} = -R = F.$$

$$M_{\max} = FL, \qquad R_M = -FL.$$

$$v(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3L-x), \; v_{\max} = \frac{FL^3}{3EI}, \; \theta_{\max} = \frac{FL^2}{2EI}.$$

2.



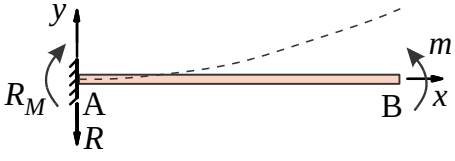
$$M_{AB}(x) = F\,(a-x)\,, \qquad R = F; \quad R_M = F\,a,$$

$$v_{AB}(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3a-x),$$

$$v_{BC}(x) = \frac{Fa^2}{6EI}(3x-a),$$

$$v_{\max} = \frac{Fa^2}{6EI}(3L-a).$$

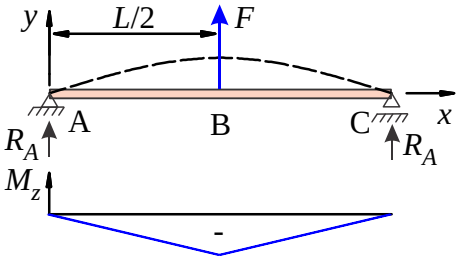
3.



$$M_z(x) = m = R_M, \; R = 0.$$

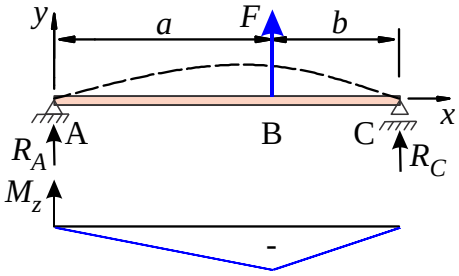
$$v(x) = \frac{mx^2}{2EI}, \qquad v_{\max} = \frac{mL^2}{2EI}, \; \theta_{\max} = \frac{mL}{EI}.$$

4.



$$M_{AB}(x) = -\frac{F\,x}{2},\ M_{BC}(x) = \frac{F}{2}\,(x-L)\,,\ M_{\max} = -\frac{F\,L}{4},$$
$$V_{\max} = -R_A = -R_B = \frac{F}{2}, v_{AB}(x) = \frac{Fx\left(3L^2-4x^2\right)}{48EI},$$
$$v_{BC}(x) = \frac{F(L-x)\left(3L^2-4(L-x)^2\right)}{48EI},$$
$$\theta_{AB}(x) = \frac{-F}{16EI}\left(4x^2-L^2\right),\ v_{\max} = \frac{FL^3}{48EI},\ \theta_{\max} = \frac{FL^2}{16EI}.$$

5.

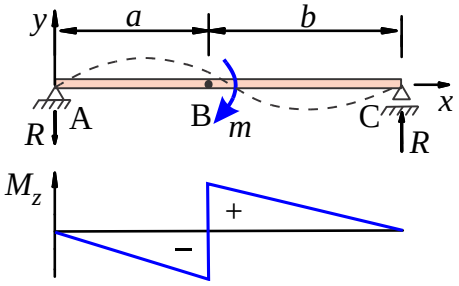


$$M_{AB}(x) = -\frac{Fbx}{L}, \qquad M_{BC}(x) = -\frac{Fa}{L}\,(L-x)\,,$$
$$v_{AB}(x) = \frac{Fbx\left(L^2-b^2-x^2\right)}{6EIL},\ R_A = -\frac{Fb}{L},\ R_C = -\frac{Fa}{L},$$
$$v_{BC}(x) = \frac{Fa\,(x-L)}{6EIL}(x^2+a^2-2L\,x),$$

Caso $a < b$, $v_{\max}$ ocorre em BC, em

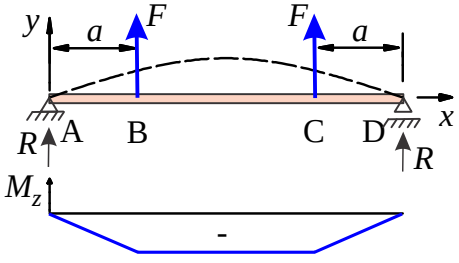
$\overline{x} = L - \sqrt{(L^2-a^2)/3}$. Caso contrário, $\overline{x}^2 = \dfrac{(L^2-b^2)}{3}$.

6.



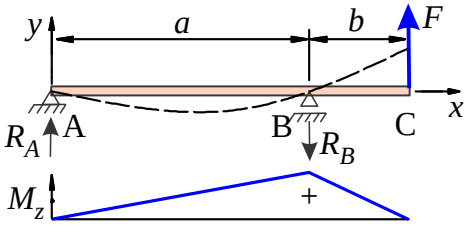
$$R = \frac{m}{L},\ M_{AB}(x) = -\frac{mx}{L}, \qquad \theta_B = \frac{-m(L^2-6ab)}{3EIL}.$$
$$M_{BC}(x) = -\frac{m}{L}\,(x-L)\,. \qquad \text{Se } a \geq b,\ v_{\max} \text{ é}$$
$$v_{\max} = -\frac{m\left[(3a(2L-a)-2L^2\right]^{3/2}}{9\sqrt{3}EI} \text{ em } 3\overline{x}^2 = (L^2-3b^2).$$
$$v_{AB}(x) = \frac{mx\left(6aL-2L^2-3a^2-x^2\right)}{6EIL},$$
$$v_B = \frac{mab}{3EI\,L}(a-b),$$
$$v_{BC}(x) = \frac{m\left(3Lx^2-x(2L^2+3a^2)+3a^2L-x^3\right)}{6EIL}.$$

7.



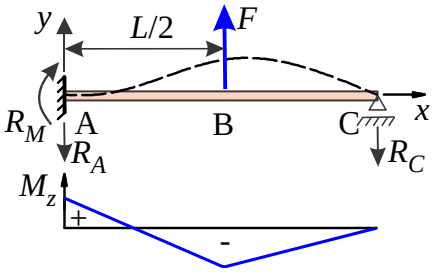
$$M_{AB}(x) = -Fx, \qquad M_{BC}(x) = -Fa,$$
$$M_{CD}(x) = -F\,(L-x), \qquad R = -F,$$
$$v_{AB}(x) = \frac{Fx\left(3aL-3a^2-x^2\right)}{6EI},$$
$$v_{BC}(x) = \frac{Fa\left(3Lx-a^2-3x^2\right)}{6EI},$$
$$v_{\max} = \frac{Fa\left(3L^2-4a^2\right)}{24EI}. \qquad \theta_{\max} = \frac{FaL}{2EI}.$$

8.



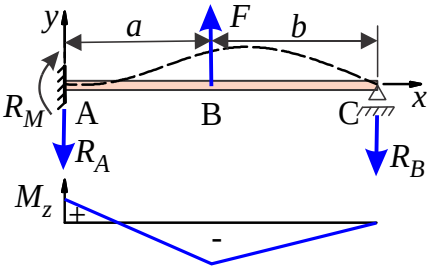
$$R_A = \frac{Fb}{a},\ R_B = \frac{FL}{a},\ M_{AB}(x) = \frac{Fbx}{a},\ v_C = b\theta_B,$$
$$M_{BC}(x) = F(L-x),\ v_{AB}(x) = \frac{Fbx\left(x^2-a^2\right)}{6EIa},$$
$$v_{BC}(x) = \frac{F\,(a-x)}{6EI}[(x-a)^2-b(3x-a)],$$
$$\theta_B = -2\theta_A = \frac{Fab}{3EI},\ v_C = \frac{Fb^2\,(a+b)}{3EI}$$
$$\text{Se } \frac{a}{b} > 6,05,\ v_{\max} = v_{AB\,\max} = -\frac{Fba^2}{9\sqrt{3}EI} \text{ em } \overline{x}^2 = \frac{a^2}{3}.$$

9.



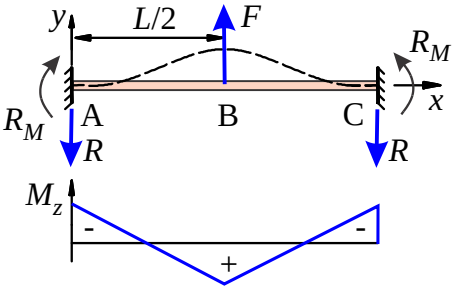
$R_A = \dfrac{11F}{16}$, $R_B = \dfrac{5F}{16}$, $R_M = \dfrac{3FL}{16}$, $\dfrac{M_{BC}(x)}{R_B} = (x-L)$,
$M_{AB}(x) = \dfrac{F(3L-11x)}{16}$, $v_{AB}(x) = \dfrac{Fx^2\,(9L-11x)}{96EI}$,
$\theta_{BC}(x) = -\dfrac{F(10Lx-4L^2-5x^2)}{32EI}$, $v_B = \dfrac{7FL^3}{768EI}$,
$v_{BC}(x) = \dfrac{F(x-L)}{96EI}[5x^2+2L^2-10Lx]$. $M_A = \dfrac{3FL}{16}$
$v_{\max} = \dfrac{FL^3}{48\sqrt{5}EI}$ em $\overline{x} = (1-\sqrt{5}/5)L$. $M_B = -\dfrac{5FL}{16}$.

10.



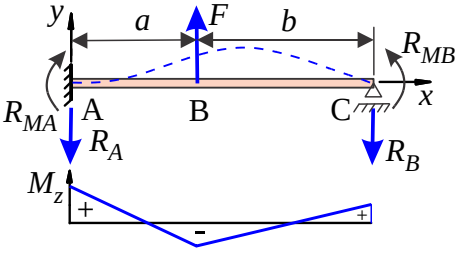
$\dfrac{R_A}{Fb} = \dfrac{3L^2-b^2}{2L^3}$, $\dfrac{R_B}{Fa^2} = \dfrac{3L-a}{2L^3}$, $\dfrac{R_M}{Fb} = \dfrac{L^2-b^2}{2L^2}$,
$\dfrac{M_B}{Fba^2} = -\dfrac{2a+3b}{2L^3}$, $\dfrac{M_{BC}}{Fa^2} = -\dfrac{(L-x)(3L-a)}{2L^3}$,
$M_{AB}(x) = -\dfrac{Fb\left[b^2L-L^3+x(3L^2-b^2)\right]}{2L^3}$. Se $a > \sqrt{2}b$,
$|M_B| > |M_A|$. $v_{BC}(x) = v_{AB}(x) + \dfrac{F\,(x-a)^3}{6EI}$,
$v_{AB}(x) = \dfrac{Fbx^2[3L(L^2-b^2)+x(b^2-3L^2)]}{12EIL^3}$.

11.



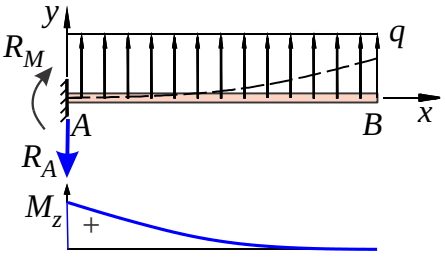
$R = \dfrac{F}{2}$, $R_M = M_A = -M_B = \dfrac{FL}{8}$,
$M_{AB}(x) = \dfrac{F(L-4x)}{8}$, $M_{BC}(x) = \dfrac{F(4x-3L)}{8}$,
$v_{AB}(x) = \dfrac{Fx^2(3L-4x)}{48EI}$, $v_{\max} = \dfrac{FL^3}{192EI}$,
$\theta_{\max} = \dfrac{FL^2}{64EI}$ em $\bar{x} = \dfrac{L}{4}$. $v_{BC}(x) = \dfrac{F(L-x)^2(L-4x)}{48EI}$.

12.



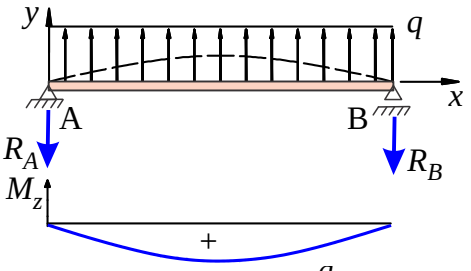
$R_A = \dfrac{Fb^2(3a+b)}{L^3}$, $R_B = \dfrac{Fa^2(3b+a)}{L^3}$, $R_{MA} = M_A = \dfrac{Fab^2}{L^2}$
$R_{MC} = M_C = \dfrac{Fa^2b}{L^2}$, $M_{AB}(x) = \dfrac{Fb^2}{L^3}[La - x(3a+b)]$,
$M_{BC}(x) = \dfrac{Fa^2}{L^3}[x(a+3b) - L(a+2b)]$, $M_B = -\dfrac{2Fa^2b^2}{L^3}$.
$\dfrac{v_{AB}(x)}{Fb^2} = \dfrac{x^2[3aL-x(3a+b)]}{6EIL^3}$, $M_{\max} = M_A$ se $b > a$.
$v_{BC}(x) = \dfrac{Fa^2(L-x)^2}{6EIL^3}[x(3L-2a) - aL]$. $v_B = \dfrac{F}{3EI}\left(\dfrac{ab}{L}\right)^3$

13.



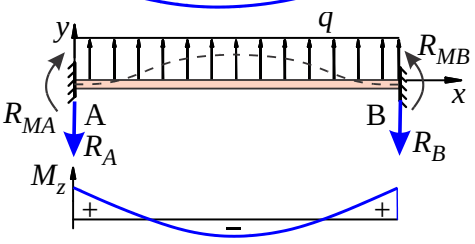
$R_M = \dfrac{qL^2}{2} = M_{\max}$, $R = qL$, $V_{\max} = qL$,
$M_z(x) = \dfrac{q(L-x)^2}{2}$, $\theta(x) = \dfrac{qx}{2EI}\left(\dfrac{x^2}{3} - Lx + L^2\right)$.
$v(x) = \dfrac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$,
$v_{\max} = \dfrac{qL^4}{8EI}$, $\theta_{\max} = \dfrac{qL^3}{6EI}$.

14.



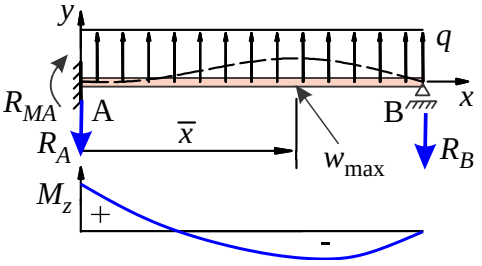
$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}, \qquad M_{\max} = -\frac{qL^2}{8},$$
$$M(x) = \frac{qx(x-L)}{2}, \qquad \theta_A = -\theta_B = \frac{qL^3}{24EI}.$$
$$v(x) = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3), \; v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI}.$$

15.



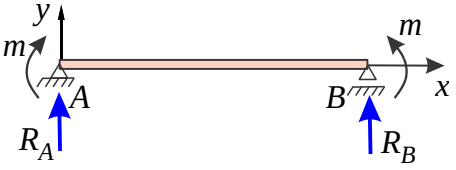
$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}, \qquad M_{\max} = M_A = M_C = \frac{qL^2}{12},$$
$$M_z(x) = \frac{q}{12}\left(6x^2 - 6Lx + L^2\right), \quad R_{MA} = R_{MB} = \frac{qL^2}{12}$$
$$v(x) = \frac{qx^2}{24EI}(L-x)^2, \quad v_{\max} = \frac{qL^4}{384EI},$$

16.



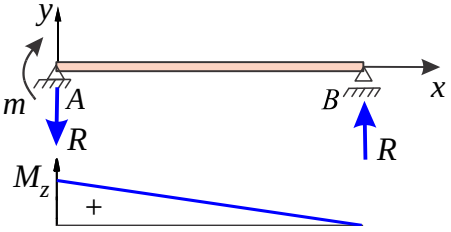
$$V_{\max} = R_A = 5qL/8, \qquad R_B = 3qL/8,$$
$$M_z(x) = \frac{q(4x^2 - 5Lx + L^2)}{8}. \; R_M = M_A = M_{\max} = qL^2/8.$$
$$\text{Em } \hat{x} = \frac{5L}{8}, \; V_y = 0 \text{ e } M_z = \frac{-9qL^2}{128}.$$
$$v(x) = \frac{qx^2}{48EI}(x-L)(2x-3L). \; \theta_{\max} = \theta_B = \frac{-qL^3}{48EI}.$$
$$v_{\max} = \frac{qL^4}{184,63EI} \text{ em } \overline{x} = \frac{1}{16}\left(15 - \sqrt{33}\right)L = 0,5785L.$$

17.



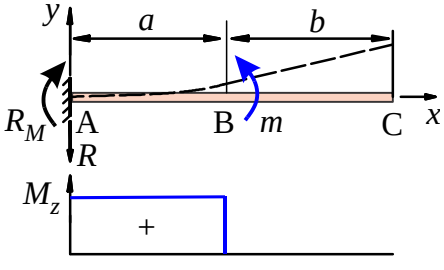
$$V_y(x) = R_A = R_B = 0, \qquad M_z(x) = m,$$
$$v(x) = \frac{mx(x-L)}{2EI}, \qquad v_{\max} = -\frac{mL^2}{8EI} \text{ em } x = \frac{L}{2},$$
$$\theta_{\max} = \mp\frac{mL}{2EI} \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L.$$

18.



$$R = V_y(x) = \frac{m}{L}, \qquad M_z(x) = \frac{m(L-x)}{L},$$
$$v(x) = \frac{mx}{6EIL}(3Lx - x^2 - 2L^2), \; \theta_{\max} = \theta(0) = \frac{-mL}{3EI}.$$
$$\theta(x) = \frac{m}{6EIL}(6Lx - 3x^2 - 2L^2), \; \theta_B = \frac{mL}{6EI}.$$
$$v_{\max} = -\frac{mL^2}{9\sqrt{3}EI} \text{ em } \overline{x} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)L \cong 0,4226\,L.$$

19.



$$R = 0, \qquad R_M = m,$$
$$M_{AB}(x) = m, \qquad M_{BC}(x) = 0,$$
$$v_{AB} = \frac{mx^2}{2EI}, \; v_{BC} = \frac{ma}{2EI}(2x - a).$$
$$v_B = \frac{ma^2}{2EI}, \quad v_C = \frac{ma}{2EI}(a + 2b), \; \theta_B = \theta_C = ma.$$

17.2 Solução de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem

Consideramos a equação diferencial ordinária, de coeficientes constantes de segunda ordem, linear, que tem a forma geral

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv\,(x) = f(x), \qquad (17.1)$$

definida em $x \in (x_1, x_2)$, onde a, b e c são constantes conhecidas e $f(x)$ uma função também conhecida, independente de v. Essa equação descreve uma grande quantidade de fenômenos físicos, incluindo a deflexão transversal de uma viga, como visto em diversos capítulos do presente livro, vibrações em sistemas de um grau de liberdade, comportamento de sistemas elétricos lineares resistência-capacitância-indutância e vários outros problemas. Seu estudo normalmente é objeto de parte de uma disciplina de graduação em Matemática. Apresentamos aqui um sumário das formas de solução geral dessa equação.

A solução geral pode ser escrita como a soma de duas funções, uma solução homogênea $v_h(x)$ e uma solução particular $v_p(x)$, tal que

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x). \tag{17.2}$$

$v_h(x)$ é a solução do problema homogêneo, i.e., satisfaz

$$a\frac{d^2v_h}{dx^2} + b\frac{dv_h}{dx} + cv_h\,(x) = 0, \tag{17.3}$$

e $v_p(x)$ depende da excitação $f(x)$ do problema, de forma que deve satisfazer

$$a\frac{d^2v_p}{dx^2} + b\frac{dv_p}{dx} + cv_p\,(x) = f(x). \tag{17.4}$$

Essa decomposição pode ser verificada facilmente substituindo em (17.1) o lado direito de (17.2). Isso é consequência da linearidade da equação diferencial.

Em seguida consideramos a **solução do problema homogêneo** (17.3). Pode-se verificar que qualquer função na forma

$$v_h(x) = Ae^{mx} \tag{17.5}$$

satisfaz a equação diferencial. Fazendo as derivações e substituindo em (17.3) e reordenando os termos obtém-se

$$Ae^{mx}\left[am^2 + bm + c\right] = 0. \tag{17.6}$$

Como Ae^{mx} é sempre não nulo, m deve ser tal que anule o polinômio entre colchetes:

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{17.7}$$

Essa é a chamada **equação característica** do problema. As raízes são obtidas por

$$m_1,\, m_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{17.8}$$

Dependendo do sinal de $g = b^2 - 4ac$, as raízes podem ser reais ou complexas. Tem-se então três casos possíveis:

- Caso 1 - $g = b^2 - 4ac > 0$: as raízes m são reais e distintas;
- Caso 2 - $g = b^2 - 4ac < 0$: as raízes m são complexas e
- Caso 3 - $g = b^2 - 4ac = 0$: existem duas raízes idênticas reais.

Caso 1, se $g = b^2 - 4ac > 0$, tem-se duas raízes m_1 e m_2 definidas por (17.8). Nota-se que a solução original proposta, (17.5), possui um único termo, definido por apenas um valor de m. Como se tem duas raízes, tem-se então duas soluções independentes para o problema, $A_1e^{m_1x}$ e $A_2e^{m_2x}$. Como a equação diferencial é linear, segue-se que uma combinação linear dessas soluções também é solução, i.e.,

$$v_h(x) = A_1e^{m_1x} + A_2e^{m_2x}. \tag{17.9}$$

onde A_1 e A_2 são constantes reais a serem obtidas numa etapa posterior a partir de **duas condições de contorno**.

Caso 1.1 - se a equação diferencial for tal que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -r < 0$, i.e.,

$$\frac{d^2v_h}{dx^2} - rv_h\,(x) = 0, \tag{17.10}$$

o que faz $g = b^2 - 4ac = -c > 0$. Então as raízes são $m_1 = -m_2 = \sqrt{r}$, e a solução homogênea (17.9) fica

$$v_h(x) = A_1e^{\sqrt{r}x} + A_2e^{-\sqrt{r}x}. \tag{17.11}$$

Uma forma alternativa para essa solução consiste em usar e^{m_1x} e e^{m_2x} para gerar outras duas funções independentes, o seno e cosseno hiperbólicos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}\sqrt{r}x &= \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{r}x} - e^{-\sqrt{r}x}\right) \text{ e} \\ \cosh\sqrt{r}x &= \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{r}x} + e^{-\sqrt{r}x}\right). \end{aligned} \tag{17.12}$$

Tabela 17.1: Resumo dos casos de equação diferencial de segunda ordem.

Caso	b^2-4ac	$m_1,\, m_2 =$	$v_h(x) =$
1	>0	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$A_1e^{m_1x}+A_2e^{m_2x}$
1.1	>0 ($a=1$, $b=0$ e $c=-r<0$)	$\sqrt{r}$	$A_1e^{\sqrt{r}x}+A_2e^{-\sqrt{r}x}$, ou $c_1\text{senh}\,\sqrt{r}x+c_2\text{cosh}\,\sqrt{r}x$
2	<0	$\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$	$e^{wx}\left[A_1\text{sen}yx+A_2\text{cos}yx\right]$
3	$=0$	$\dfrac{-b}{2a}$	$(A_1+A_2x)\,\text{sen}mx$

Então a solução homogênea (17.11) pode ser colocada na forma alternativa

$$v_h(x)=c_1\text{senh}\,\sqrt{r}x+c_2\text{cosh}\,\sqrt{r}x. \qquad (17.13)$$

Caso 2, se $g=b^2-4ac<0$, tem-se duas raízes m_1 e m_2 complexas, definidas por (17.8) através da inclusão da unidade complexa i:

$$m_1,\, m_2=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}. \qquad (17.14)$$

Essas duas raízes geram diretamente uma solução complexa na forma (17.9). Entretanto, existe uma sequência de manipulações que podem ser feitas para extrair uma solução real para o problema. Essa solução é colocada aqui sem dedução, que pode ser obtida em livros usuais de equações diferenciais ordinárias usadas em disciplinas de graduação. Primeiro reordenamos (17.14) da seguinte forma

$$m_1,\, m_2=w\pm iy,\ \text{onde}\ w=\frac{-b}{2a}\ \text{e}\ y=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}. \qquad (17.15)$$

A solução homogênea em forma real é

$$v_h(x)=e^{wx}\left[A_1\text{sen}yx+A_2\text{cos}yx\right]. \qquad (17.16)$$

Caso 3, se $g=b^2-4ac=0$, tem-se duas raízes idênticas, $m_1=m_2=m=-b/2a$. Existe demonstrações que provam que a equação de segunda ordem tratada aqui possui solução constituída de duas partes. Aqui se obteve apenas uma constante m da equação característica. Prova-se que uma segunda parcela de solução pode ser obtida, na seguinte forma:

$$v_h(x)=(A_1+A_2x)\,\text{sen}mx. \qquad (17.17)$$

17.2.1 Solução particular

Essa parte da solução depende da função de excitação $f(x)$ à direita da equação diferencial em (17.4). Em alguns casos essa solução pode ser obtida de maneira simples. Por exemplo, se $f(x)$ for um **polinômio**, como

$$f(x)=k_1+k_2x+k_3x^2, \qquad (17.18)$$

a solução particular também terá a forma de um polinômio do mesmo grau:

$$v_p(x)=q_1+q_2x+q_3x^2. \qquad (17.19)$$

As constantes q_1, q_2 e q_3 podem ser identificadas fazendo a substituição do polinômio $v_p(x)$ na equação diferencial (17.4) e igualando os coeficientes de cada potência de x:

$$\begin{aligned} &a\frac{d^2v_p}{dx^2}+b\frac{dv_p}{dx}+cv_p\,(x)=f(x),\\ &2aq_3+b\,(q_2+2q_3x)+c\left(q_1+q_2x+q_3x^2\right)\\ &\qquad\qquad =k_1+k_2x+k_3x^2. \end{aligned} \qquad (17.20)$$

Coletando os coeficientes para cada potência obtemos o sistema cuja solução produz as constantes da solução:

$$\begin{aligned} q_3 &= k_2/c, \qquad & q_2 &= k_2/c-2bk_3/c^2,\\ q_1 &= k_1/c-bq_2/c-2aq_3/c. \end{aligned} \qquad (17.21)$$

17.3 Fatores de concentração de tensões

Exceto onde indicado, a tensão nominal σ_o é baseada na seção mínima. $\sigma_{\max} = K_t \sigma_o$. Nas barras de seção retangular, h é a espessura.

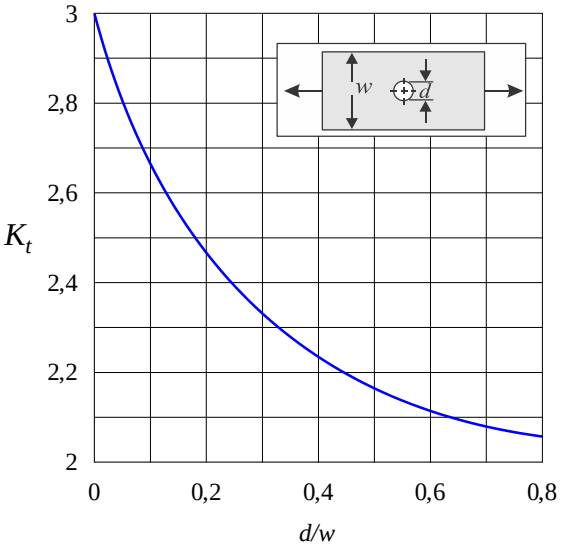


Figura Kt1. Tensão nominal $\sigma_o = F/(D-d)h$.

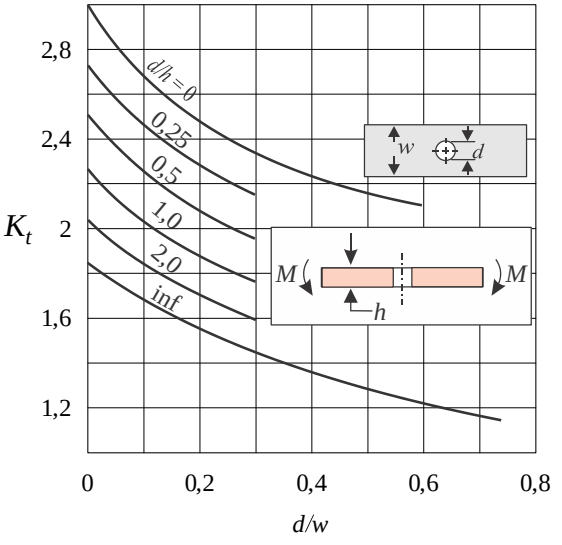


Figura Kt2. Tensão nominal $\sigma_o = M/I$, onde $I = (D-d)h^3/12$.

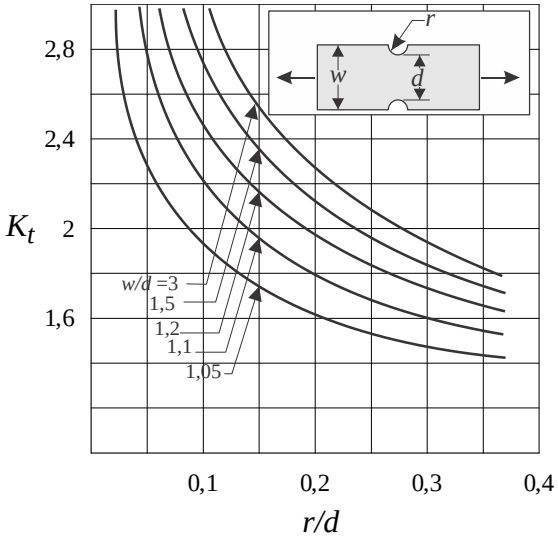


Figura Kt3

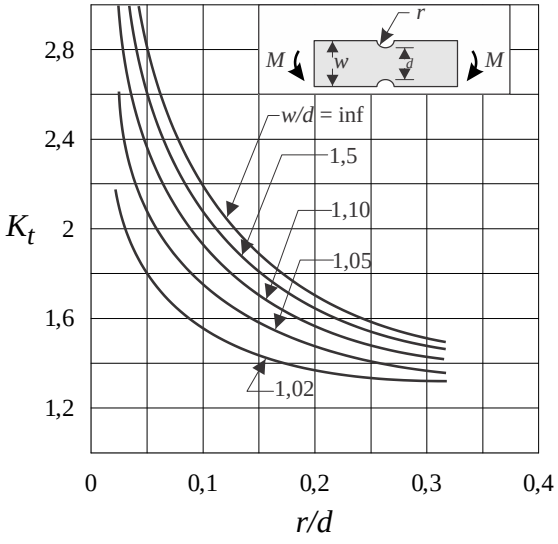


Figura Kt4

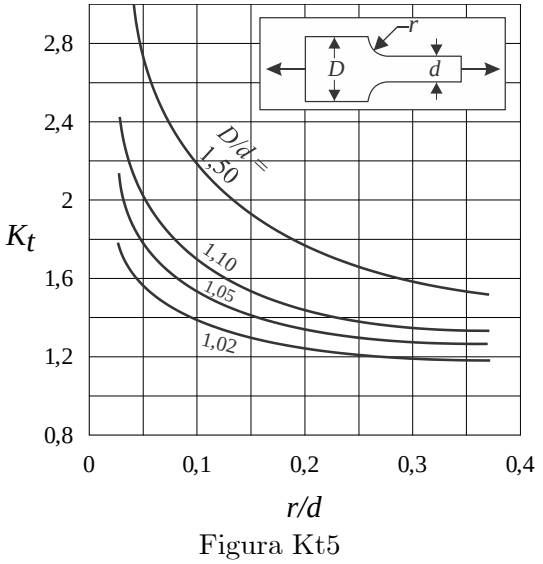


Figura Kt5

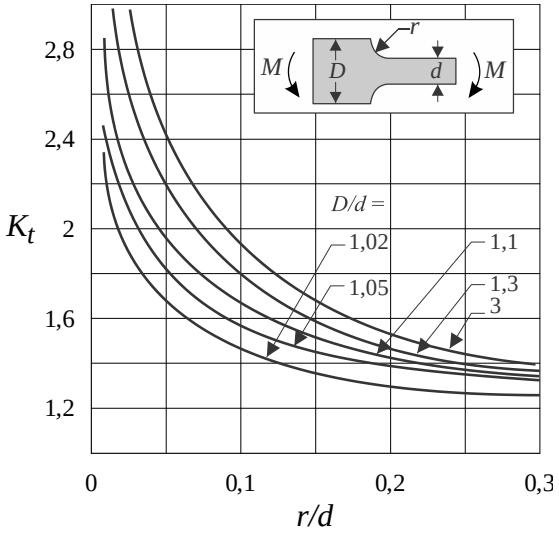


Figura Kt6

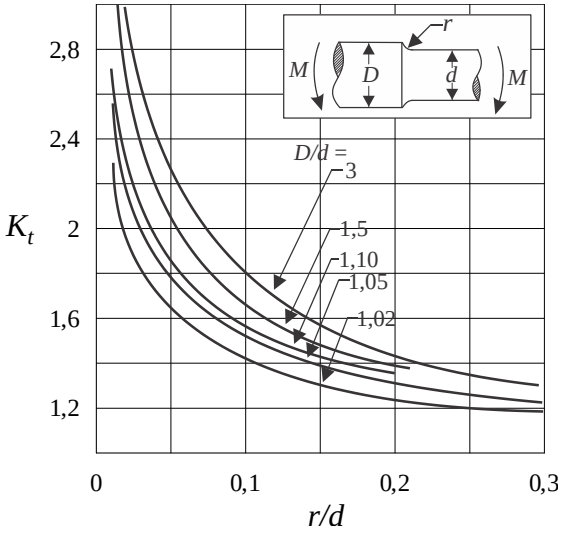


Figura Kt9

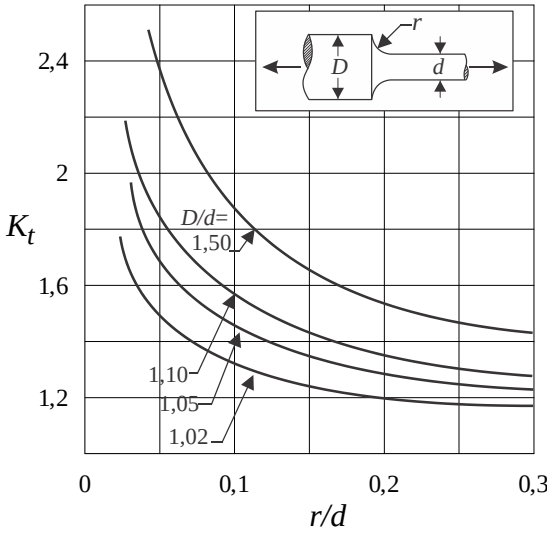


Figura Kt7

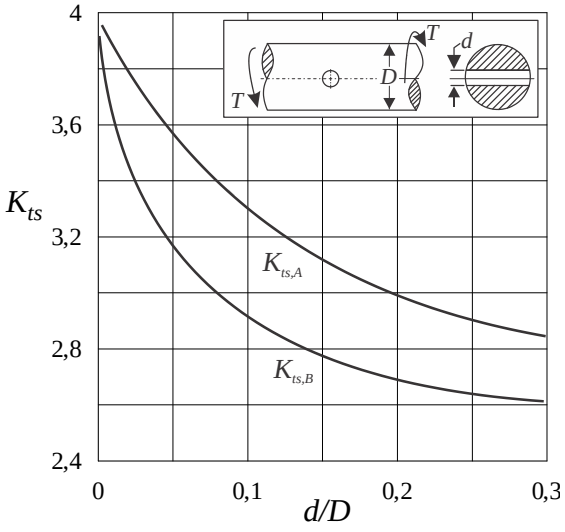


Figura Kt10

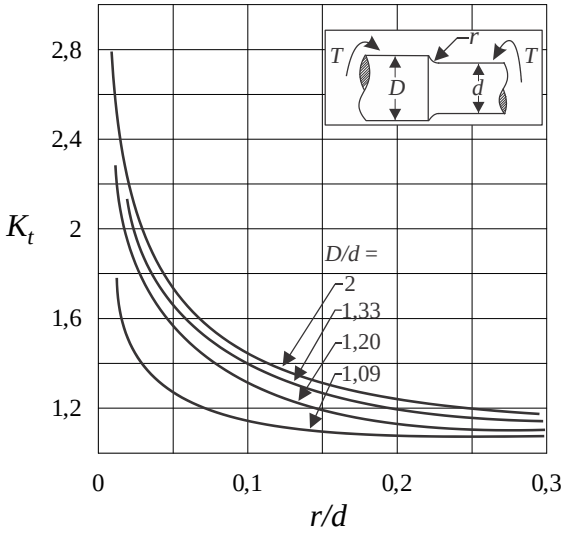


Figura Kt8

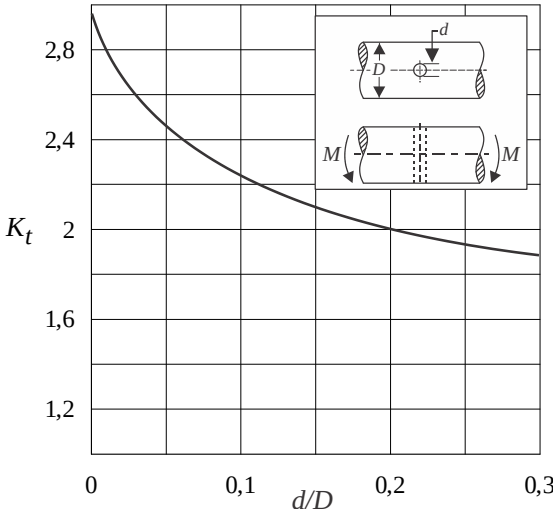


Figura Kt11

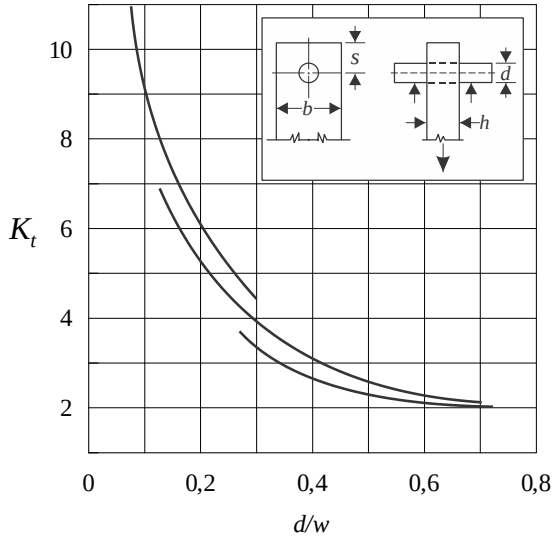


Figura Kt12

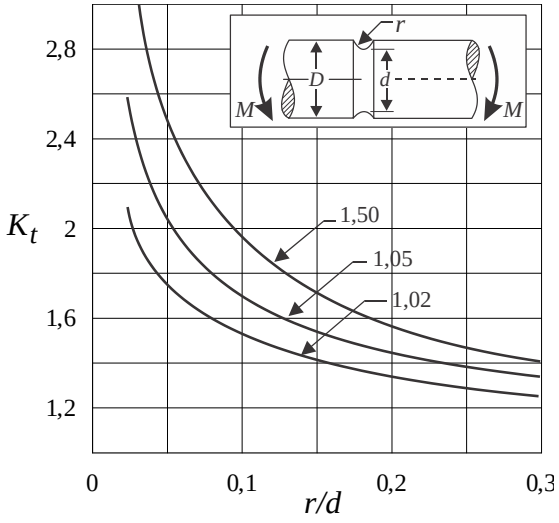


Figura Kt14

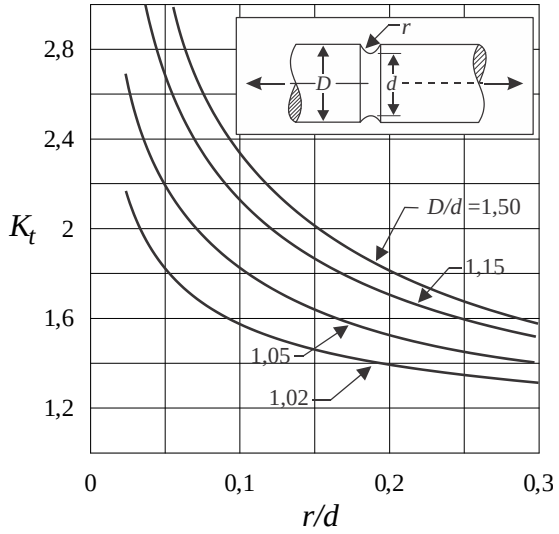


Figura Kt13

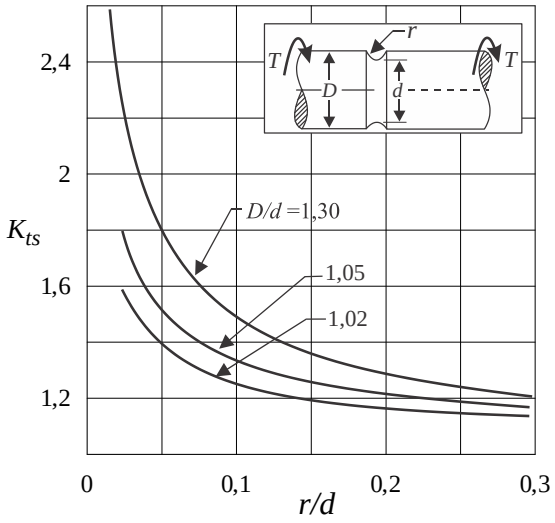


Figura Kt15

17.4 Solução de exercícios selecionados

2 - Esforcos internos

Em todos os resultados, as forças estão em kN, momentos em kNm, comprimentos em m, ângulos em graus.

2.1. R_B = -R_A = -5, M_z^{A+}= -5, $M_z^{B-} = 0$.

2.3. $R_A = 0$, $R_m = 5$, $V_y = 0$, $M_z(x) = -5$.

2.9 $R_C = qL/8$, $R_A = 3qL/8$. Em AB: $M_{BC}(x) = (x - L)qL/8$, em BC: $M_z^{BC}(x) = x - 1$.

2.11 $R_A = qb^2/2a$, $R_B = qb(b+2a)/2a$. Em AB: $M_{AB}(x) = -R_Ax$, em BC: $M_{BC}(x) = -q(x-a)^2/2 + qbx$ - R_Ba.

2.13 Eixo x é axial com origem em A. $p_y(x) = 3x + 1$ [kN/m], R_B = - 1,5, $R_A = -$ 1. $M_z(x) = -x + (x^3 + x^2)/2$. $M_{\max}$ = - 0,3156em $\bar{x}$ = 0,5486 m.

2.15 R_{Ay} = -5, R_B = -5,77, R_{Ax} = 2,89. $N_x(x) = -$ 2,89, $M_z(x) = 5x^2 - 5x$.

2.17 $R_B = R_{Ax}$ = 5,31 N, R_{Ay} = 6,126 N. $N_{\bar{x}}(\bar{x}) = -7{,}66 + 3{,}06\bar{x}$ [N], $M_{\bar{z}}(\bar{x}) = 2{,}65\bar{x}(1-\bar{x})$ [Nm]. Eixo $\bar{x}$ axial com origem em A.

2.19 $R_A = kL^3/12$, $R_B = kL^3/4$. $M_x(x) = kx^3(x+L)/12$.

2.21 $R_A = -R_D = -8{,}33$. Em AB: $M_z^{AB}(x) = -8{,}33x$. Em BC: $M_z^{BC}(x) = 16{,}7x - 8{,}33$.

2.23 $R_A = -20{,}8$, $R_D = -4{,}17$. Em AB: $M_z^{AB}(x) = -20{,}8x + 12{,}5x^2$. Em BC: $M_z^{BC}(x) = 4{,}2x - 8{,}33 + 12{,}5x^2$. Em

CD: $M_z^{CD}(x) = 16{,}7 - 20{,}8x + 12{,}5x^2$.

2.25 $R_A = -0,5$, $R_B = 5,5$. $M_z^{AB}(x) = -0,5x$, $M_z^{BC}(x) = -12,5x^2 + 30x - 18$

2.27 $R_A = 25$, $R_m = 5$. $M_z^{AB}(x_1) = -5x_1$, $M_z^{BD}(x) = 25x - 5$. Eixo x_1 é axial ao trecho AB.

2.29 $R_A = 25$, $R_m = 26,65$. $N_{x_1}^{AB}(x_1) = 12,5$, $M_z^{AB}(x_1) = 21,65x_1 - 26,65$, $M_z^{AB}(x_1) = 21,65x_1 - 26,65$, $N_x^{BC}(x) = 0$, $M_z^{BC}(x) = 25x - 26,65$. Eixo x_1 é axial ao trecho AB.

2.31 $R_{Ey} = R_{Ay} = 12,5$, $R_{Ax} = -R_{Ey} = 2,5$. $N_{x_1}^{AB}(x_1) = 12,5$, $M_z^{AB}(x_1) = -2,5x_1$, $N_x^{BC}(x) = -2,5$, $M_z^{BC}(x) = 12,5x - 2,5$, $N_x^{CD}(x) = -2,5$, $M_z^{CD}(x) = 2,5 - 12,5x$, $N_{x_2}^{DE}(x_2) = -12,5$, $M_z^{DE}(x_2) = 2,5x_2$. Eixo x_1 é axial ao trecho AB com origem em A, eixo x_2 é axial ao trecho DE com origem em E.

2.33 $R_{Ey} = 12,5$ kN, $R_{Ay} = R_{Ax} = R_{Ex} = -12,5$ kN. $N_{x_1}^{AB}(x_1) = 12,5$, $M_z^{AB}(x_1) = 12,5x_1$, $N_x^{BD}(x) = -12,5$, $M_z^{BD}(x) = 12,5(1 - x)$, $N_{x_2}^{DE}(x_2) = -12,5$ kN, $M_z^{DE}(x_2) = 12,5(x_2 - 1)$. Eixos como no Exercício 31.

2.35 $R_C = 150$, $R_A = 125$. $N^{AB} = 125$, $N^{CD} = -150$, $N^{BD} = N_x^{DE} = 0$, $M_z^{BD}(x) = -125x$, $M_z^{DE}(x) = 25x - 24,43$.

2.37 $R_A = 4,69$, $R_{Cy} = 20,31$. $N_{x_1}^{AB}(x_1) = 2,35$, $M_z^{AB}(x_1) = 4,06x_1$, $N_x^{BC}(x) = 0$, $M_z^{BC}(x) = 21,65 - 20,3x$.

2.39 $R_A = -0,366$ kN, $R_C = 1,366$. $N_{BC} = -0,423$, $N_{AC} = 0,211$, $N_{AB} = 1,577$.

2.41 $R_y = 25$, $R_{Mx} = -Fb = -10$, $R_{Mz} = 5$. $M_z^{AB} = 25x$, $R_{Mx} = -10$, $M_z^{BC} = 10 - 25z$.

2.43 $R_{1y} = -R_{5y} = 2F$. $N_{14} = N_{23} = -1,414\ F$, $N_{15} = F$, $N_{45} = 2F$, $N_{34} = N_{24} = -N_{12} = F$.

2.45 $R_{By} = F$, $R_{Ax} = -R_{Bx} = 2F$. $N_{BD} = 2F$, $N_{AB} = F$, $N_{AD} = -2,237\ F$.

2.47 $R_A = R_B = 2M_0/L$. $M_z^{AB}(x) = 10x$, $M_z^{BC}(x) = 5$.

2.49 $M_z^{AB}(x_1) = -(a - c - x_1)F$, $M_z^{BC}(x) = cF$, $M_z^{CD}(x_2) = F(c - x_2)$. Eixo x_1 é axial ao trecho AB com origem em A, eixo x_2 é axial ao trecho CD com origem em C.

2.51 $R_{Ay} = 4,82$, $R_{By} = -54,82$, $R_{Bx} = 80$. $N_{AC} = -9,64$, $N_{AB} = 48,3$, $N_{BC} = 63,3$.

2.53 $R_{Ay} = F$, $R_{mA} = FL$. $N_{AB} = F$, $M_{AB} = -FL$, $M_{BC} = -F(L - x_1)$, $N_{CD} = -F$, $M_{CD} = V_{CD} = 0$. Eixo x é axial ao trecho AB com origem em A, eixo x_1 é axial ao trecho BC com origem em B.

2.55 $R_{Ax} = R_{Dy} = 50$, $R_{Ay} = 75$. $M_z = 12,5$, $N = -70$, $V = 10$.

4 - Deformações e tensões

Forças em kN, tensões em MPa, deslocamentos em mm, área em mm^2.

4.1 $R_{aco} = 13,5$, $R_{al} = 13,5$, $\varepsilon_x = 8,75 \cdot 10^{-4}$, $\delta_{aco} = \delta_{al} = 0,875$.

4.3 $R_{aco} = 13,16$, $R_{al} = 921$, $\varepsilon_x = 6,59 \cdot 10^{-4}$, $\delta_{aco} = \delta_{al} = 0,658$.

4.5 (a) $A_{al}/A_{aco} = 0,8571$, $A_{al} = 8,571$, $R_{cu} = 7,5$ kN e $R_{al} = 3,75$, (c) $F_E = 40$.

4.7 (a) $a = 1.152$, $v_1 = 0,232$, $v_2 = 0,732$, $n = 4,88$.

4.9 $R_1 = 1.750$, $R_2 = 3.556$, $v_1 = 1,75$, $v_2 = 4,40$, $n = 1$.

4.11 $R_1 = 0,400$, $F = 1$, $R_2 = 0,600$, $v_1 = 0,4$, $v_2 = \varepsilon_{2ax}L_2 = 0,743$, $n = 4,38$.

4.13 $R_1 = 0,3456$, $R_2 = 0,2133$, $R_3 = 0,441$, $v_1 = 3,48$, $v_2 = 3,88$, $v_3 = 4,61$, $F = 1$, $\alpha = 1,126 \cdot 10^{-4}$ rad, $n = 1,52$.

4.15.1 $R_1 = 1,667$, $R_2 = 6,667$, $R_3 = 11,67$, $v_1 = 16,7$ μm, $v_2 = 66,7$ μm, $v_3 = 117$ μm, $n = 3$.

4.17 $E = 200$ GPa, $\nu = 0,25$.

4.19 $d_o \geq 19,07$ por rigidez.

4.21 $\sigma_{xAB} = 56,3$, $\sigma_{xBC} = 32,3$, $\sigma_{xCD} = 45,8$.

4.23 $F = 49{,}48$, $\sigma_{aco} = \sigma_{al} = 70$, $\varepsilon_{aco} = = 3{,}5{\cdot}10^{-4}$.

4.25 $L_o = 100$ m, $F = 4,14$.

4.27 $c = (1/L)\ln(h/L)$, $a = H$, $\Delta L = u(L) = 0,148$, $\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x) = Fe^{-2cx}/\pi H^2$, $k =$33,9 kN/mm.

4.29 $u_A = -0,01$, $\sigma_x(x) = F/2hb_o$.

4.31 (a) $F_{\max} = 27,489$, (b) $F_{\max} = 24$.

4.33 $L_{\max} = 7.336$ m, $M_c = 2.861$ kg.

4.35 $\Delta L = 11,72$ m.

4.37 (a) $\Delta L = 52,8$ m, (b) $\Delta L = 5,89$ m, $M_c = 51,9$ kg.

4.39 $\sigma_y = -p$.

4 - Transformação de tensões e deformações

Forças em kN, tensões em MPa, deslocamentos em mm, ângulos em grau.

5.1 $\{F_{x'x'}; F_{x'y'}\} = \{-54,2; -17,8\}dA$.

5.3 $\{F_{x'x'}; F_{x'y'}\} = \{-10,85; 42,8\}dA$.

5.7 $\{\sigma_{x'},\ \sigma_{y'},\ \tau_{x'y'}\} = \{-54,2; 24,2; 17,8\}$.

5.9 $\{\sigma_{x'},\ \sigma_{y'},\ \tau_{x'y'}\} = \{-50; 20; 25\}$.

5.11 $\{\sigma_{x'},\ \sigma_{y'},\ \tau_{x'y'}\} = \{5,85; 64,2; -0,49\}$.

5.13 $\{\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}\} = \{20,85; 49,2; -25,5\}$.

5.15 $\{\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}\} = \{50; 20; -25\}$.

5.17 $\tau^{12}_{\max} = 40{,}3$, $\sigma_1 = 35,3$, $\sigma_2 = -45,3$, $\theta_1 = -14,9°$, $\beta_1 = -59,9°$.

5.19 $\tau^{12}_{\max} = 43$, $\sigma_1 = 58$, $\sigma_2 = -28$, $\theta_1 = 72,2°$, $\beta_1 = 27,2°$.

5.21. $\tau^{12}_{\max} = 30$, $\sigma_1 = 40$, $\sigma_2 = -20$, $\theta_1 = 90°$, $\beta_1 = 45°$.

5.23. $\tau^{12}_{\max} = 0$, $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 20$, $\theta_1 = 0°$, $\beta_1 = -45°$.

5.25. $\tau^{12}_{\max} = 40{,}3$, $\sigma_1 = 85,3$, $\sigma_2 = 4,69$, $\theta_1 = -14,9°$, $\beta_1 = -59,9°$.

5.26. $\tau^{12}_{\max} = 29{,}2$, $\sigma_1 = 114,2$, $\sigma_2 = 55,8$, $\theta_1 = 119,5°$, $\beta_1 = 74,5°$.

5.27. $\tau^{12}_{\max} = 43$, $\sigma_1 = 108$, $\sigma_2 = 22$, $\theta_1 = 72,2°$, $\beta_1 = 27,2°$.

5.29. $\tau^{12}_{\max} = 20$, $\sigma_1 = 110$, $\sigma_2 = 70$, $\theta_1 = 0°$, $\beta_1 = -45°$.

5.47. $\sigma_1 = 62,3$, $\sigma_2 = 13,6$, $\sigma_3 = -5,9$.

5.49. $\sigma_1 = 35,8$, $\sigma_2 = 6,9$, $\sigma_3 = -52,7$.

5.51. $\sigma_1 = 62,3$, $\sigma_2 = 13,6$, $\sigma_3 = -5,9$.

5.53. $\sigma_1 = 75,7$, $\sigma_2 = 5,75$, $\sigma_3 = -11,5$.

5.55. $\sigma_1 = 72,8$, $\sigma_2 = 1,68$, $\sigma_3 = -24,5$.

5.57. $\sigma_1 = 40$, $\sigma_2 = 20$, $\sigma_3 = 10$.

5.59. $\sigma_1 = -100$, $\sigma_2 = -100$, $\sigma_3 = -100$.

5.61. $\{\varepsilon^{12}_{\max}; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\} = \{206,2; 256,2; -156,2; -33,3\}\cdot 10^{-6}$, $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} = \{46,3; -19,7; 0\}$.

5.63. $\{\varepsilon^{12}_{\max}; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\} = \{70,7; 270,7; 129,3; 200\}\cdot 10^{-6}$, $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} = \{45,2; 2,78; 24\}$.

5.65. $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\} = \{272,2; 258,4; 68,6\}\cdot 10^{-6}$, $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} = \{45,9; 41,5; -15,4\}$.

5.67. $\{\varepsilon_{xy}; \varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\} = \{-25; 250; 100; -116,7\}\cdot 10^{-6}$, $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\} = \{254; 95{,}9; -116{,}7\}\cdot 10^{-6}$, $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} = \{59,3; 34; 0\}$.

5.69. $\{\varepsilon_{xy}; \varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\} = \{28,9; 250; 83,3; -138,9\}\cdot 10^{-6}$, $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\} = \{254,9; 78,5; -111\}\cdot 10^{-6}$, $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\} = \{58,6; 30,3; 0\}$.

5.71. $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{ta}$ e $\sigma_3 = 0$. Um extensômetro a 45^o. $T = 15.708$ Nmm.

5.73. $F = 333,3$ Nmm.

5.75. $\{\sigma_{y'}, \tau_{x'y'}\} = \{4,96; -0,431\}$.

6 - Modos e critérios de falha

Forças em kN, tensões em MPa, deslocamentos em mm, ângulos em grau.

6.1 $n_T = 2,33$, $n_M = 2,68$.

6.3 $n_T = 3,12$, $n_M = 3,25$.

6.5 $n_T = 3,08$, $n_M = 3,39$.

6.7 $n_T = 3,33$, $n_M = 3,78$.

6.9 $n_T = 2,34$, $n_M = 2,41$.

6.11 $n_T = 1,75$, $n_M = 2,02$.

6.13 $n_T = 2,22$, $n_M = 2,52$.

6.15 $n_T = 10$, $n_M = 10$.

6.16 $\tau^{abs}_{\max} = 38$ MPa, $\sigma_{EQ} = 68,3$ MPa, $n_T = 2,64$, $n_M = 2,93$.

6.17 $\tau^{abs}_{\max} = 34,1$ MPa, $\sigma_{EQ} = 60,9$ MPa, $n_T = 2,93$, $n_M = 3,28$.

6.19 $\tau^{abs}_{\max} = 34,1$ MPa, $\sigma_{EQ} = 60,8$MPa, $n_T = 2,93$, $n_M = 3,29$.

6.21 $\tau^{abs}_{\max} = 38,7$ MPa, $\sigma_{EQ} = 70$ MPa, $n_T = 2,58$, $n_M = 2,86$.

6.23 $\tau^{abs}_{\max} = 46,2$ MPa, $\sigma_{EQ} = 80$ MPa, $n_T = 2,17$, $n_M = 2,50$.

6.25 $\tau^{abs}_{\max} = 50,3$ MPa, $\sigma_{EQ} = 87,1$ MPa, $n_T = 1,99$, $n_M = 2,30$.

6.27 $\tau^{abs}_{\max} = 30$ MPa, $\sigma_{EQ} = 52,9$ MPa, $n_T = 2,33$, $n_M = 3,78$.

6.29 $\{\sigma_n, \tau\} = \{66{,}8; -18,8\}$.

6.31 $\{\sigma_n, \tau\} = \{139{,}3; -39{,}2\}$.

6.33 $\{\sigma_n, \tau\} = \{132; -41,0\}$.

6.35 $l/r = 5,26$.

6.37 $\theta = 33,2°$, $l = 1.051,4$ mm.

6.39 $\theta = 69,3°$, $l = 444,3$ mm.

6.41 $F = 3p\pi r^2$.

6.43 $\tau^{abs}_{\max}$ =69,8, $n = 2{,}87$.

6.45 $\tau^{abs}_{\max} = \dfrac{pr}{2h}\left(1 + \dfrac{h}{r}\right)$.

6.47 Mesmo que Exercício 45.

6.49 $\Delta T_E = 64,1$ °C.

6.51 $\Delta R = R\varepsilon_t = 0,443$.

6.53 $\Delta R = R\varepsilon_t = 0,315$.

7 - Torção

Momentos em kNmm, tensão em MPa, comprimentos em mm.

7.1 $M^{AB}_x = 200$, $M^{BC}_x = -300$, $\tau^{abs}_{\max} = 103$, $\Delta\varphi_{BA}$ =0,030°, $\Delta\varphi_{CB} = -2,96°$, $n_T = 0,34$, $n_M = 0,39$.

7.3 $\tau^{BC}_{\max} = -36,1$, $\Delta\varphi_{BA}$ =0,030°, $\Delta\varphi_{CB} = -0,739°$, $n_T = 0,969$, n_M =1,12.

7.5 $n = 1,33$, $n = 0,214$ por tensão e rigidez.

7.7 $\tau_{AB} = 67,9$, $\tau_{BC} = 30,2$. $n = 4,42$, $n = 1,42$ por tensão e rigidez.

7.9 $P_{hp} = 6,45$ hp, $F_1 = 54$ N, $F_2 = 360$ N, τ =45. $n = 2,77$, $n = 1,05$ por tensão e rigidez.

7.11 τ_{AB} =47,1, $\Delta\varphi_{BA}$ =1,99°. $n = 3,72$, $n = 1,01$ por tensão

e rigidez.

7.13 $d = 16{,}5$.

7.15 D =20,3, $d = 12,2$, A_m/A_t =1,42.

7.17 $d = 11,5$ Tresca), d =13,4, (rigidez).

7.19 $\tau_{DE} = -63,7$.

7.21 $\tau_{CD} = 52,4$.

7.23 Em B: $K_t = 1,7$, $\tau^B_{\max} = 54,1$, $n = 3,7$.

7.25 Em B: $K_t = 1,6$, $\tau^B_{\max} = 50,9$, $n = 3,93$.

7.27 Em B: $K_t = 1,7$, $\tau^B_{\max} = 54$, $n = 3,7$.

7.29 $d = 47,1$.

7.31 $d = 18,9$, $D = 31,4$.

7.33 $d = 28,6$, $D = 35,8$.

7.35 $d = 36,4$.

7.37 $d = 12,1$, $D = 30,2$.

7.41 $d = 34,3$, $T_B = 118,7$ Nm, $T_D = 356,1$ Nm.

7.43 $d_{AC} = 23,8$, $d_{CE} = 34,3$.

7.45 $L = 6.597$ mm.

7.47 $d = 2,99$, $D = 5,99$.

7.49 $\varphi_B = 0,281°$, $k_t = 6,12 \cdot 10^8$ Nmm/rad.

7.51 $\varphi_B = 0,486°$, $k_t = 3,53 \cdot 10^8$ Nmm/rad.

7.53 $M_x^{AB}(x) = t(L/2 - x)$, $M_x^{BC}(x) = 0$,$\varphi_{AB}(x) = tx(L - x)/2GJ$, $\varphi_C = tL^2/8GJ$.

7.55 $\varphi_A = kL^3/6GJ$.

7.57 $R_{MC} = R_{MA} = tL/2$, $\varphi(x) = tx\,(L - x)\,/2GJ$.

7.59 $R_{MA} = 3tL/8$, $R_{MC} = tL/8$, $\varphi_{AB}(x) = tx\,(3L - 4x)\,/8GJ$, $\varphi_{BC}(x) = tL\,(L - x)\,/8GJ$.

8 - Flexão plana

Tensão em MPa, comprimentos em mm, E em GPa, M_z em Nmm.

8.1 $\bar{Y} = h/3$.

8.3 $\bar{Y} = 4\left(R^3 - r^3\right) / \left[3\pi\left(R^2 - r^2\right)\right]$.

8.7 $I_z = 0,05488R^4$ e $I_Z = \pi R^4/16$.

8.11 $I_z = b^4/12$.

8.17 $I_z = 2\left(hb^3/3 + ah^3/12\right)$.

8.23 $\bar{Y}$ =10, $I_z = 11.250$, $\sigma_{\max}$ = 53,3.

8.25 $\bar{Y}$ =8,06, $I_Z = 15.953$, I_z = 3.186, $\sigma_{\max}$ =75,9.

Delgada: $\bar{Y} = 8,91$, I_Z = 8.621, $I_z = 1.633$, $\sigma_{\max} = 163,7$.

8.27 $\bar{Y} = 30,7$, $I_z = 163.000$, I_Z = 823.000, $\sigma_{\max} = 56,5$.

8.29 $\bar{Y} = 26,1$, $I_z = 220.000$, I_Z = 696.000, $\sigma_{\max} = -39,4$.

8.31 $I_z = 67.500$ e $\sigma_{\max} = 94,3$.

8.33 $I_z = 304.000$ e $\sigma_{\max}$ = 29,3.

8.35 $I_z = 438.000$ e $\sigma_{\max}$ = 30,2.

8.37 $I_z = 62.300$ e $\sigma_{\max} = 96,4$.

8.39 $I_z = 107.000$ e $\sigma_{\max}$ = 56,3.

8.41 $I_z = 90.200$ e $\sigma_{\max} = 99,8$.

8.43 $I_z = 130.300$ e $\sigma_{\max}$ = 57,6.

8.45 $I_z = 70.000$ e $\sigma_{\max} = 85,8$.

8.47 $I_z = 5.400$ e $\sigma_{\max} = 83,2$.

8.49 $I_z = 87.100$ e $\sigma_{\max} = 79,2$.

8.51 $\bar{Y} = 12,7$, $I_Z = 318.100$, $I_z = 88.900$ e $\sigma_{\max} = 58,3$.

8.53 (a), obtemos $\bar{Y} = 20$, I_z = 60.854 e $\sigma_{\max} = 98,6$. (b), obtemos $\bar{Y} = 25$, $I_z = 71.683$ e $\sigma_{\max}$ = 104,6.

8.55 $\bar{Y}$ = 205e E_{eq} = 10. $\sigma^c_{mad} = 10,7$, $\sigma^d_{mad} = -10,7$.

8.57 $I_z = 1,24 \cdot 10^9$ e E_{eq} = 35,9. $\sigma^{\max}_{aco} = -28,4$, $\sigma^{\min}_{aco}$ = $-27,1$, $\sigma^{\max}_{mad} = -1,35$.

8.59 $I_z = 4,49{\cdot}10^8$ e E_{eq} =24,9. $\sigma^{\max}_{aco} = -31$, $\sigma^{\min}_{aco} = -28,1$, $\sigma^{\max}_{mad} = -4,02$.

8.61 $I_z = 1,15{\cdot}10^9$ e E_{eq} =14,8. $\sigma^{med}_{aco} = \pm 74,1$.

8.63 $\bar{Y} = 250,7$. $I_z = 4,59{\cdot}10^8$, E_{eq} = 44,7. $\sigma^{\max}_c = -6,12$, $\sigma_{aco} = 123,4$.

8.65 $M_{\max} = 2,81 \cdot 10^6$ em $x = L/2$ e $V_{\max} = 75$ kN em $x = 0$. $I_z = 3,71 \cdot 10^5$e $\sigma_f = 189$.

8.67 Esforços do Exercício 65. $I_z = 1,62 \cdot 10^6$e $\sigma_f = 69,4$.

8.69 $\bar{Y} = 20,7$. $I_z = 2,76 \cdot 10^5$. $\sigma_{\max} = 15,3$.

8.71 Esforços do Exercício 70. $I_z = 1,33 \cdot 10^5$e $\sigma_{\max} = 25$.

8.73 Esforços do Exercício 70. $I_z = 6,13 \cdot 10^4$e $\sigma_{\max} = 43,9$.

9 - Cisalhamento em flexão

Tensão em MPa, forças em N, comprimentos em mm, M_z em Nmm.

9.3 $n = 1,33$.

9.5 $n = 2,55$.

9.7 $F_{\max} = 1.964$.

9.9 $n_m = 8$, $n_c = 1,125$, $\sigma_m = 1,33$.

9.11 $n = 2$.

9.13 $e = 122$ mm.

9.15 $n_m = 4,03$, $n_c = 1,55$, $n = \tau^{adm}_m/\tau_{cc} = 2,42$.

9.21 $e = 46,6$.

9.23 $e_A = 245$, $e_B = 635$.

9.27 $\sigma_f = 193$, $\tau_S = 52,3$.

9.29 $e_p = 900$.

9.31 $\sigma_f = 211$, $\tau_S = 62$.

9.33 $\sigma_f = 172$, $\tau_S = 51,4$.

9.35 $\sigma_f = 75$, $\tau_{\max} = 5$.

9.37 $M_{\max} = -2,81 \cdot 10^6$ em $x = L/2$ e $V_{\max} = 75$ kN em $x = 0$. $\sigma_f = 189$, $\tau_{\max} = 13,7$.

9.39 Esforços do Ex.37. $\sigma_f = 69,4$, $\tau_{\max} = 6,42$.

9.41 Esforços do Ex.40. $\bar{Y}$ =

$20,7$, $\sigma_{\max} = 15,3$, $\tau_{\max} = 1,53$.

9.43 Esforços do Ex.40. $\sigma_{\max} = 25$, $\tau_{\max} = 1,74$.

9.45 Esforços do Ex.40. $\sigma_{\max} = 43,9$, $\tau_{\max} = 2,08$.

10 - Carregamentos combinados

Tensão em MPa, forças em N, comprimentos em mm, momentos em kNmm.

10.11 $R_{Ay} = 13{,}8$, $R_{Dy} = 43{,}1$, $R_{Az} = 105$ N, $R_{Dy} = 139$, $M_{Bz} = -2,76$, $M_{Cz} = 8,62$, $M_{By} = 21$, $M_{Cy} = 27,8$. Em C: $\sigma_x = 171,6$, $n = 1,05$.

10.13 $d = 10,4$.

10.15 $d = 12,3$.

10.17 $D = 13,2$ e $d = 7,90$.

10.19 $M_{By} = 15,2$, $M_{Bz} = -6,09$, $M_{Cy} = 16,3$, $M_{Cz} = 1,95$. Em B: $\sigma_{xp} = 77,1$, $n_p = 2,33$.

10.21 $M_{Bz} = 0$, $M_{Cz} = 14,1$, $M_{By} = 18,9$, $M_{Cy} = 23,6$. Em C: $\sigma_{xq} = 97$, $n_q = 1,86$.

10.23 Em B: $\alpha = -5,29°$, $\sigma_{xp} = 112$, $n_p = 1,60$.

10.25 Em C: $\alpha = 17,3°$, $z_o = -0,324$, $\sigma_x = 180,5$, $n = 0,997 < 1$.

10.27 Em B: $\alpha = -10,1°$, $z_o = -0,548$, $\sigma_{xp} = 83,7$, $n_p = 2,15$.

10.29 Em C: $\alpha = 14,9°$. A posição $z_o = I_y N_{BC}/AM_{Cy} = -0,354$, $\sigma_{xq} = 139$,

10.31 Em A: $\alpha = 28,4°$, $\sigma_{xp} = 150$, $n_p = 1,20$.

10.33 $\alpha = -36,1°$, $\sigma_{Q_2} = 282$, $n = 0,71 < 1$. $F_{adm} = 8.875$.

10.35 $\alpha = 7,55°$, $\sigma_{Q_3} = 430$, $n = 0,465 < 1$. $F_{adm} = 6,64$.

10.37 $\alpha = -44,1°$, $\sigma_{Q_4} = \sigma_{Q_2} = 202$, $\sigma_{Q_1} = -82$. $n_{Q_4} = 0,991 < 1$. $F_{adm} = 12.388$.

10.39 Reações e esforços do Exercício 10. Em B: $M_x = 10$, $\sigma_x = 49,4$, $\alpha = -21,8°$, $\tau_B = 15,1$, $\tau^{abs}_{B\max} = 29$, $n = 3,11$.

10.41 Reações e esforços do Exercício 12 e $M^{BC}_x = 10$. Em C: $\sigma_x = 83,0$, $\alpha = 31,0°$. $\tau_C = 15,1$, $\tau^{abs}_{C\max} = 44,1$, $n = 2,04$.

10.43 Esforços do Exercício 42. $d = 44$.

10.45 Esforços do Exercício 42. $F_D = 7,2$, $M_{Bz} = -264$, $M_{Cz} = -246$, $M_{BCx} = 422,9$, $M_{By} = -390$, $M_{Cy} = -677$. Em C: $\sigma_x = 114,6$, $\tau_C = 33,7$, $\tau^{abs}_{\max} = 66,4$, $n = 1,35$.

10.47 $F_B = 1.500$, $F_D = 3.750$, $M_{Bz} = -194$, $M_{Cz} = -128$, $M_{BCx} = T = 141$, $M_{By} = -245$, $M_{Cy} = -352$. Em C: $\sigma_x = 89,1$, $\tau_C = 16,7$, $\tau^{abs}_{\max} = 47,6$, $n = \sigma_E/2\tau^{abs}_{C\max} = 1,89$.

10.49 $T_B = 117,5$, $F_B = 3.167$, $M_{Bz} = M_{Dz} = 1,182$, $M_{Cz} = -319$, $M_{BCx} = -117,5$ kNmm e $M_{CDx} = T_B = 117,5$, $M_{By} = M_{Dy} = 250,9$, $M_{Cy} = 165,4$. Em C: $\sigma_x = 186,7$, $\tau_C = 38,3$, $\tau^{abs}_{\max} = 100,9$, $n = 1,39$.

10.51 Esforços do Exercício 49. Em C: $\sigma_x = 68$, $\tau_C = 14$, $\tau^{abs}_{\max} = 36,8$, $n = 3,81$.

10.53 $M_{Rft} = 938,4$, $d = 39,5$.

10 - Aplicações de elasticidade e plasticidade plana

Tensão em MPa, comprimentos em mm, momentos em kNmm.

11.7 $b = 306$, $h = 156$.

11.9 $b = 190$, $u_{ext} = 0,292$, $h = 40,5$.

11.11 Espesso: $b = 218$, $h = 67,6$, delgado: $h = 45,3$.

11.13 $u_{ext} = 4,40 \cdot 10^{-2}$, $P = 24,6$.

11.15 $u_{ext} = 4,40 \cdot 10^{-2}$, $a = 150$.

11.17 $\sigma_r(a) = -153,2$, $\sigma_\theta(a) = 247$, $\sigma_r(b) = 0$, $\sigma_\theta(b) = 400$.

11.19 $P_E = 87,5$, $P_P = -115,1$.

11.21 $\tau_{\max} = 40$, $\theta = 10^{-4}$ rad/mm. $\Delta\varphi = 2{,}29°$.

11.23 $\tau_{\max} = 111,6$, $111,6$ e $111,6$, $T = 185,615$, $185,267$, $185,240$.

4

11.25 $\tau_{\max} = 106,1$, $\theta = 4,421 \cdot 10^{-4}$ rad/mm. $\Delta\varphi = 10{,}1°$.

11.27 $\tau_{\max} = 106,1$, $\theta = 4,421 \cdot 10^{-4}$ rad/mm, $\Delta\varphi = 10{,}1°$.

11.29 $\tau_{\max} = 106,1$, $\theta = 4,421 \cdot 10^{-4}$ rad/mm, $\Delta\varphi = 10{,}1°$, $K_t = 56.56$. kNmm/rad.

11.31 $S = 31,42$, $\bar{A} = 47,5$, $\tau_{\max} = 35,1$, $\theta = 1,45 \cdot 10^{-4}$ rad/mm., $\Delta\varphi = 3{,}32°$,

11.33 $S = 62,84$, $\bar{A} = 204,7$, $\tau_{\max} = 16,29$, $\theta = 3,125 \cdot 10^{-5}$ rad/mm, $\Delta\varphi = 0{,}7162°$, $K_t = T/\Delta\varphi = 800,1$ kNmm/rad.

11.35 $S = 62,84$, $\bar{A} = 246,8$, $\tau_{\max} = 13,51$, $\theta = 2,150 \cdot 10^{-5}$ rad/mm, $\Delta\varphi = 0{,}4926°$, $K_t = 1.163$ kNmm/rad.

11.37 $\tau_{\max} = 11,34$, $\tau_m = 10,55$, $\theta = 1,3189 \cdot 10^{-5}$ rad/mm, $\Delta\varphi = 0{,}3023°$, $K_t = 1.896$ kNmm/rad.

11.39 $\tau^{abs}_{\max} = 144,4$, $n = 1,21$.

11.41 $\sigma_x = 163,8$, $\tau_{\max} = 88,9$, $\theta = 1,482 \cdot 10^{-4}$ rad/mm, $\varphi_B = 0{,}8488°$.

11.43 $F_{adm} = 0,6296$.

11.45 $\tau^{abs}_{\max} = 45,74$, $n = 1,968$.

12 - Deflexão de vigas

Comprimentos em mm, forças em N, momentos em kNmm.

12.1 $C_1 = C_2 = 0$, $v(x) = -x^2(60.000 - 400x + x^2)/48 \cdot 10^7$. $v_B = -0,625$.

12.3 $C_1 = C_2 = 0$, $v(x) = x^2/2 \cdot 10^4$. $v_B = 0,5$.

12.5 $C_1 = C_2 = 0$, $D_1 = Fa^2/2$, $D_2 = -Fa^3/6$. $v_{AB}(x) = x^2(300 - x)/12 \cdot 10^5$, $v_B = 1,67$, $\theta_B = 1,43°$.

12.7 $C_1 = C_2 = 0$, $D_1 = m_1 a$, $D_2 = -m_1 a^2/2$. $v_{AB}(x) = x^2/1 \cdot 10^4$, $v_B = 1$, $\theta_B = 1,15°$.

12.9 $\{C_1; C_2;\ D_1;\ D_2;\ G_1;\ G_2\} = 10^6\{1{,}25;\ 0;\ 1{,}75;\ -16{,}7;\ 4{,}875;\ -277\}$. $v_{AB}(x) = -8,33 \cdot 10^{-7}x^3 + 0,0625x$, $v_B = 5,42$, $\theta_B = -\theta_C = 2,15°$.

12.11 $\{C_1; C_2;\ D_1;\ D_2\} = 10^5\{2{,}5;\ 0;21{,}3;-938\}$. $v_{AB}(x) = -5,56 \cdot 10^{-7}x^3 + 0,0125x$, $\theta_A = 0,716°$, $\theta_B = -1,43°$.

12.13 $\{C_1; C_2; D_1; D_2; G_1; G_2\} = 10^4\{-3{,}33;\ 333;\ 6{,}67;\ 0;-33{,}3;\ 2.667\}$. $v_{AB}(x) = 0,167 - 1,67 \cdot 10^{-3}x$, $\theta_A = \theta_B = -0,0955°$, $\theta_C = 0,191°$.

12.15 $\{C_1; C_2; D_1; D_2; G_1; G_2\} = 10^5\{1{,}67;\ -166{,}7;\ -3{,}33;\ 0;\ 36{,}7;\ -2.667\}$. $v_{AB}(x) = 8,33 \cdot 10^{-3}x + 0,833$, $v_A = -0,833$, $\theta_A = \theta_B = 0,477°$.

12.16.3 $C_1 = -ma/12$, $C_2 = 0$, $D_1 = 11ma/12$, $D_2 = -ma^2/2$. Então, $12EIv_{AB}(x) = mx^3/a - m\,ax$, e $6EI\theta_B = ma$.

12.17 $\{C_1; C_2; D_1; D_2\} = 10^5\{-1{,}17;\ 0;\ -6{,}17;\ 166{,}7\}$. $v_{AB}(x) = 5 \cdot 10^{-7}x(x - 169)(x + 69,0)$, $\theta_A = -0,334°$, $\theta_B = -0,0477°$.

12.19 $C_1 = qa^3/24 - R_A a^2/6 + ma/2 = 9,17 \cdot 10^4$, $C_2 = 0$ e $v(x) = -x(x^3 - 120x^2 + 2,4 \cdot 10^4 - 2,2 \cdot 10^6)/4,8 \cdot 10^8$. $\theta_A = -\theta_B = 0,263°$.

12.21 $\{C_1; C_2; D_1; D_2\} = 10^5\{-0{,}833;\ 0;\ 4{,}17;\ -167\}$. $v_{AB}(x) = (200x^3 - 2 \cdot 10^6 x - x^4)/48 \cdot 10^7$, $\theta_A = -\theta_C = -0,239°$.

12.23 $\{C_1; C_2;\ D_1;\ D_2;\ G_1; G_2\} = 10^6\{1;\ -83{,}3;\ 1{,}5;\ -100;\ 3{,}5;\ -233\}$. $v_{AB}(x) = -8,33 \cdot 10^{-7}x^3 + 0,05x - 4,167$, $v_A = v_D = -4,16$.

12.25 $C_1 = C_2 = 0$ e $v(x) = x^2(2 \cdot 10^7 - 10^5 x + x^3)/2,4 \cdot 10^{11}$. $v_B = 0,458$.

12.27 $\{C_1; C_2;\ D_1;\ D_2\} = 10^5\{0{,}417;\ 0;\ 10{,}4;\ -333\}$. $v_{AB}(x) = 2,08 \cdot 10^{-3}x - 2,083 \cdot 10^{-9}x^4$, $\theta_A = 0,119°$, $\theta_B = -0,358°$.

12.29 $\{D_1;\ D_2\} = 10^5\{0{,}833;\ -16{,}7\}$. $v_{AB}(x) = x^2(2 \cdot 10^5 x - x^3 - 6 \cdot 10^7)/2,4 \cdot 10^{11}$, $v_B = -1,71$.

12.31 $v_{AB}(x) = x^2(2 \cdot 10^5 x - x^3 - 4,8 \cdot 10^7)/2,4 \cdot 10^{11}$, $v_B = -1,21$.

12.33 $\{C_1; C_2;\ D_1;\ D_2;\ G_1; G_2\} = 10^6\{0{,}375;\ -33{,}3;\ 1{,}125;\ -58{,}3;4{,}125;\ -258\}$. $v_{AB}(x) = -2,08 \cdot 10^{-9}x^4 + 0,01875x - 1,67$, $v_A = v_D = -1,67$.

12.35 $v_{AB}(x) = x^3/1,2 \cdot 10^5 + x/40$. $\theta_B = 1,43°$.

12.37 $C_2 = 0$, $C_1 = -qa^3/3$. $EIv_{AB}(x) = -x^4/24 + qax^3/6 - qa^3x/3$. $\theta_A = -0,955°$.

12.39 $C_1 = 3m/2a = 30$, $C_2 = -m/2 = -1.000$. $v_{AB}(x) = x^2(2,5 \cdot 10^{-7}x - 2,5 \cdot 10^{-5})$, $\theta_B = 0,143°$.

12.41 $C_1 = 10$, $C_3 = 8.333$. $v_{AB}(x) = (x^5/1,2 \cdot 10^4 x^3 - 1,67x^3 + 8.333)/2 \cdot 10^7$. $\theta_A = 0,0239°$.

12.43 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{75;\ -2.500;\ 0;\ 5.000;\ -3{,}75 \cdot 10^5;\ 1{,}25 \cdot 10^7\}$. $v_{AB}(x) = (12,5x^3 - 1.250x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = 0,358°$.

12.45 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}3;\ -10;\ -0{,}1;\ 30;\ -2.000;\ 6{,}67 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (5x^3 - 500x^2)/2 \cdot 10^6$, $\theta_B = 1,43°$.

12.47 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}119;\ -3{,}13;\ 0{,}150;\ -6{,}25;\ 156;\ -5.208\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 19,8x^3 - 1.563x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = 0,328°$.

12.49 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}075;\ -2{,}5;\ 0;\ 0;\ 125;\ -1{,}25 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (12,5x^3 - 1.250x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = 0,358°$.

12.51 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}0625;\ -1{,}25;\ 0;\ 0;\ 20{,}8;\ -2.083\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 10,4x^3 - 625x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = \theta_C = 0,0597°$.

12.53 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}1375;\ -3{,}75;\ 0;\ -354;\ 1{,}042 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 22,9x^3 - 1.875x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = 0,418°$.

12.55 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{-0{,}181;\ 6{,}875;\ 0{,}250;\ -31{,}25;\ 1.656;\ -4{,}688 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 - 30,21x^3 + 3.438x^2)/2 \cdot 10^7$, $\theta_B = -1,104°$.

12.57 $\{C_1;\ C_3\} = \{112{,}5;\ 1{,}042 \cdot 10^5\}$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 18,75x^3 - 2.500x^2 + 1,042 \cdot 10^5)/2 \cdot 10^7$. $\theta_A = 0,298°$.

12.59 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}025;\ -41{,}67;\ 0{,}025;\ -5;\ 458{,}3;\ -2{,}5 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (4,167x^3 - 4,167 \cdot 10^4)/2 \cdot 10^7$, $\theta_A = \theta_C = -0,1194°$.

12.61 $\{C_1;\ C_2;\ D_1;\ D_2;\ D_3;\ D_4\} = \{0{,}0375;\ -20{,}83;\ 0{,}1625;\ -12{,}5;\ 604{,}2;\ -2{,}083 \cdot 10^4\} \times 10^3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 6,25x^3 - 2,083 \cdot 10^4 x)/2 \cdot 10^7$, $\theta_A = -\theta_C = -0,05968°$.

12.63 $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 10,42x^3 - 62.500x)/2 \cdot 10^7$, $\theta_A = -0,179°$.

12.65 $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 5,208x^3 - 10.417x)/2 \cdot 10^7$, $\theta_A = -0,02984°$.

12.67 $C_1 = qa$, $C_2 = -qa^2/3$. $v_{AB}(x) = (-x^4/24 + 16,67x^3 - 1.667x^2)/2 \cdot 10^7$. $v_B = -0,2083°$.

12.69 $v(x) = x^2(-x^2 + 60.000)/48 \cdot 10^7$.

12.71 $v_{AB}(x) = (x/16 - x^3)/12 \cdot 10^5$.

12.73 $v_{AB}(x) = x^2/1 \cdot 10^4$.

12.75 $v_{AB}(x) = 4,17 \cdot 10^{-7}(x - 158)(x + 38,0)x$.

12.77 $v_{AB}(x) = -8,33 \cdot 10^{-7}x^3 + 0,05x - 4,167$.

12.79 $v_{AB}(x) = x^2/4.000 - x^5/2,4 \cdot 10^{11}$.

12.81 $v_{AB}(x) = -2,083 \cdot 10^{-9}x^4 + 5 \cdot 10^{-5}x^2 + 0,00375x - 0,667$.

12.83 $R_A = 3m/2a$.

12.85 $R_A = -15$.

12.87 $R_A = 225$.

12.89 $R_A = -106$.

12.91 $R_A = -31$.

12.93 $R_A = 100$.

12.95 $R_B = -1.667$.

12.97 $R_A = -F - f$, $M_B = Fa^2/2(b - a)$.

12.99 $R_A = f - F$.

12.101 $v(0) = M_z(0) = \theta(a) = 0$, $V_y(a) = 0$.

12.103 $v(0) = v(a) = M_z(0) = \theta(a) = 0$.

12.105 $v_{AB}(0) = M_{AB}(0) = 0$, $v_{AB}(a) = v_{BE}(a)$, $\theta_{AB}(a) = \theta_{BE}(a)$, $M_{AB}(a) = M_{BE}(a)$, $V_{BE}(a) = V_{AB}(a) - F$, $\theta_{BE}(L/2) = V_{BE}(L/2) = 0$.

12.107 $v(0) = \theta(0) = \theta(L/2) = V_y(L/2) = 0$.

12.109 $u_C = mb^2/EI$, $v_C = Fa^3/3EI + \theta_B a$.

12.111 $u_D = F(a/2)^3/3EI - \theta_B(a/2)$

13 - Estabilidade de colunas

Comprimentos em mm, forças em kN, momentos em kNmm.

13.1 $P_{cr} = k/L$, 12 kN.

13.3 $P_{crit} = kL/2 = EAL/2c = 6.000$.

13.5 $(P/P_{cr}) = \cos\alpha$.

13.7 $(P/P_{cr}) = \cos\beta$.

13.9 $\alpha = Pe/(k - PL)$.

13.11 $P_{crit} = 9,47$.

13.13 $F_{cr} = 12,5$, $F_c = 15,3$.

13.15 $\Delta T = 41,4$ °C, $\Delta a = 4,17$ μm.

13.17 $F_{cr} = 2P_{cr}\cos\alpha = 222,4$.

13.19 $I_z = P_{cr}L^2/E\pi^2 = 4.789$ mm^4.

13.21 $v_C = -F_{cr}L^3/48EI_1 = -77,25$.

13.23 $v_C = -F_{cr}L^3/48EI_1 = -308,7$.

13.25 $v_{BC}(L) = v_c$.

13.27 $\lambda_{2cr} = 0,0031416$, $P_{cr} = 1,974$.

13.29 Cond. de cont. e compat.: $v_{AB}(0) = v_{BC}(L) = 0$, $v_{AB}(a) = v_{BC}(a)$, $\theta_{AB}(a) = \theta_{BC}(a)$.

13.31 $P_{cr} = 2,920405$.

13.33 $n = P_{cr}/|N_{15}| = 2,14$.

13.35 $I_z = 27.484$ mm^4.

13.36.1 Plano xz. $\Delta T = 84,2$ °C.

13.38.1 Pela barra 2, $n = 2,75$.

13.39 $R_D = 3.12$, $n = 2,57$ na barra CD.

13.41 $n = 3,05$ por escoamento. $v_{\max} = e\,[\sec(\lambda L/2) - 1] = 4,87$

13.43 $v(x) = (v_{\max} + e)(1 - \cos\lambda x)$.

13.45 $n = v_{adm}/v_{\max} = 0,884 < 1$.

13.47 $P_{cr} = \pi^2 EI_y/4L^2 = 3,405 > P$.

13.49 $(P/A)_{cr} = 104,83$ MPa.

13.51 $(P/A)_{cr} = 26,208$ MPa.

13.53 $v_{\max}$ em $\bar{x}$ tal que $\cos\lambda\bar{x} = \text{sen}\lambda L/(\lambda L)$.

13.55 $v_{\max} = v(L) = (m/P)(\sec\lambda L - 1)$.

13.57 $n = P_{adm}/P = 2,29$.

13.59 $n = P_{adm}/P = 3,56$.

13.61 $L/r = 208 > 200$, fora da norma.

14 - Métodos de energia

Comprimentos em mm, forças em kN, momentos em kNmm.

14.1 $\theta_C = 2mL/3$.

14.3 $v(L) = FL^3/12EI$, $R_{MA} = FL/2$.

14.5 $v(s) = qs\left[s^3 - 2Ls^2 + L^3\right]/24EI$.

14.7 $u_B = 5FR^3(2\pi - 3\sqrt{3})/24EI$.

14.9 $v_A = \dfrac{R^3F}{4EI}\dfrac{(3\pi^2 - 8\pi - 4)}{(3\pi - 8)}$.

14.11 $u_A = R^2m(\pi - 2)/2EI$.

14.13 $v_A = \dfrac{GR^3(32 - 20\pi + \pi^2)}{8EI(\pi - 8)}$.

14.15 $u_A = \pi FR^3/2EI$.

14.17 $\delta = 2v_A$, $v_A = \dfrac{FL^3}{3EI} + \dfrac{FR}{EI}[2LR + \dfrac{\pi}{4}(2L^2 + R^2)]$.

14.19 $k = F/\delta_{AB} = EI/3\pi R^3$.

14.21 $u_D = \dfrac{FL_1}{EA} + \dfrac{F}{k} + \dfrac{FL_2}{EA}$.

14.23 $v_D = \dfrac{FL^2}{k} + \dfrac{FL^3}{3EI}$.

14.25 $R_{Dy} = 5FL^3k/\left[48EI + 2kL^3\right]$.

Bibliografia

[1] Dym, C.L., Shames, I. H., Solid Mechanics - a variational approach, McGraw-Hill, Inc., 1973.

[2] Standard Test Method for Tension Testing for Metallic Materials," ASTM, E8M97, 1997.

[3] Steel Construction Manual, 15th Ed. The American Institute of Steel Construction (AISC). 2017,

[4] Love, A, E, H, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4^o Ed. Dover Publications, Inc, NY, 1944.

[5] Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuos Medium*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1969.

[6] Mendonça, P.T.R., Materiais compostos e estruturas sanduíche - Projeto e análise, 2a Edição. Ed. Orsa Maggiore, Florianópolis, 2019.

[7] Mendonça, P.T.R., Fancello, E.A. *O método de elementos finitos aplicado à Mecânica dos Sólidos*. Ed. Orsa Maggiore, Florianópolis, SC, 2019.

[8] Popov, E.P., Engineering Mechanics of Solids, Prentice-Hall, New Jersey, 1990.

[9] Timoshenko, S.P., Goodier, J. N. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 3rd. Ed., 1970.